n 角形の形の一意性

３年Ａ組　古宮　昌典
指導教員　川口　慎二

１. 要約

サイエンス研究会数学班３年生は図形の性質について研究している。今回は、n 角形の形が１つに決まる条件について考えた。

キーワード　　角、辺の決まっている場所、領域に分ける

２. 研究の背景と目的

三角形の形が１つに決まる条件は、「すべての辺の長さが決まっている」、「2 辺の長さとその間の角の大きさが決まっている」、「1 辺の長さとその両端の角の大きさが決まっている」なというように、広く知られていることであるが、それらの条件を一般化し、n 角形で考えるとどのような条件になるのか興味を持った。

３. 研究内容

今回の研究で、n 角形の形が 1 つに決まる条件を長さが決まっている辺の本数によって分けた。ただし、今回は凹多角形については考えないことにした。

３．１　１種類目の条件

長さが決まっている辺が $n-1$本の場合を考える。

（1）$n-1$本の辺の長さが決まっている n 角形において、それらの間の $n-2$ 個の角の大きさが決まれば、その形は１つに決まる。

（2）辺 A_1A_n 以外の $n-1$ 本の辺の長さが決まっている n 角形 $A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}\cdots A_n$ において、$\angle A_2A_1A_n$ と $\angle A_{k-1}A_kA_{k+1}$ 以外の $n-2$ 個の角の大きさが決まっているとする。

・$\triangle A_1A_nA_k$ が直角三角形である

・$\triangle A_1A_nA_k$ が鋭角三角形のとき、

$A_nA_k\sin\angle A_1A_nA_k = A_1A_k$,

あるいは $A_1A_k \geqq A_nA_k$

・$\triangle A_1A_nA_k$ が鈍角三角形のとき、

$A_1A_k < A_nA_k$

のいずれかが成り立てば、この n 角形の形は１つに決まる。

（3）辺 A_1A_n 以外の $n-1$本の辺の長さが決まっている n 角形 $A_1A_2\cdots A_i\cdots A_k\cdots A_n$ において、$\angle A_{i-1}A_iA_{i+}$ と $\angle A_{k-1}A_kA_{k+1}$ 以外の $n-2$ 個の角の大きさが決まっているとき、この n 角形の形は１つに決まる。

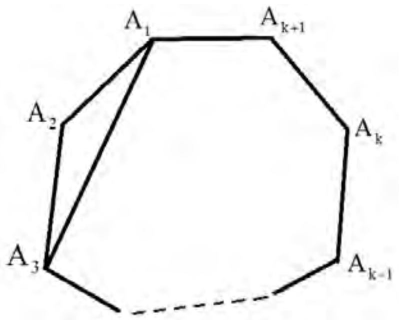
（証明）

（1）数学的帰納法で示す。

①$n=3$ の場合、2 辺とその間の角の大きさが決まっているので、（1）は成り立つ。

②$n=k$ において、（1）が成り立つと仮定す

る。下図のような $k+1$ 角形 $A_1A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}$ を考え、辺 A_kA_{k+1} 以外の辺の長さと $\angle A_1A_{k+1}A_k$ と $\angle A_{k+1}A_kA_{k-1}$ 以外の角の大きさが決まっているとする。点 A_1 と点 A_3 を結ぶと、$\triangle A_1A_2A_3$ は2辺とその間の角が決まっているので、形は1つに決まる。よって、辺 A_1A_{3n} の長さは1つに決まる。また、$\angle A_2A_1A_3$ と $\angle A_2A_3A_1$ の大きさも1つに決まるので、$\angle A_{k+1}A_1A_3$ と $\angle A_1A_3A_4$ の大きさも1つに決まる。ゆえに、$k-1$ 本の辺の長さとその間の $k-2$ 個の角の大きさが決まっている k 角形 $A_1A_3A_4\cdots A_kA_{k+1}$ ができる。仮定より、この多角形の形は1つに決まる。



したがって、$n=k+1$ においても（1）は成り立つ。

①, ②より、題意は示された。(Q. E. D.)

（2）まず、下の補題1から証明する。

<u>補題1</u>

$\triangle ABC$ において、辺 AC, AB の長さと $\angle ABC$ の大きさが決まっているとする。このとき、

・$\angle ABC$ が直角である

・$\angle ABC$ が鋭角であり、$AC \geqq AB$ であるか、$AB\sin\angle ABC = AC$ である

・$\angle ABC$ が鈍角である

のいずれかが成り立てば、この三角形の形は1つに決まる。逆に、その他の場合は形が1つに決まらない。

（補題の証明）

(i)　$\angle ABC$ が直角のとき

直角三角形 ABC において、斜辺と他の1辺の長さが決まっているので、この三角形の形は1つに決まる。

(ii)　$\angle ABC$ が鋭角のとき

(ii－1)　$AC \geqq AB$ である場合

AC＝AB の場合、三角形 ABC は二等辺三角形となるので、$\angle CAB$ の大きさは1つに決まる。よって、2 辺とその間の角の大きさが1つに決まっているので、三角形 ABC の形は1つに決まる。

AC＞AB の場合、まず、辺 AB の長さは決まっている。次に、$\angle CBA$ の大きさは1つに決まっているので、2点 B, C がのっている直線 l が1つに決まる（対称性により、辺 AB を対称軸として直線 l を折り返したときにできる直線は無視してよい）。よって、条件を満たす点 C の位置は直線 l と、点 A が中心で半径が辺 CA の円との交点である。その交点は2つできるが、$\angle ABC$ が鋭角であることから、$\triangle ABC$ の形は1つに決まる。

(ii－2)　$AB\sin\angle ABC = AC$ である場合

点 A から直線 BC へ降ろした垂線の足を H とすると、$AB\sin\angle ABC = AC$ より、AH＝AC であるから、$AH\perp BC$, AH=AC なので、点 C と点 H は一致する。

よって、$\angle ACB = 90^\circ$ であるから、直角三角形 ABC において、斜辺と他の1辺の長さが決まっているので、この三角形の形は1つに決まる。

(iii)　$\angle ABC$ が鈍角のとき

AB＜AC より、(ii－1)の後半と同様に、直線 l と点 A を中心とする半径が AC の円と

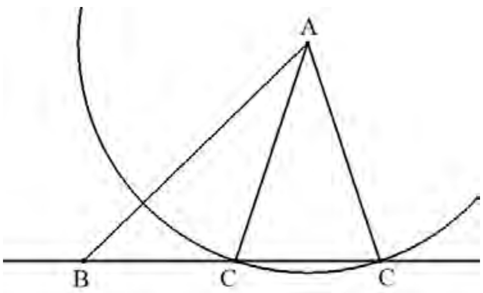
の交点は 2 つあるが、∠ABC が鈍角であることから、△ABC の形は 1 つに決まる。

逆に、それら以外の場合を考える。

(iv)　∠ABC が鋭角のとき

(iv－1)　AB sin∠ABC＜AC＜AB のとき

条件より、辺 AC の長さは点 A と直線 l の距離よりも長く、辺 AB の長さよりも短い。よって、直線 l と点 A を中心とする半径が辺 AC の円の交点は下図のように、2 つ存在する、ゆえに、この三角形の形は 1 つに決まらない。



(iv－2)　AB sin∠ABC＞AC のとき

点 A と直線 l の距離は AB sin∠ABC であるから、AB sin∠ABC＞AC のとき、直線 l と点 A を中心とする半径が AC の円の交点は存在しない。ゆえに、このような三角形は存在しない。

(i),(ii),(iii),(iv)より、補題は示された。

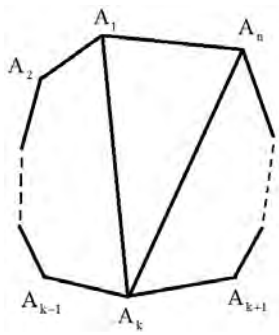
(Q. E. D.)

（2）の証明を行う。

（証明）下図において、点 A_1 と点 A_k，点 A_n と点 A_k を結ぶと、多角形 $A_1A_2A_3 \cdots A_k$ と多角形 $A_kA_{k+1}A_{k+2} \cdots A_{n-1}A_n$ はそれぞれ、辺 A_1A_k, 辺 A_nA_k 以外の辺とそれらの間の角の大きさが決まっているので、これらの多角形の形は 1 つにきまる。ゆえに、辺 A_1A_k, 辺 A_nA_k の長さは 1 つに決まる。

また、$\angle A_{n-1}A_nA_k$ の大きさも 1 つに決まるので、$\angle A_1A_nA_k$ の大きさも 1 つに決まる。つまり、$\triangle A_1A_nA_k$ において、辺 A_1A_k と辺 A_nA_k の長さと $\angle A_1A_nA_k$ の大きさが決まっているので、補題 1 より、題意は示された。

(Q. E. D.)



（3）まず、下の補題 2 から証明する。

<u>補題 2</u>

四角形 ABCD において、辺 AB, BC, CD の長さと∠DAB, ∠ADC の大きさが決まっているとき、この四角形の形は 1 つに決まる。

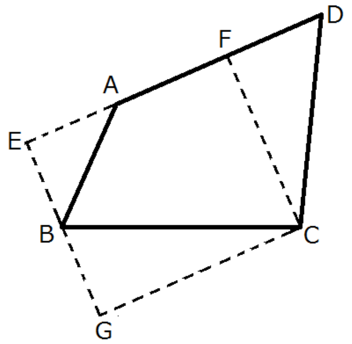
（補題 2 の証明）

点 B と C からそれぞれ直線 AD へ降ろした垂線の足をそれぞれ E，F とする。そして、点 C から直線 EB へ降ろした垂線の足を G とする。すると、∠BAD の大きさは決まっているので、∠BAE の大きさも 1 つに決まる。よって、直角三角形 ABE において、斜辺の長さと 1 つの鋭角の大きさが決まっているので、直角三角形 ABE の形は 1 つに決まる。ゆえに、辺 AE と辺 BE の長さは 1 つに決まる。同様に、直角三角形 CDF において、斜辺と 1 つの鋭角が決まっているので、形は 1 つに決まる。したがって、辺 DF と辺 CF の長さは 1 つに決まる。

一方、四角形 EGCF は長方形であるから、

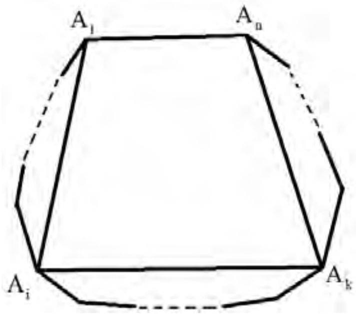
FC＝EG である。よって、線分 BG の長さも 1 つに決まる。ゆえに、直角三角形 BGC において、斜辺の長さと他の一辺の長さが決まっているので、直角三角形 BGC の形は 1 つに決まる。したがって、辺 CG の長さは 1 つに決まる。CG＝FE であり、線分 EA と DF の長さは決まっていることから、辺 AD の長さも 1 つに決まる。ここで、点 A と点 C を結ぶと、△ADC において、2 辺の長さとその間の角の大きさが決まっているので、△ADC の形は 1 つに決まる。ゆえに、辺 AC の長さも 1 つに決まる。したがって、△ABC において、すべての辺の長さが決まっているので、△ABC の形は 1 つに決まる。よって、四角形 ABCD の形は 1 つに決まる。

(Q. E. D.)



（3）の証明を行う。

（証明）下図の n 角形で、点 A_1 と点 A_i，点 A_n と点 A_k，点 A_i と点 A_k を結ぶと、多角形 $A_1A_2A_3\cdots A_i$ と多角形 $A_iA_{i+1}\cdots A_{k-1}A_k$（$k=i+1$ のときは存在しない）と多角形 $A_kA_{k+1}\cdots A_{n-1}A_n$ は、それぞれ、辺 A_1A_i，辺 A_iA_k, 辺 A_kA_n 以外の辺の長さとそれらの間の角の大きさはすべて決まっているので、これらの多角形の形は 1 つに決まる。よって、辺 A_1A_i，辺 A_iA_k，辺 A_kA_n の長さは 1 つに決まる。また、$\angle A_2A_1A_i$，$\angle A_{n-1}A_nA_k$ の大きさも 1 つに決まるので、$\angle A_nA_1A_i$, $\angle A_1A_nA_k$ の大きさも 1 つに決まる。よって、四角形 $A_1A_iA_kA_n$ において、辺 A_1A_i, 辺 A_iA_k, 辺 A_kA_n の長さと $\angle A_nA_1A_i$，$\angle A_1A_nA_k$ の大きさが決まっているので、補題 2 より、四角形 $A_1A_iA_kA_n$ の形は 1 つに決まる。よって、示された。(Q. E. D.)

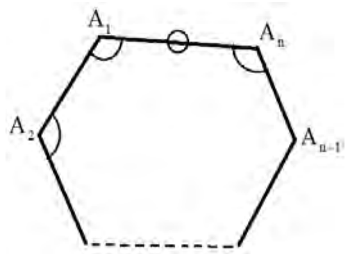


大きさが決まっている角が $n-2$ 個以上の場合、n 角形の形が 1 つに決まることは分かったが、大きさが決まっている角が $n-3$ 個以下である場合、形が 1 つに決まらない。実際には、決まっている角の個数が $n-3$ である場合を証明すれば十分である。そして、大きさが決まっていない角の配置により、以下の 9 通りのパターンに分けることができる。

本稿では、(B), (D), (H)の場合について、n 角形の形が 1 つに決まらないことを証明する。その他の場合についても、大きさが決まっていない角の頂点や長さが決まっていない辺を結ぶことにより、形が決まらないことを証明することができる。なお、図では長さの決まっていない辺や大きさが決まっていない角にマークを付けている。

(A) 大きさが決まっていない 3 つの角がすべて隣り合っており、そのうちの 2 つは長さが決まっていない辺と長さが決まってい

る辺にはさまれている場合

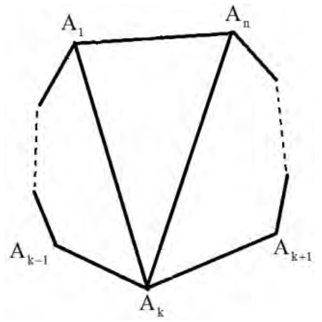


(B) 大きさが決まっていない 3 つの角のうち、2 つは隣り合っているが、1 つは隣り合っていない。そして、隣り合っている 2 つの角は、長さが決まっていない辺と長さが決まっている辺にはさまれている場合

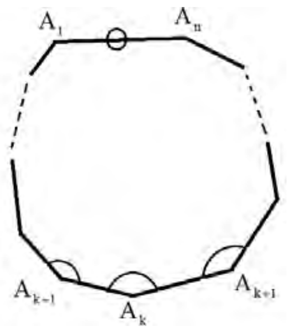
（B の証明）

下図の n 角形 $A_1A_2\cdots A_k\cdots A_n$ において、辺 A_1A_n 以外の辺の長さが決まっており、

$\angle A_2A_1A_n$, $\angle A_1A_nA_{n-1}$, $\angle A_{k-1}A_kA_{k+1}$ 以外の角の大きさが決まっているとする。そして、点 A_1 と点 A_k, 点 A_n と点 A_k をそれぞれ結ぶと、多角形 $A_1A_2A_3\cdots A_{k-1}A_k$, 多角形 $A_kA_{k+1}A_{k+2}\cdots A_{n-1}A_n$ はそれぞれ、辺 A_1A_k, 辺 A_nA_k 以外の辺とそれらの間の角の大きさが決まっているので、これらの形は 1 つに決まる。よって、辺 A_1A_k, 辺 A_nA_k の長さも 1 つに決まるが、$\triangle A_1A_kA_n$ の内角の大きさは 1 つも決まらないので、$\triangle A_1A_kA_n$ の形は 1 つに決まらない。ゆえに、この n 角形の形は 1 つに決まらない。(Q. E. D.)



(C) 大きさが決まっていない 3 つの角がすべて隣り合っているが、どれも 2 つの長さが決まっている辺にはさまれている場合



(D) 大きさが決まっていない 3 つの角はすべて隣り合っておらず、どれも 2 つの長さが決まっている辺にはさまれている場合

（D の証明）

下図の n 角形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ において A_1A_n 以外の辺の長さが決まっており、

$\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ $(1<i<n-4)$,

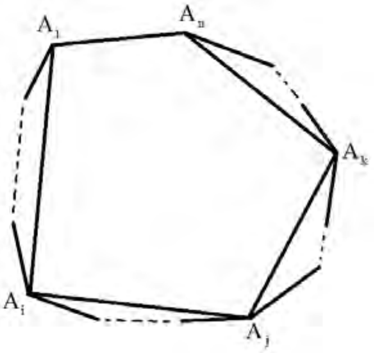
$\angle A_{j-1}A_jA_{j+1}$ $(3<j<n-2)$,

$\angle A_{k-1}A_kA_{k+1}$ $(5<k<n)$

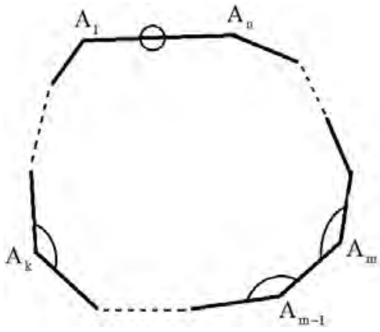
以外の角の大きさが決まっているとする。そして、点 A_1 と点 A_i, 点 A_i と点 A_j, 点 A_j と点 A_k, 点 A_k と点 A_n をそれぞれ結ぶと、多角形 $A_1A_2A_3\cdots A_{i-1}A_i$, 多角形 $A_iA_{i+1}A_{i+2}\cdots A_{j-1}A_j$, 多角形 $A_jA_{j+1}A_{j+2}\cdots A_{k-1}A_k$, 多角形 $A_kA_{k+1}A_{k+2}\cdots A_{n-1}A_n$ はそれぞれ、辺 A_1A_i, 辺 A_iA_j, 辺 A_jA_k, 辺 A_kA_n 以外の辺の長さとそれらの間の角の大きさが決まっているので、これらの多角形の形は 1 つに決まる。よって、辺 A_1A_i, 辺 A_iA_j, 辺 A_jA_k, 辺 A_kA_n の長さも 1 つに決まる。また、∠辺 $A_2A_1A_i$, $\angle A_{n-1}A_nA_k$ の大きさも 1 つに決まるので、$\angle A_nA_1A_i$ と $\angle A_1A_nA_k$ の大きさも 1 つに決まる。

ところが、五角形 $A_1A_iA_jA_kA_n$ は、辺 A_1A_n

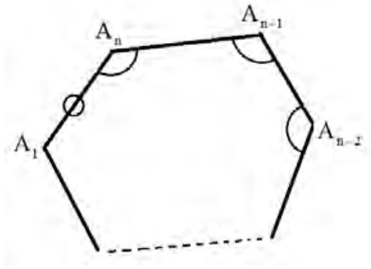
以外の 4 つの辺の長さと$\angle A_nA_1A_i$と
　$\angle A_1A_nA_k$の大きさが決まっているが、このような条件を満たす五角形は複数考えられるので、五角形$A_1A_iA_jA_kA_n$の形は 1 つに決まらない。
　ゆえに、このn角形の形は 1 つに決まらない。(Q. E. D.)



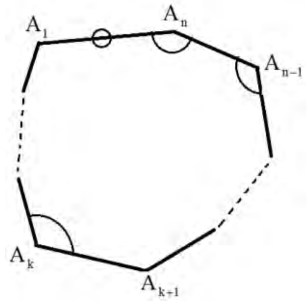
(E) 大きさが決まっていない角のうち、2 つは隣り合っているが、1 つは隣り合っておらず、どれも 2 つの長さが決まっている辺にはさまれている場合



(F) 大きさが決まっていない 3 つの角はすべて隣り合っており、そのうちの 1 つだけが長さが決まっていない辺と長さが決まっている辺にはさまれている場合



(G) 大きさが決まっていない角のうち、2 つは隣り合っているが、1 つは隣り合っておらず、隣り合っている 2 つの角のうち 1 つは、2 つの長さが決まっている辺にはさまれているが、あとの 1 つは長さが決まっていない辺と長さが決まっている辺にはさまれている場合



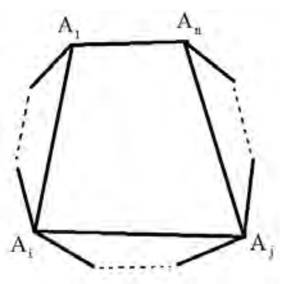
(H) 大きさが決まっていない 3 つの角はすべて隣り合っておらず、そのうちの 1 つだけ、長さが決まっていない辺と長さが決まっている辺にはさまれている場合

（H の証明）
　下図のn角形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ において、A_1A_n以外の辺の長さが決まっており、$\angle A_{n-1}A_nA_1$，$\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ $(1<i<n-3)$，$\angle A_{j-1}A_jA_{j+1}$ $(3<j<n-1)$以外の角の大きさが決まっているとする。そして、点A_1と点A_i，点A_iと点A_j，点A_jと点A_nをそれぞれ結ぶと、多角形 $A_1A_2A_3\cdots A_{i-1}A_i$，多角形 $A_iA_{i+1}A_{i+2}\cdots A_{j-1}A_j$，多角形 $A_jA_{j+1}A_{j+2}\cdots$

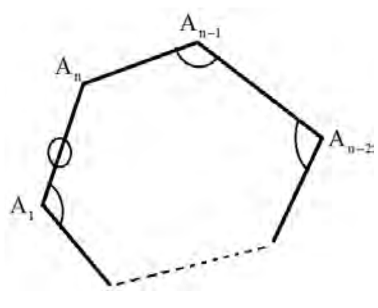
$A_{n-1}A_n$ はそれぞれ、辺 A_1A_i，辺 A_iA_j，辺 A_jA_n 以外の辺の長さとそれらの間の角の大きさが決まっているので、これらの多角形の形は１つに決まる。よって、辺 A_1A_i，辺 A_iA_j，辺 A_jA_n の長さも１つに決まる。∠辺 $A_2A_1A_i$ の角の大きさも 1 つに決まるので、$\angle A_nA_1A_i$ の大きさも１つに決まる。

ところが、$\triangle A_1A_iA_n$ は、辺 A_1A_i の長さと $\angle A_nA_1A_i$ の大きさしか決まっておらず、$\triangle A_nA_iA_j$ は、辺 A_iA_j と辺 A_jA_n の長さしか決まっていないので、どちらの三角形も形は１つに決まらない。

ゆえに、この n 角形の形は 1 つに決まらない。(Q. E. D.)



（Ⅰ）大きさが決まっていない角のうち、2 つは隣り合っているが、そのうちの 1 つは隣り合っておらず、その隣り合っていない角は長さが決まっていない辺と長さが決まっている辺にはさまれている。また、それに隣り合う、2 つの長さが決まっている辺にはさまれている角も大きさが決まっている場合



３．２　２種類目の条件

すべての辺の長さが決まっている場合を考える。

辺の長さがすべて決まっている n 角形において、$n-3$ 個以上の角の大きさが決まれば、その形は１つに決まる。

（証明の方針）

［１］$n-3$ 個以上の角の大きさが決まれば形が 1 つに決まることを証明するには、$n-3$ 個の角の大きさが決まっているときに、形が 1 つに決まることを証明すれば十分である。

［２］$n-3$ 個の角の大きさが決まっているということは、3 個の角の大きさが決まっていないということであるが、それらの角がどこに配置されているかに応じて、3 つの場合に分けて考える。

<u>命題 A</u>

大きさが決まっていない 3 個の角がすべて隣り合っているとき、形は１つに決まる。

（証明）

数学的帰納法で示す。

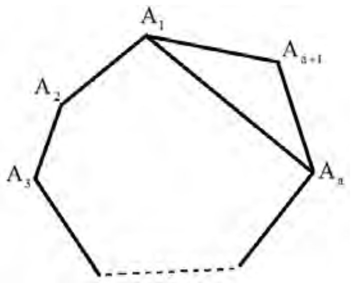
①三角形($n=3$)の場合、3 辺の長さが決まっているので、形は１つに決まる。

②$n-a$ において、命題 A が成り立つと仮定する。下図のように、すべての辺の長さが決まっている $a+1$ 角形 $A_1A_2A_3\cdots A_aA_{a+1}$ を考え、$\angle A_2A_1A_n$，$\angle A_1A_2A_{31}$，$\angle A_2A_3A_4$ 以外の角の大きさが決まっているとする。

次に、点 A_1 と点 A_a を結ぶ。すると、$\triangle A_1A_{a+1}A_a$ は、2 辺とその間の角の大きさが決まっているので、その形は１つに決まる。よって、線分 A_1A_a の長さは 1 つに決まる。

また、$\angle A_{a+1}A_aA_1$ の大きさも 1 つに決まるので、$\angle A_1A_aA_{a-1}$ の大きさも 1 つに決まる。ゆえに、すべての辺の長さと $a-3$ 個の角の大きさが決まっている a 角形 $A_1A_2A_3\cdots A_a$ ができる。仮定より、この多角形の形は 1 つに決まる。したがって、$n=a+1$ のときも命題は成り立つ。

①，②より、題意は示された。(Q. E. D.)



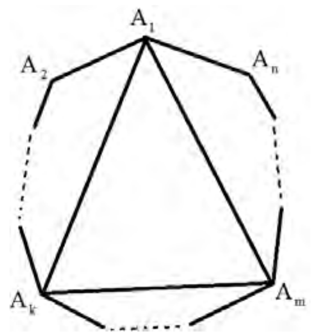
命題 B

大きさが分からない 3 つの角がすべて隣り合っていないとき、形は 1 つに決まる。

（証明）

下図のようなすべての辺が決まっている n 角形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ を考え、$\angle A_nA_1A_2$ ，$\angle A_{k-1}A_kA_{k+1}$, $\angle A_{m-1}A_mA_{m+1}$ の大きさがわからないとする。そして、点 A_1 と点 A_k，点 A_k と点 A_m，点 A_m と点 A_n を結んで、n 角形を 4 つの領域に分ける。すると、多角形 $A_1A_2A_3\cdots A_k$，多角形 $A_kA_{k+1}A_{k+2}\cdots A_m$，多角形 $A_mA_{m+1}A_{m+2}\cdots A_nA_1$ はそれぞれ、辺 A_1A_k，辺 A_kA_m，辺 A_mA_1 以外の辺の長さとそれらの間の角の大きさが決まっているので、これらの形は 1 つに決まる。よって、辺 A_1A_k，辺 A_kA_m，辺 A_mA_1 の長さも 1 つに決まる。

ゆえに、△辺 $A_1A_kA_m$ はすべての辺の長さが決まっているので、形は 1 つに決まる。したがって、n 角形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ の形は 1 つに決まる。(Q. E. D.)



命題 C

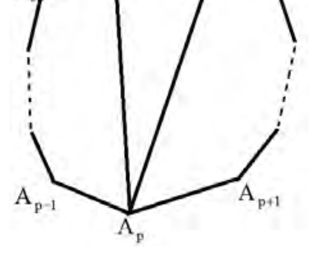
大きさが分からない角のうち、2 つだけが隣り合っているとき、形は 1 つに決まる。

（証明）

下図のような n 角形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ を考え、$\angle A_nA_1A_2$ ，$\angle A_1A_2A_3$，$\angle A_{p-1}A_pA_{p+1}$ の角の大きさが決まっていないとする。そして、点 A_1 と点 A_p，点 A_2 と点 A_p をそれぞれ結び、n 角形を 3 つの領域に分ける。

すると、多角形 $A_2A_3A_4\cdots A_{p-1}A_p$，多角形 $A_1A_pA_{p+1}\cdots A_n$ はそれぞれ辺 A_2A_p，辺 A_1A_p 以外のすべての辺の長さとそれらの間の角の大きさが決まっているので、これらの形は 1 つに決まる。よって、辺 A_2A_p，辺 A_1A_p の辺の長さも 1 つに決まる。

ゆえに、$\triangle A_1A_2A_p$ はすべての辺の長さが決まっているので形は 1 つに決まる。したがって、n 角形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ の形は 1 つに決まる。(Q. E. D.)



命題A，命題B，命題Cより、すべての辺の長さが決まっているn角形において、$n-3$個以上の角の大きさが決まれば形は1つに決まることが示された。

では、逆に、$n-4$個以下しか角の大きさが決まっていない場合、形は1つに決まらないことを証明する。

$n-4$個の角の大きさが決まっているとき、形は1つに決まらないことを証明すれば十分である。そして、大きさが決まっていない4個の角の配置により、5つのパターンに分けることができる。

ここでは、[A]，[B]の場合について、n角形の形が1つに決まらないことを証明する。[C], [D], [E]の場合も[A], [B]と同様に、大きさが決まっていない角の頂点を結ぶことで、形が1つに決まらないことを証明できる。

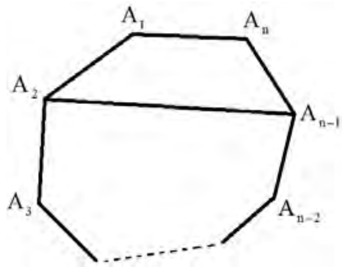
[A] 決まっていない4つの角がすべて隣り合っている場合

（[A]の証明）

下図のようなn角形$A_1A_2A_3\cdots A_n$を考え、$\angle A_1A_2A_3$，$\angle A_2A_1A_n$，$\angle A_1A_nA_{n-1}$，$\angle A_nA_{n-1}A_{n-2}$以外の角の大きさが決まっているとする。そして、点A_2と点A_{n-1}を結ぶと、多角形$A_2A_3A_4\cdots A_{n-1}$は、辺A_2A_{n-1}以外のすべての辺の長さと、それらの間の角の大きさが決まっているので、形は1つに決まる。

よって、辺A_2A_{n-1}の長さも1つに決まり、四角形$A_1A_2A_{n-1}A_n$はすべての辺の長さが決まっているが、内角は1つも大きさが決まっていないので、四角形$A_1A_2A_{n-1}A_n$の形は1つに決まらない。ゆえに、このn角形の形は1つに決まらない。実際、同じ条件を満たす別のn角形は容易に考えられる。

(Q. E. D.)



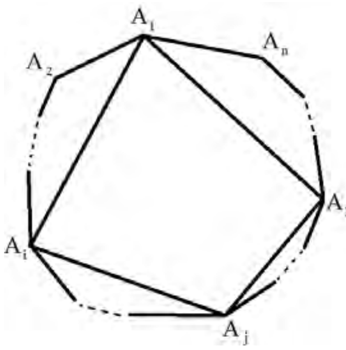
[B] 大きさが決まっていない4つの角が、すべて隣り合っていない場合

（[B]の証明）

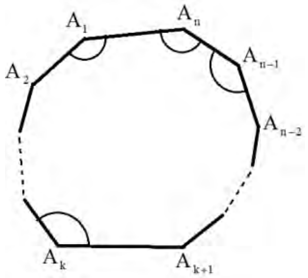
下図のようなn角形 $A_1A_2\cdots A_i\cdots A_j\cdots A_k\cdots A_n$を考え、$\angle A_2A_1A_n$，$\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$，$\angle A_{j-1}A_jA_{j+1}$，$\angle A_{k-1}A_kA_{k+1}$以外のすべての角の大きさが決まっているとする。そして、点A_1，点A_i，点A_j，点A_kを結ぶと、多角形$A_1A_2A_3\cdots A_i$，多角形$A_iA_{i+1}A_{i+2}\cdots A_j$，多角形 $A_jA_{j+1}A_{j+2}\cdots A_k$，多角形 $A_kA_{k+1}A_{k+2}\cdots A_nA_1$はそれぞれ、辺$A_1A_i$, 辺$A_iA_j$, 辺$A_jA_k$, 辺 A_kA_1以外のすべての辺の長さとそれらの間のすべての角の大きさが決まっているので、これらの多角形の形は1つに決まる。よって、辺A_1A_i，辺A_iA_j，辺A_jA_k，辺A_kA_1の長さも1つに決まるが、四角形$A_1A_iA_jA_k$の内角の大きさは、1つも決まっていないので、四角形$A_1A_iA_jA_k$の形は1つに決まらない。ゆえに、このn角形$A_1A_2A_3\cdots A_n$の形は1つに決まらない。

実際、四角形$A_1A_iA_jA_k$に対して、これと4つの同じ辺の長さを持つ四角形を考える（これは容易にできる）ことで同じ条件を満たすn角形を作ることができる。

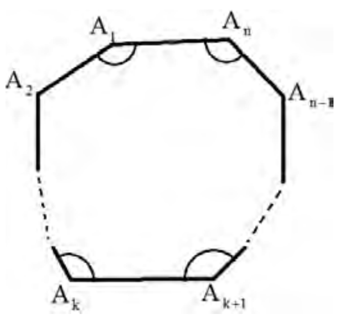
(Q. E. D.)



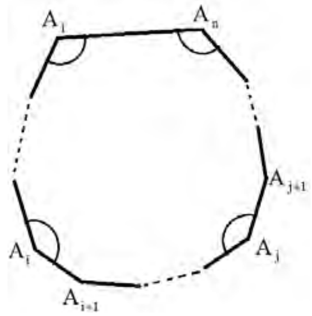
[C] 大きさが決まっていない4つ角のうち、3つは隣り合っていて、1つは隣り合っていない場合



[D] 大きさが決まっていない 4 つの角のうち、2 つが隣り合っているが、他の 2 つの角も別に隣り合っている場合のうち、[A]でない場合



[E] 大きさが決まっていない 4 つの角のうち、2 つが隣り合っているが、他の 2 つの角はどれにも隣り合っていない場合



３．３　３種類目の条件

長さが決まっている辺が $n-2$ 本の場合を考える。

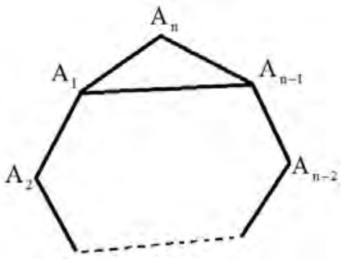
（Ⅰ）$n-1$個の角の大きさが決まっている n 角形において、隣り合っている 2 つの辺以外の $n-2$ 個の辺の長さが決まれば形は 1 つに決まる。

（Ⅱ）　$n-1$個の角の大きさが決まっている n 角形 $A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}\cdots A_n$ において、辺 A_1A_n と辺 A_kA_{k+1} 以外の $n-2$ 本の辺の長さが決まっているとき、辺 A_1A_k と辺 A_nA_{k+1} が平行でなければ形は 1 つに決まる。

（Ⅰの証明）

多角形の内角の和は一定なので、$n-1$個の角の大きさが決まればもうひとつの角の大きさも 1 つに決まる。よって、n 角形の内角はすべて決まっているとしてよい。下図のようなすべての角の大きさが決まっている n 角形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ を考え、辺 A_1A_n と辺 A_nA_{n-1} 以外の辺の長さが決まっているとする。そして、点 A_1 と点 A_{n-1} を結ぶ。すると、多角形 $A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}$ は、辺 A_1A_{n-1} 以外の辺と、それらの間の角の大きさが決まっているので、３．１節の条件（1）より、形が 1 つに決まる。よって、辺 A_1A_{n-1} の長

さは 1 つに決まる。また、$\angle A_2A_1A_{n-1}$ と $\angle A_1A_{n-1}A_{n-2}$ の大きさも 1 つに決まるので、$\angle A_nA_1A_{n-1}$ と $\angle A_n A_{n-1}A_1$ の大きさも 1 つに決まる。ゆえに、1 辺とその両端の角が決まっているので、$\triangle A_1A_{n-1}A_n$ の形も 1 つに決まる。(Q. E. D.)



（Ⅱ）を証明するために、次の補題 3 から証明する。

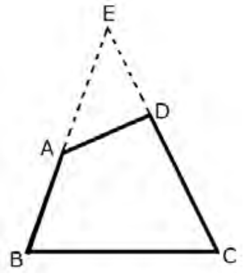
<u>補題 3</u>

すべての角の大きさが決まっている四角形 ABCD において、辺 AD と辺 BC の長さが決まっているとする。辺 AB と辺 CD が平行でなければ形は 1 つに決まる。

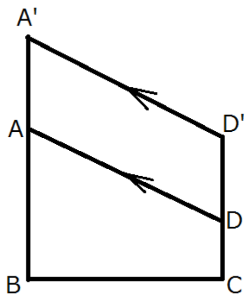
（補題 3 の証明）

AD≦BC として考えても一般性を失わない。そして、下図のように、直線 AB と直線 DC の交点を E とすると、1 辺とその両端の角が決まっているので、△EBC の形は 1 つに決まる。

また、∠BAD と∠ADC の大きさは決まっているので、∠EAB と∠EDA の大きさは 1 つに決まる。よって、1 辺とその両端の角が決まっているので、△EAD の形も 1 つに決まる。ゆえに、四角形 ABCD の形は 1 つに決まる。(Q. E. D.)



逆に、四角形 ABCD において、辺 AB と辺 CD が平行であれば、例えば、下図のような四角形 ABCD と四角形 A’BCD’はどちらも条件を満たすので、形は 1 つに決まらない。

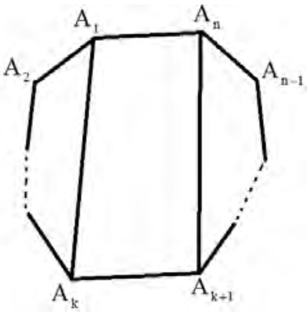


（Ⅱの証明）

（Ⅰ）と同じように、すべての角の大きさが決まっているとしてよい。下図の n 角形で、点 A_1 と点 A_k, 点 A_n と点 A_{k+1} を結ぶと、多角形 $A_1A_2A_3 \cdots A_k$ と多角形 $A_{k+1}A_{k+2}A_{k+3}\cdots A_n$ はそれぞれ、辺 A_1A_k,辺 $A_{k+1}A_n$ 以外の辺とそれらの間の角の大きさが決まっているので、これらの形は 1 つに決まる。よって、辺 A_1A_k,辺 $A_{k+1}A_n$ の長さは 1 つに決まる。

また、$\angle A_2A_1A_k$, $\angle A_{k-1}A_kA_1$, $\angle A_{n-1}A_nA_{k+1}$, $\angle A_{k+2}A_{k+1}A_n$ の大きさも 1 つに決まるので、$\angle A_nA_1A_k$, $\angle A_1A_kA_{k+1}$, $\angle A_1A_nA_{k+1}$, $\angle A_kA_{k+1}A_n$ の大きさも 1 つに決まる。つまり、四角形 $A_1A_nA_{k+1}A_k$ は、すべての角の大きさと辺 A_1A_k と辺 $A_{k+1}A_n$ の長さが決ま

っている。さらに、仮定より、辺 A_1A_k と辺 A_nA_{k+1} は平行でないので、補題 3 より、四角形 $A_1A_nA_{k+1}A_k$ の形は 1 つに決まる。よって題意は示された。(Q. E. D.)



３．４　その他の場合

最後に、長さが決まっている辺の本数が $n-3$ 本以下の場合、いくつの角が決まっていても形は 1 つに決まらないことを証明する。

実際には、決まっている辺の本数が $n-3$ 本のときにすべての角が決まっていても形は 1 つに決まらないことを示せば十分である。そして、決まっている辺の配置により、(A),(B),(C)の 3 つの場合に分けて考えた。

(A) 長さが決まっていない 3 辺がすべて隣り合っている場合

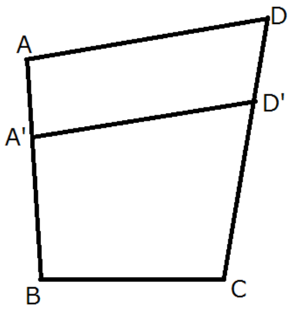
まず、次の補題 4 を証明する。

<u>補題 4</u>

すべての角の大きさと一辺の長さが決まっている四角形の形は 1 つに決まらない。

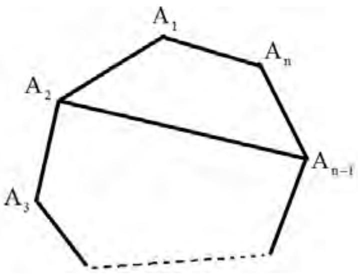
（補題 4 の証明）

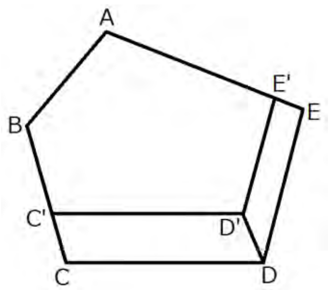
下図の四角形 ABCD において、すべての角の大きさと辺 BC の長さが決まっているとする。すると、辺 AB 上に A, B とは異なる点 A'をとり、点 A'を通り、辺 AD に平行な直線と辺 CD の交点を D'とする。すると、AD // A'D'より同位角は等しいので、∠DAB ＝∠D'A'B, ∠ADC＝∠A'D'C である。ゆえに、四角形 A'BCD'も条件を満たす。したがって、条件を満たす四角形が複数存在することになるので、この形は 1 つに決まらない。(Q. E. D.)



（A の証明）

下図の n 角形 $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ において、すべての角の大きさは決まっており、辺 A_2A_1, 辺 A_1A_n, 辺 $A_{n-1}A_n$ の辺の長さが決まっていないとする。そして、点 A_2 と点 A_{n-1} を結ぶと、多角形 $A_2A_3A_4 \cdots A_{n-2}A_{n-1}$ は辺 A_2A_{n-1} 以外の辺の長さとそれらの間の角の大きさが決まっているので、この多角形の形は 1 つに決まる。ゆえに、辺 A_2A_{n-1} の長さは 1 つに決まる。また、$\angle A_3A_2A_{n-1}$ と $\angle A_{n-2}A_{n-1}A_2$ の大きさも 1 つに決まるので、$\angle A_1A_2A_{n-1}$ と $\angle A_nA_{n-1}A_2$ の大きさも 1 つに決まる。つまり、四角形 $A_1A_2A_{n-1}A_n$ は、すべての角の大きさと辺 A_2A_{n-1} の長さが決まっていることになるが、補題 4 より、この四角形の形は 1 つに決まらない。ゆえに、この n 角形の形は 1 つに決まらない。実際、補題 4 と同様の反例を四角形 $A_1A_2A_{n-1}A_n$ に対して作ることで同じ条件を満たす n 角形を作ることができる。(Q. E. D.)





(B)長さが決まってない3辺のうち、2辺は隣り合っているが、1 つは隣り合っていない場合

まず、次の補題5を証明する。

<u>補題5</u>

五角形 ABCDE において、すべての角の大きさと辺 AB と辺 CD の長さが決まっているとき、この五角形の形は 1 つに決まらない。

（補題5の証明）

辺BC上に点B, Cとは異なる点C'をとる。そして、点C'を通り、直線CDに平行な直線と、点Dを通り、直線C'Cに平行な直線の交点を D'とする。さらに、点 D'を通り、直線 DE に平行な直線と辺 AE との交点をE'とする。CD∥C'D'かつ D D' ∥C C'より、四角形 CDD'C'は平行四辺形である。よって、CD＝C'D',∠DCB＝∠D'C'B である。また、DE∥D'E'より、∠AED＝∠AE'D'である。

さらに、CD∥C'D', DE∥D'E'より∠CDE＝∠C'D'E'であるから、五角形 ABC'D'E'も条件を満たす。したがって、条件を満たす五角形が複数存在することになるので、この形は1つに決まらない。(Q. E. D.)

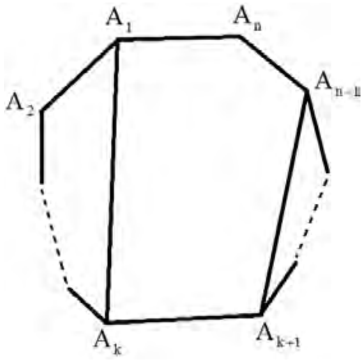
（Bの証明）

下図の n 角形 $A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}\cdots A_n$ において、すべての角の大きさと辺 A_1A_n と辺 $A_{n-1}A_n$ と辺 A_kA_{k+1} 以外の辺の長さが決まっているとする。そして、点 A_1 と点 A_k, 点 A_{n-1} と点 A_{k+1} を結ぶと、多角形 $A_1A_2A_3\cdots A_k$ と多角形 $A_{k+1}A_{k+2}A_{k+3}\cdots A_{n-2}A_{n-1}$ はそれぞれ辺 A_1A_k,辺 $A_{k+1}A_{n-1}$ 以外の辺の長さとそれらの間の角の大きさが決まっているので、これらの多角形の形は1つに決まる。よって、辺 A_1A_k,辺 $A_{k+1}A_{n-1}$ の長さは1つに決まる。また、$\angle A_2A_1A_k$, $\angle A_1A_kA_{k-1}$, $\angle A_{k+1}A_{n-1}A_{n-2}$, $\angle A_{k+2}A_{k+1}A_{n-1}$ の角の大きさも1つに決まるので、$\angle A_nA_1A_k$, $\angle A_{k+1}A_kA_1$, $\angle A_{k+1}A_{n-1}A_n$, $\angle A_kA_{k+1}A_{n-1}$ の角の大きさも1つに決まる。

ゆえに、五角形 $A_1A_kA_{k+1}A_{n-1}A_n$ は、すべての角の大きさと、辺 A_1A_k,辺 $A_{k+1}A_{n-1}$ の長さが決まっている。しかし補題5より、この五角形の形は1つに決まらない。したがって、この n 角形の形は1つに決まらない。

実際、補題 5 と同様の反例を五角形 $A_1A_kA_{k+1}A_{n-1}A_n$ で作ることで、同じ条件を満たす n 角形を作ることができる。

(Q. E. D.)



(C)長さが決まっていない3辺がすべて隣り合っていない場合

(C)を証明するために、次の補題6を証明する。

<u>補題6</u>

六角形 ABCDEF において、すべての角の大きさと、辺 BC, DE, FA の長さが決まっているとする。このとき、この六角形の形は1つに決まらない。

（補題6の証明）

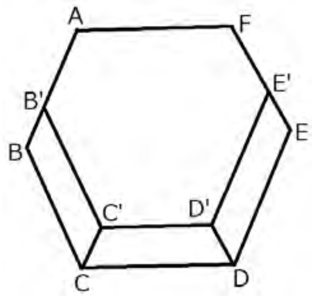
辺 AB 上に A, B とは異なる点 B’をとる。そして、点 B’を通り BC に平行な直線と、点 C を通り AB に平行な直線との交点を C’とする。さらに、点 C’を通り CD に平行な直線と、点 D を通り EF に平行な直線との交点を D’とし、D’を通り DE に平行な直線と辺 EF との交点を E’とする。

B’C’//BC，BB’//CC’より、四角形 BCC’B’は平行四辺形である。ゆえに、BC＝B’C’, ∠ABC＝∠AB’C’が成り立つ。また、D’E’ ∥DE，DD’ ∥EE’より、四角形 DEE’D’も平行四辺形であるから、DE＝D’E’，∠FED＝∠FE’D’が成り立つ。

さらに、BC ∥B’C’, CD ∥C’D’，DE ∥D’E’より、∠BCD＝∠B’C’D’, ∠CDE＝∠C’D’E’である。

以上から、六角形 AB’C’D’E’F も条件を満たすことがわかった。つまり、条件を満たす六角形が複数存在するので、形は1つに決まらない。しかし、∠ABC＋∠BCD＜180°のときは点 C’が六角形の外部に存在する。この場合、頂点 A,B,C,D,E,F をそれぞれ E,F,A,B,C,D に名前をつけ替え、上述の証明と同様の操作を行うことにより、同じ条件を満たす六角形を作ることができる。

(Q. E. D.)



（C の証明）

下図の n 角形 $A_1A_2\cdots A_k\cdots A_m\cdots A_n$ において、すべての角の大きさと辺 A_1A_n と辺 A_kA_{k+1} と辺 A_mA_{m+1} 以外の辺の長さが決まっているとする。そして、点 A_1 と点 A_k, 点 A_{k+1} と点 A_m, 点 A_{m+1} と点 A_n をそれぞれ結ぶと、多角形 $A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k$，多角形 $A_{k+1}A_{k+2}\cdots A_{m-1}A_m$，多角形 $A_{m-1}A_m\cdots A_{n-1}A_n$ はそれぞれ、辺 A_1A_k, 辺 $A_{k+1}A_m$, 辺 $A_{m+1}A_n$ 以外の辺の長さとそれらの辺の間にある角の大きさが決まっているので、これらの多角形の形は1つに決まる。よって、辺 A_1A_k, 辺 $A_{k+1}A_m$，辺 $A_{m+1}A_n$ の長さも1つに決まる。

また、$\angle A_2A_1A_k$，$\angle A_1A_kA_{k-1}$,

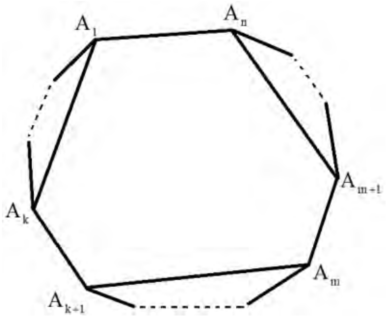
$\angle A_{k+2}A_{k+1}A_m$，$\angle A_{m-1}A_m A_{k+1}$,

$\angle A_nA_{m+1}A_{m+2}$, $\angle A_{n-1}A_nA_{m+1}$

の大きさは１つに決まる。すべての角の大きさは決まっていることから、六角形 $A_1A_kA_{k+1}A_mA_{m+1}A_n$ は、すべての角の大きさと辺 A_1A_k, 辺 $A_{k+1}A_m$, 辺 $A_{m+1}A_n$ の長さが決まっている六角形である。しかし、補題６より、この六角形の形は１つに決まらないので、この n 角形の形は１つに決まらない。実際、補題 6 と同様の反例を六角形 $A_1A_kA_{k+1}A_mA_{m+1}A_n$ に対して作ることで同じ条件を満たす n 角形を作ることができる。

(Q. E. D.)

(A),(B),(C)より、n 角形において、$n-3$ 本以下しか辺の長さが決まっていない場合は形が１つに決まらないことが示された。



４. 今後の課題

今回は凹多角形については考えなかったので、それについて考えていくことや、n 角形が円に内接、外接している場合についても考えていきたい。さらに、今後は立体について形が決まる条件についても調べていきたい。

５. 参考文献

[1]　三角形の決定
http://www.ravco.jp/cat/view.php?cat_id=6042

６. 謝辞

今回の研究にあたり、ご指導下さいました顧問の川口先生ありがとうございました。また、サイエンス研究会の先輩方からも助言をいただきました。ありがとうございました。