約数の総和について

３年Ａ組　小椋　晃一
指導教諭　川口　慎二

１．要約

サイエンス研究会数学班 3 年生は約数の総和について学習している。今回は過剰数の中で特別なものを見つけることを目的とした。その過程において、約数の総和に関する考察を行うことができたので紹介する。

キーワード　　過剰数、メルセンヌ素数、素数、約数の総和、約数

２．研究の背景と目的

約数の総和によって、1 以外の自然数は 3 種類に分類できる。完全数や過剰数の倍数が過剰数になることに気づいた私はこの分類を約数の総和を直接求めなくても行えるのではないかと考えた。

３．研究内容

３．１　定義

本稿では、**約数**とはその数自身を含めた正の約数のことを指す。また、自然数 n の**約数の総和**を $\sigma(n)$ と表す。例えば、12 の約数の総和は

$$\sigma(12) = 1+2+3+4+6+12 = 28$$

より 28 となる。

また、自然数 n は、

・$\sigma(n) > 2n$ となるとき**過剰数**

・$\sigma(n) = 2n$ となるとき**完全数**

・$\sigma(n) < 2n$ となるとき**不足数**

であるという。

$2^n - 1$ の形で表される素数を**メルセンヌ素数**という。例えば、3, 7, 31, …などがある。

３．２　基本的な命題

この節では、いくつかの基本的な命題を証明する。

<u>命題 1</u>

p を素数とするとき、 p^n は不足数である。

（証明）

p^n の約数の総和を計算すると、

$$\begin{aligned}\sigma(p^n) &= p^0 + p^1 + p^2 + \cdots + p^n \\ &= \frac{(p^n - 1)}{p-1} + p^n \\ &\leq (p^n - 1) + p^n < 2(p^n)\end{aligned}$$

より、 p^n は不足数である。(Q. E. D.)

<u>命題 2</u>

メルセンヌ素数でない素数は無数に存在する。

（証明）

背理法を用いる。いま、3 を法として議

論する。メルセンヌ素数は、

$$2^n-1\equiv(-1)^n-1\equiv 0 \text{ または } 1$$

より、3 を法として 2 と合同な素数を考えればよい。 $p\equiv 2$ かつ $p\neq 2$ となる素数を有限個しかないと仮定して、順に

$$p_1, p_2, p_3, \cdots, p_{k-1}, p_k$$

とする。このとき、$3(p_1p_2p_3\cdots p_{k-1}p_k)+2$ は 3 を法として 2 と合同であり、 p_1, p_2, $p_3, \cdots, p_{k-1}, p_k$ のいずれでも割り切れないので、合成数である。よって、素数 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ を用いて、

$$3(p_1p_2p_3\cdots p_{k-1}p_k)+2=q_1q_2\cdots q_n$$

と表すことができる。ある $i(1\leq i\leq n)$ に対して $q_i\equiv 0$ となるとき、必然的に $q_i=3$ となるが、$3(p_1p_2p_3\cdots p_{k-1}p_k)+2$ は 3 の倍数ではない。

また、ある $l(1\leq l\leq n)$ に対して $q_l\equiv 2$ となるとき、 $q_l\neq 2$ より、$1\leq m\leq k$ となる整数 m を用いて、 $q_l=p_m$ となる。条件より、 q_l で $3(p_1p_2p_3\cdots p_{k-1}p_k)+2$ を割り切れるが、 p_m で割り切れないので矛盾する。

よって、すべての $1\leq j\leq k$ について、$q_j\equiv 1$ とかける。すると、

$$3(p_1p_2p_3\cdots p_{k-1}p_k)+2\equiv 2$$

に対して、 $q_1q_2\cdots q_n\equiv 1^n=1$ となり、矛盾している。

したがって、メルセンヌ素数でない素数は無数に存在する。(Q. E. D.)

命題 3

自然数 n が $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ と素因数分解されるとき、

$$\sigma(n)=$$
$$\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\times\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\times\cdots\times\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}$$

（証明）

一般に、$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ の約数は次の式を展開したときの各項に現れる。

$$(1+p_1+p_1^{\ 2}+\cdots+p_1^{\ \alpha_1})$$

$$\times(1+p_2+p_2^{\ 2}+\cdots+p_2^{\ \alpha_2})$$

$$\times\cdots\times(1+p_k+p_k^{\ 2}+\cdots+p_k^{\ \alpha_k})$$

ゆえに、

$$\sigma(n)=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\times\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\times\cdots\times\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}$$

という式が得られる。(Q. E. D.)

なお、自然数 m で表せる p_m の指数が 1 のとき、その項は p_m+1 となる。

命題 4

m, n を互いに素な自然数とするとき、

$$\sigma(mn)=\sigma(m)\sigma(n).$$

（証明）

m, n がそれぞれ

$$m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha 2}p_3^{\alpha_3}\cdots p_k^{\alpha_k},$$

$$n=q_1^{\beta_1}q_2^{\beta 2}q_3^{\beta_3}\cdots q_l^{\beta_l}$$

と素因数分解できるとする。

m, n は互いに素であるから、 p_i, q_j は s すべて相異なるため、命題 3 を用いると、

$\sigma(mn) =$

$$\left(\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\times\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\times\cdots\times\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}\right)$$

$$\times\left(\frac{q_1^{\beta_1+1}-1}{q_1-1}\frac{q_2^{\beta_2+1}-1}{q_2-1}\cdots\frac{q_l^{\beta_l+1}-1}{q_l-1}\right)$$

$=\sigma(m)\sigma(n)$. (Q. E. D.)

この命題 4 は自然数の個数を増やしても同様のことがいえる。

<u>定理 5</u>

(1) 完全数の倍数は過剰数である。

(2) 過剰数の倍数は過剰数である。

（証明）

(1) 完全数を n とおき、その約数を昇順で

$n_1, n_2, n_3, \cdots, n_{m-1}, n_m$ と表す。そして、完全数の倍数を kn とする。このとき、

$$\sigma(n) = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_{m-1} + n_m.$$

kn の約数に 1 が含まれているのは自明であるから、$k \neq 1$ より、

$$\begin{aligned}\sigma(kn) &\geq 1 + kn_1 + kn_2 + \cdots + kn_m \\ &> k\sigma(n)\end{aligned}$$

なので、$\sigma(kn) > k\sigma(n) = 2kn$.

(2)も同様の手段で示すことができる。

(Q. E. D.)

３．３　偶数の原始過剰数

ここで定理 5 から、他の過剰数の倍数でなく、他の完全数の倍数でもない過剰数を考えようと思い至った。そのような数を**原始過剰数**と定義する。例えば、20, 70, 88, … などが相当する。このとき以下の定理が得られた。

<u>命題 6.1</u>

偶数の原始過剰数は無数に存在する。

（証明）

p を素数として、$2^n p$ の形に素因数分解できる数を考える。

このとき、$2^n < p < 2^{n+1} - 1$ を満たすように p をとると、$p = 2^{n+1} - m = 2^n + k$（$m, k$ は自然数，$m > 1, k > 0$）と表せる。

ここで、命題 3 を用いて

$$\begin{aligned}\sigma(2^n p) &= \frac{2^{n+1}-1}{2-1}\times\frac{p^2-1}{p-1} \\ &= (2^{n+1}-1)\frac{(p+1)(p-1)}{p-1} \\ &= (2^{n+1}-1)(p+1) \\ &= 2^{n+1}p + 2^{n+1} - p - 1 \\ &= 2^{n+1}p + 2^{n+1} - (2^{n+1} - m) - 1 \\ &= 2(2^n p) + (m-1) > 2(2^n p)\end{aligned}$$

より、$2^n p$ が過剰数であることがわかる。

次に、$2^n p$ が原始過剰数でない過剰数であると仮定すると、次のいずれかが考えられる。

① $2^{n-1} p$ が過剰数または完全数

② 2^n が過剰数または完全数

ここで、②は命題 1 に反しているため、①について考える。

$$\begin{aligned}\sigma(2^{n-1} p) &= \frac{2^n-1}{2-1}\times\frac{p^2-1}{p-1} \\ &= (2^n-1)(p+1) \\ &= 2^n p + 2^n - p - 1 \\ &= 2^n p + 2^n - (2^n + k) - 1 \\ &= 2(2^{n-1} p) - (k+1) < 2^n p\end{aligned}$$

より、$2^{n-1} p$ は不足数となる。

したがって、$2^n p$ は原始過剰数である。

なお、p が $p=2^{n+1}-1$ とかけるメルセンヌ素数であるとき、$2^n p$ は完全数になるが、命題 2 より、p として当てはまる数は無数に存在するため、$2^n p$ と表せる数は無数に存在する。よって偶数の原始過剰数は無数に存在する。(Q. E. D.)

また、合成数は素数の倍数なので、命題 5 とあわせると次の命題が自明に成り立つ。

<u>命題 6.2</u>

奇数の不足数 D において、$2^n D$ が過剰数となる n が存在する。

<u>命題 6.3</u>

異なる 2 つの素数 p, q について、

$$2^{n+1} < q < p < 2^{n+2}-1$$

が成り立つとき、$2^n pq$ は原始過剰数である。

(証明)

条件より、

$$2^{n+1}+3 \le p \le 2^{n+2}-3$$
$$2^{n+1}+1 \le q \le 2^{n+2}-5$$

となる。命題 3 より

$$\begin{aligned}
\sigma(2^n pq) &= \frac{2^{n+1}-1}{2-1}\times\frac{p^2-1}{p-1}\times\frac{q^2-1}{q-1} \\
&= (2^{n+1}-1)(p+1)(q+1) \\
&= 2(2^n pq) + 2^{n+1}(1+p+q) \\
&\qquad -(p+1)(q+1) \\
&= 2(2^n pq) + 2^{n+1}(1+p+q) \\
&\qquad -\frac{p+1}{2}\times(2q+2) \\
&\ge 2(2^n pq) + 2^{n+1}(1+q+2+q) \\
&\qquad -\frac{p+1}{2}\times(2q+2) \\
&= 2(2^n pq) + 2^{n+1}(2q+3) \\
&\qquad -\frac{p+1}{2}\times(2q+2) \\
&> 2(2^n pq) + 2^{n+1}(2q+3) \\
&\qquad -2^{n+1}(2q+2) \\
&> 2(2^n pq).
\end{aligned}$$

よって、$2^n pq$ は過剰数であるとわかる。次に、$2^n pq$ が原始過剰数でないと仮定すると、2^n は不足数であり、次のいずれかの状況となる。

① $2^{n-1}pq$ が過剰数または完全数

② $2^n p$ が過剰数または完全数

③ $2^n q$ が過剰数または完全数

②, ③は命題 6.1 の証明における後半の議論に反するので、①について考える。

$$\begin{aligned}
\sigma(2^{n-1}pq) &= (2^n-1)(p+1)(q+1) \\
&= 2(2^{n-1}pq) + 2^n(1+p+q) \\
&\qquad -(p+1)(q+1) \\
&< 2(2^{n-1}pq) + 2^n(1+2p) \\
&\qquad -2^{n+2}(p+1) \\
&= 2(2^{n-1}pq) - 2^{n+1}p - 3\cdot 2^n \\
&< 2(2^{n-1}pq)
\end{aligned}$$

より、$2^{n-1}pq$ は不足数となる。

よって、$2^n pq$ は原始過剰数である。

(Q. E. D.)

３．４　奇数の原始過剰数

奇数の原始過剰数を議論するために、2 つの補題を用意する。

<u>補題 1</u> ([1])

素数の逆数和は正の無限大に発散する。

一般に、この補題 1 が成り立つ事実が知られており、命題 7 の証明に用いる。

<u>補題 2</u>

どの 2 つも互いに素な奇数の過剰数が無数に存在するとき、奇数の原始過剰数は無数に存在する。

（証明）

どの 2 つも互いに素な奇数の過剰数を順に $n_1, n_2, n_3, \cdots$ とする。

原始過剰数の定義から、過剰数の約数には原始過剰数が少なくとも 1 つ存在することがわかる。

ここで、自然数 m に対して、n_m の約数である原始過剰数のうちの 1 つを n'_m とする。すると、原始過剰数の列 $n'_1, n'_2, n'_3, \cdots$ を得る。$n_1, n_2, n_3, \cdots$ は互いに素であるから、それぞれを素因数分解したときに現れる素因数はすべて相異なる。

ゆえに、$n'_1, n'_2, n'_3, \cdots$ もすべて互いに素である。よって、$n'_1, n'_2, n'_3, \cdots$ は相異なる原始過剰数といえる。

さらに、奇数の約数は奇数に限られるため、奇数の原始過剰数ともいえる。よって、奇数の原始過剰数は無数に存在する。

(Q. E. D.)

<u>命題 7</u>

奇数の原始過剰数は無数に存在する。

（証明）

素数を順に $p_1, p_2, p_3, \cdots$ としたとき、補題 1 より、任意の k について

$$\frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_{k+1}} + \frac{1}{p_{k+2}} + \cdots + \frac{1}{p_m} \geq 1$$

を満たす m が存在する。

$p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_m$ と素因数分解できる自然数を n とする。つまり、

$$n = p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_m .$$

このとき、$k \leq i \leq m$ を満たす i について $\dfrac{n}{p_i}$ は n の約数であり、約数の総和は約数の部分和より大きいため、

$$\begin{aligned} &\sigma(n) \\ &\geq n + \frac{n}{p_k} + \frac{n}{p_{k+1}} + \cdots + \frac{n}{p_m} + 1 \\ &= n + n\left(\frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_{k+1}} + \cdots + \frac{1}{p_m}\right) + 1 \\ &\geq n + n + 1 > 2n \end{aligned}$$

より、n は過剰数である。

ここで、奇数の n について考えるため、$k_1 = 2$ とし、$p_{k_1} p_{k_1+1} p_{k_1+2} \cdots p_{m_1}$ と素因数分解できる自然数を n_1 とする。また、$k_2 = m_1 + 1$ として、$p_{k_2} p_{k_2+1} p_{k_2+2} \cdots p_{m_2}$ と素因数分解できる自然数を n_2 とする。また、$k_3 = m_2 + 1$ とし、$p_{k_3} p_{k_3+1} p_{k_3+2} \cdots p_{m_3}$ と素

因数分解できる自然数をn_3とする。この操作を繰り返して、$n_1, n_2, n_3, \cdots$を定義していく。すると$n_1, n_2, n_3, \cdots$は相異なる素因数をもつため、互いに素であり、奇数の過剰数である。

よって、補題 2 から奇数の原始過剰数は無数にあるといえる。(Q. E. D.)

命題 8

異なる素数p, qを用いて$p^\alpha q^\beta$とかける奇数の過剰数は存在しない。

（証明）

$3 \le p, q$として、命題 3 から、

$$\sigma(p^\alpha q^\beta) = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1} \times \frac{q^{\beta+1}-1}{q-1}$$

$$< \frac{p}{p-1} \times \frac{q}{q-1} \times p^\alpha q^\beta$$

$$\le \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times p^\alpha p^\beta$$

$$= \frac{15}{8} p^\alpha q^\beta < 2p^\alpha q^\beta$$

より、$p^\alpha q^\beta$は不足数となる。(Q. E. D.)

命題 9

相異なる素数p, q, r, sを用いて$pqrs$とかける奇数は不足数である。

（証明）

$p < q < r < s$としても一般性を失わない。このとき、条件を式でまとめると

$$3 \le p,\ 5 \le q,\ 7 \le r,\ 11 \le s$$

となる。$n = pqrs$として、nに対する約数の割合を求めると、

$$\sigma(n)$$

$$\le \frac{n}{1} + \frac{n}{3} + \frac{n}{5} + \frac{n}{7} + \frac{n}{11} + \frac{n}{15} + \frac{n}{21} + \frac{n}{33}$$

$$+ \frac{n}{35} + \frac{n}{55} + \frac{n}{77} + \frac{n}{105} + \frac{n}{165}$$

$$+ \frac{n}{231} + \frac{n}{385} + \frac{n}{n}$$

$$< 1.994n + 1.$$

もしnが不足数でないならば、$\sigma(n) \ge 2n$なので、$1.994n + 1 > 2n$が成り立つ。$0.006n < 1$ より、$n < 167$とならねばならない。

一方、条件から$n \ge 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 1155$となるため、奇数の$pqrs$は不足数である。

(Q. E. D.)

なお、素因子が 5 つの場合は原始過剰数が存在し、$15015 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$が最少のものである。

３．４　実際の値

原始過剰数は偶数であるものが多く、奇数であるものうち、最少のものは 945 となる。一の位が 1, 3, 7, 9 であるものは表に載っていないが、命題 7 の方法で生成するとそのような原始過剰数が少なくとも一種類現れる。おそらくずべて現れると考えている。

巻末に、5000 以下の原始過剰数の表を掲載する。$2^n p$の形に表せるものは太字で表記している。

４．今後の課題

今回、原始過剰数の存在証明を行ったが、偶数については素因子の個数の一般化が、奇数についてはより具体的な分類が行えな

かった。今後はこれらについても考えていきたい。

５．参考文献

[1]　「数論の精選 104 問」、Titu Andreescu Dorin, Andrica,Zuming Feng 著、小林一章、鈴木晋一監訳、清水俊宏、西本将樹訳、朝倉書店

６．謝辞

今回の研究にあたりご指導くださった顧問の川口先生、ありがとうございました。また、サイエンス研究会の方々にも協力や助言をいただけました。ありがとうございました。

表 1　5000 以下の原始過剰数

$20=2^2\cdot 5$	$945=3^3\cdot 5\cdot 7$	$2205=3^2\cdot 5\cdot 7^2$	$4030=2\cdot 5\cdot 13\cdot 31$
$70=2\cdot 5\cdot 7$	**$1184=2^5\cdot 37$**	$2210=2\cdot 5\cdot 13\cdot 17$	$4070=2\cdot 5\cdot 11\cdot 37$
$88=2^3\cdot 11$	**$1312=2^5\cdot 41$**	$2470=2\cdot 5\cdot 13\cdot 19$	$4095=3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 13$
$104=2^3\cdot 13$	**$1376=2^5\cdot 43$**	$2530=2\cdot 5\cdot 11\cdot 23$	$4216=2^3\cdot 17\cdot 31$
$272=2^4\cdot 17$	$1430=2\cdot 5\cdot 11\cdot 13$	$2584=2^3\cdot 17\cdot 19$	**$4288=2^6\cdot 67$**
$304=2^4\cdot 19$	**$1504=2^5\cdot 47$**	$2990=2\cdot 5\cdot 13\cdot 23$	$4510=2\cdot 5\cdot 11\cdot 41$
$368=2^4\cdot 23$	$1575=3^2\cdot 5^2\cdot 7$	$3128=2^3\cdot 17\cdot 23$	**$4544=2^6\cdot 71$**
$464=2^4\cdot 29$	**$1696=2^5\cdot 53$**	$3190=2\cdot 5\cdot 11\cdot 29$	**$4672=2^6\cdot 73$**
$550=2^4\cdot 31$	$1870=2\cdot 5\cdot 11\cdot 17$	$3230=2\cdot 5\cdot 17\cdot 19$	$4712=2^3\cdot 19\cdot 31$
$572=2^2\cdot 11\cdot 13$	**$1888=2^5\cdot 59$**	$3410=2\cdot 5\cdot 11\cdot 31$	$4730=2\cdot 5\cdot 11\cdot 43$
$650=2\cdot 5^2\cdot 13$	**$1952=2^5\cdot 61$**	$3496=2^3\cdot 19\cdot 23$	
$748=2^2\cdot 11\cdot 17$	$2002=2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$	$3770=2\cdot 5\cdot 13\cdot 29$	※太字は$2^n p$の形
$836=2^2\cdot 11\cdot 19$	$2090=2\cdot 5\cdot 11\cdot 19$	$3944=2^3\cdot 17\cdot 29$	