グラフ理論に関する諸定理の証明

4 年 B 組　松川　賢太朗
指導教員　川口　慎二

１．要約

サイエンス研究会数学班 4 年生はグラフ理論について研究している。今回はグラフ理論に関する様々な定理の証明を行うことを目標とした。

キーワード　　グラフ理論、ラムゼーの定理、握手の定理、五色定理

２．研究の背景と目的

昨年から、私は組合せや確率について研究している。グラフ理論は組合せ問題を簡潔に見やすくしてくれる道具の 1 つである。そのため、今回グラフ理論についての研究を行った。

３．研究内容

はじめに、**グラフ**とは幾つかの点と、2 点をつなぐ線分からなる図形を意味する。各点のことを**頂点**、2 点を結んだ線分のことを**辺**と呼ぶ。また、頂点vに接続する辺の数を頂点の**次数（degree）**といい、$d(v)$とかく。

３．１　ラムゼーの定理

すべての頂点の間に辺が存在するグラフのことを**完全グラフ**という。完全グラフについては、次の定理が知られている。

<u>定理 1</u> (ラムゼーの定理)

A, Bは任意の定数とする。頂点の数がnの完全グラフの辺を赤と青に塗り分けるとき、nが十分大きければ「頂点数Aの赤い完全グラフ」と「頂点数Bの青い完全グラフ」が必ず存在する。

ここで、定理1の条件を満たす最小の頂点数nのことを**ラムゼー数**といい、$R(A, B)$と表す。

<u>例題 1</u>

6 人の人物がいる場合、互いに知り合いである 3 人組か、互いに知らない 3 人組が必ず存在することを証明せよ。

(証明)

この問題の状況をグラフ化すると図 1 のようになる。

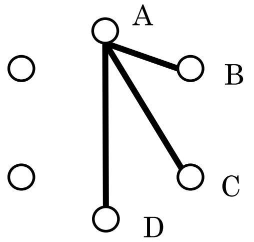

図 1

互いに知り合いである人同士を実線で、互いに知らない人を点線で結ぶ。つまり実

線の三角形か、点線の三角形かどちらかができればいい。まず1点に注目する。

今回の場合はAとする。Aからは5本の辺が出ることになる。実線と点線で分けるためどちらかが必ず3本以上である。いま、AB, AC, ADが実線であるとすると、A, B, C, Dを頂点とする三角形が考えられる。

① BCが実線のとき
　△ABCが実線の三角形である。
② CDが実線のとき
　△ACDが実線の三角形である。
③ BDが実線のとき
　△ABDが実線の三角形である。
④ ①～③以外のとき
　BC, CD, BDはすべて点線なので、
　△BCDが点線の三角形である。

いずれにせよ、実線の三角形か、点線の三角形かどちらかができる。　(Q. E. D.)

例題2

8人の人物がいる場合、互いに知り合いである3人組か、互いに知らない3人組が必ず存在することを証明せよ。

証明

この問題をグラフ化すると図2のようになる。

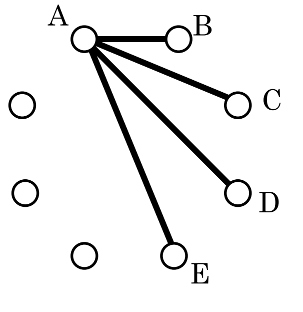

図2

例題1と同様に考えて、実線の三角形か、点線の三角形のどちらかができればよい。まず1点Aに注目する。Aからは7本の辺が出ることになる。実線と点線で分けるため、どちらかが必ず3本以上である。いま、AB, AC, AD, AEが実線であるとする。

このとき、A, B, C, D, Eを頂点とする三角形が考えられる。

① BCが実線のとき
　△ABCが実線の三角形である。
② CDが実線のとき
　△ACDが実線の三角形である。
③ DEが実線のとき
　△ABDが実線の三角形である。
④ BDが実線のとき
　△ABDが実線の三角形である。
⑤ BEが実線のとき
　△ABEが実線の三角形である。
⑥ CEが実線のとき
　△ACEが実線の三角形である。
⑦ BC, CD, BDが点線のとき
　△BCDが点線の三角形である。
⑧ BC, CE, BEが点線のとき
　△BCEが点線の三角形である。
⑨ CD, DE, CEが点線のとき
　△CDEが点線の三角形である。
⑩ BD, DE, BEが点線のとき
　△BCDが点線の三角形である。

いずれにせよ、実線の三角形か、点線の三角形かどちらかができる。　(Q. E. D.)

３．２　握手の定理

グラフの次数について、次の定理が知られている。

定理 2 (握手の定理)

任意のグラフにおいて、各頂点の次数の総和は辺の本数の 2 倍に等しい。

この定理を証明する前に接続行列について説明しておく。

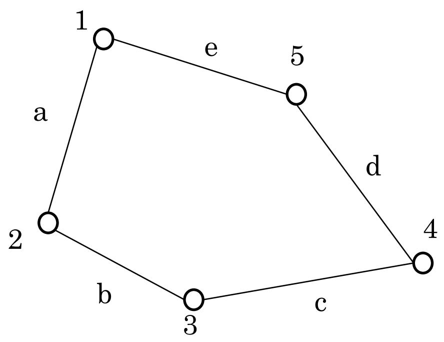

図3

図３のようなグラフ G について考える。頂点 n 個、辺 m 本のグラフに対する**接続行列**は $n \times m$ 行列である。各行は頂点、各列は辺に対応している。p 番目の頂点と q 番目の辺が接続しているとき、接続行列の (p, q) 成分は 1 であり、接続していないとき、(p, q) 成分は 0 である。下の行列は図３のグラフ G に対する接続行列である。

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(証明 1)

頂点 u と v をつないだとき、u の次数は＋1 されて、v の次数も＋1 される。つまり、辺 1 本につき次数は＋2 になる。グラフの辺の本数を k 本とすると、全頂点の次数の合計は $2k$ となる。　(Q. E. D.)

(証明 2)

接続行列の各列の総数はその辺と接続している頂点の次数の総数である。よって接続行列の 1 の総数は全頂点の次数の和である。各列の次数の和は必ず 2 なので、グラフの辺の本数を k 本とすると全頂点の次数の合計は $2k$ となる。　(Q. E. D.)

３．３　五色定理

グラフ理論の応用として、地図の塗り分け問題が挙げられる。地図の塗り分けについては、次の「五色定理」がある。

定理 3 (五色定理)

どのような地図でも五色あれば塗り分けることができる。

この五色定理を、グラフ理論を用いて証明しよう。まず、次の補題を準備する。n 色を用意すれば、グラフのどの辺の両端点も異なる色になるように頂点を塗ることができるとき、このグラフは **n 彩色可能**であるという。

命題

平面グラフは 5 彩色可能である。

(証明)

数学的帰納法で示す。平面グラフ G の頂点の数、辺の数、面の数をそれぞれ、V, E, F とする。

$V=1$ のときは自明である。$V=k$ のとき 5 彩色可能であると仮定し、$V=k+1$ のとき、G が 5 彩色可能であることを証明する。

まず、次の補題から証明する。

<u>補題</u>

平面グラフには、次数 5 以下の頂点が必ず存在する。

(補題の証明 1)

平面グラフのすべての頂点の次数が 6 以上であると仮定する。またグラフは連結していると仮定する。それぞれの頂点に辺が 6 本以上連結しているので、

$$6V \leqq 2E \quad \cdots ①$$ となる。

$E=1$のときは自明である。以下は辺の数が 2 以上のものだとする。それぞれの面は 3 本以上の辺を境界としてもち、1 本の辺は 2 つの面の境界になり得るため、

$$3F \leqq 2E \quad \cdots ②$$

①, ②より、$V-E+F \leqq \frac{1}{3}E-E+\frac{2}{3}E=0$

となるが、オイラーの多面体定理より、(左辺)＝2 であり矛盾する。よって背理法より、補題は証明された。 (Q. E. D.)

(補題の証明 2)

上述の補題の証明 1 より、$3F \leqq 2E \quad \cdots$ (*) は成り立つ。また、オイラーの多面体定理より、$V+F=E+2 \quad \cdots$(†)

(*), (†)から

$$3V \geqq E+6 \quad \cdots (‡)$$

が得られる。また、各頂点の次数の総和をDと置くと、握手の定理(定理 2)より、$D=2E$を(‡)に代入して、$\frac{D}{2}+6 \leqq 3V$

となるので、 $\frac{D}{V} \leqq 6-\frac{12}{V}<6$.

これより、次数の平均が 6 未満であることがわかる。平均以下の次数は必ず存在し、次数は整数であることから、平面グラフには次数 5 以下の頂点が必ず存在する。

(Q. E. D.)

(定理 3 の証明)

頂点数 5 以下の平面グラフについて命題が成り立つことは自明である。頂点数k以下のすべての平面グラフに対して五色定理が成り立っていると仮定する。$k+1$個の頂点をもつ任意の平面グラフをGとして、Gが 5 彩色可能であることを示す。

Gには、補題より次数 5 以下の頂点が存在する。Gの最小次数の頂点をvとする。このとき、$d(v) \leqq 5$となる。Gからvとそれに接続する辺を除いたグラフをG'とする。G'は頂点数kの平面グラフなので、仮定よりG'は 5 彩色可能である。

$d(v) \leqq 4$のとき、vと接続している頂点を塗り分ける色の数は 4 以下なのでvは残った色で塗ることができる。

$d(v)=5$のとき、vに接続している頂点を塗り分けている色の数が 4 以下ならvは残った色で塗ることができる。

$d(v)=5$であり、vに接続している頂点を塗り分けている色が 5 色であるの場合(図 4 参照)を考える。

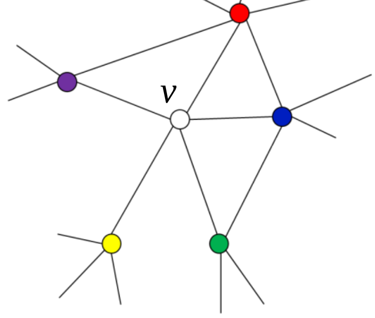

図 4

このとき、2パターンの場合が考えられる。5つの頂点をv_1, v_2, v_3, v_4, v_5とおく。また、v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 の各頂のそれぞれに、c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 の色を塗るとする。さらに、v_1からc_1とc_3を交互に塗っていた頂点の集合を$\tilde{V}$とする。

［パターン１］

v_3が$\tilde{V}$に含まれていない場合

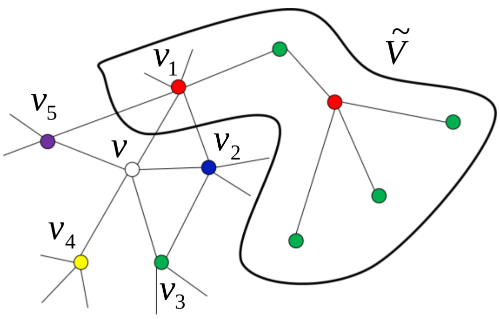

図5

この場合、$\tilde{V}$の中のc_1とc_3の色を交換すれば条件を変えずにv_1, v_2, v_3, v_4, v_5を4色で塗り分けることができる。よって、残った色c_1でvを塗ることができる。

［パターン 2］

v_3が$\tilde{V}$に含まれている場合

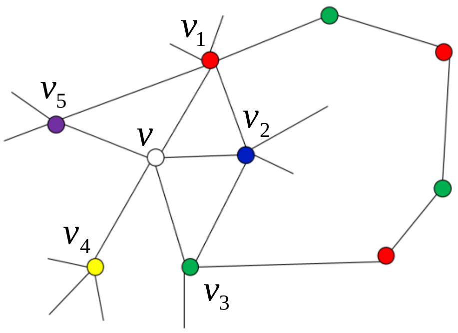

図6

v_1とv_3を結ぶ辺と頂点の集合は存在する。一方、グラフGは平面グラフなので、v_2とv_4を結ぶ辺と頂点の集合は存在しない。この場合は［パターン１］と同様に考える。ここでv_2からc_2とc_4を交互に頂点を塗っていった頂点の集合を$\hat{V}$とする。

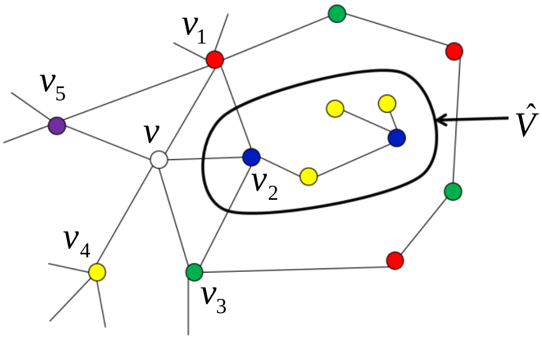

図7

このとき、$\hat{V}$の中のc_2とc_4の色を交換すれば条件を変えずにv_1, v_2, v_3, v_4, v_5を4色で塗り分けることができる。よって、残った色c_2をvに塗ることができる。

これらより平面グラフは5彩色可能とわかる。　(Q. E. D.)

３．４　道色分け問題

グラフ理論の応用例として、「道色分け問題」という以下の問題がある。

「道色分け問題」とは、例えば図８のような黄色がゴール地点とする地図があるとする。このとき、スタート地点がどの場所であっても青－赤－赤－青－赤－赤という順に進めば必ず黄色のゴール地点に到着できることを示せ(ただし、途中でゴールに到着してもよい)という問題である。

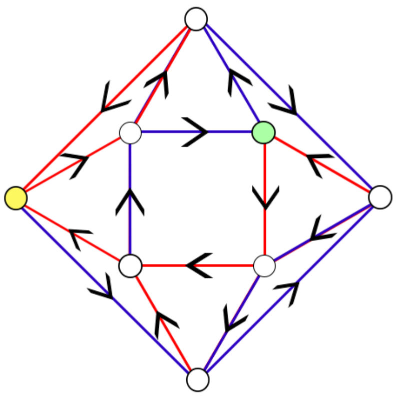

図８

いくつかの例を試してみる。まず、このグラフの頂点を下図のようにする。

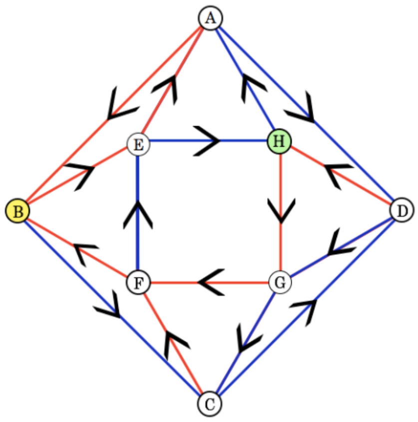

図9

今回のゴール地点を B として、スタート地点によって場合分けをする。

① A の場合

A－D－H－G－C－F－B

(青－赤－赤－青－赤－赤)

② C の場合

C－D－H－G－C－F－B

(青－赤－赤－青－赤－赤)

③ D の場合

D－G－F－B （青－赤－赤）

④ E の場合

E－H－G－F－E－A－B

(青－赤－赤－青－赤－赤)

⑤F の場合

F－E－A－B （青－赤－赤）

⑥ G の場合

G－C－F－B （青－赤－赤）

⑦ H の場合

H－A－B （青－赤）

以上のように、ゴール地点を B にしたとき、どこをスタート地点にしても青－赤－赤の順に進めばゴール地点に到着することがわかる。

４．今後の展望

今回の研究でグラフ理論を利用することで彩色問題のような問題を今までとは違った方向から考えられることがわかった。今回、五彩色問題の証明を行ったので次回はグラフ理論を利用して四色問題を考えてみようと思う。このとき「平面グラフには次数 4 以下の頂点が必ず存在する」ということを証明すればよい。そしてすべての頂点の次数が 5 以上のグラフを発見できるのかについても探究してみたい。また、道色分け問題の証明にも再挑戦しようと思う。

５．参考文献

[1] 「グラフ理論入門―基本とアルゴリズム」、宮崎修一、森山出版(2015)

[2] 「高校数学の美しい物語」
http://mathtrain.jp

[3] 「Wolfram Math World」
http://mathworld.wolfram.com/RoadColoringProblem.html

６．謝辞

今回の研究にあたり、ご指導下さいました顧問の川口先生ありがとうございました。