

多数の集合を表示するベン図について

4年A組 多賀 眞
4年B組 岡田 尚樹
4年C組 大野 華子
指導教員 川口 慎二

1. 要約

サイエンス研究会4年生は様々な研究を行っている。私たちは多数の集合のベン図について研究しており、今回は4個から6個の集合についてどちらも2種類ずつのベン図を考察し、一般化を目指した。

キーワード 虹型ベン図、星型ベン図、部分集合

2. 研究の背景と目的

私たちは、授業で4個の集合のベン図を扱ったのをきっかけに多数の集合のベン図に興味を持ち、研究テーマとした。

6個以上の集合のベン図についてはまだ明らかになっていない部分もあり、今回は、5個までの集合についてまとめた後、6個以上についても考察した。

■部分集合

一般的に集合Aと集合Bの共通部分を「 $A \cap B$ 」と表記するが、今回は単純化して「 AB 」と表すことにする。また3個以上の集合、例えば集合A、集合B、集合Cについて、「 AB 」は $(A \cap B) \cap \bar{C}$ 、つまりAとBのみが重なっている部分を表すものとする。

3. 研究内容

3. 1 基本事項

■虹型ベン図・星型ベン図

先行研究などから、多数の集合のベン図の形は大きく分けて、2種類に分けられる。よってその形から一つを「虹型ベン図」、他方を「星型ベン図」と呼ぶことにした。本研究では星型ベン図において、各々の集合を表す形が合同であり、他の集合との交わり方が同じ集合は、同じ形で表すことを原則とした。

3. 2 4個の集合

■虹型ベン図

虹型ベン図は、3個の集合のベン図(図1)に馬蹄形の4つ目の集合を付け加えたものである(図2)。

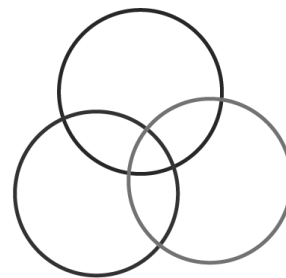


図1

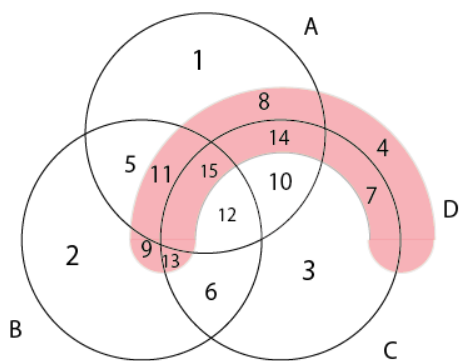


図 2

1	A	2	B	3	C
4	D	5	AB	6	BC
7	CD	8	AD	9	BD
10	AC	11	ABD	12	ABC
13	BCD	14	ACD	15	ABCD

■星形ベン図

正円では平面上を 16 の領域に分けることはできないので楕円を用いてベン図を作成する。楕円を用いた 4 個の集合のベン図としては、図 3 が一般的だが、3.1 の原則に基づいて、図 3 のベン図は今回の研究において対象とはせず、図 4 および図 5 を考案した。



図 3

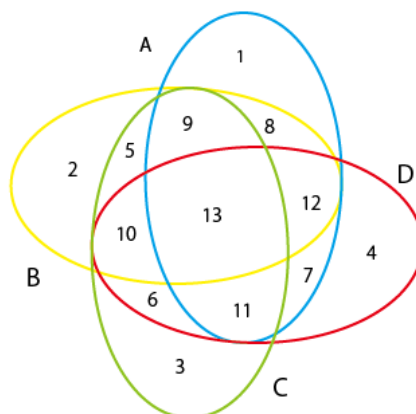


図 4

1	A	2	B	3	C
4	D	5	BC	6	CD
7	AD	8	AB	9	ABC
10	BCD	11	ACD	12	ABD
13	ABCD		AC		BD

図 4 では、AC と BD を表せない。そこで、修正を図り、図 5 を考案した。

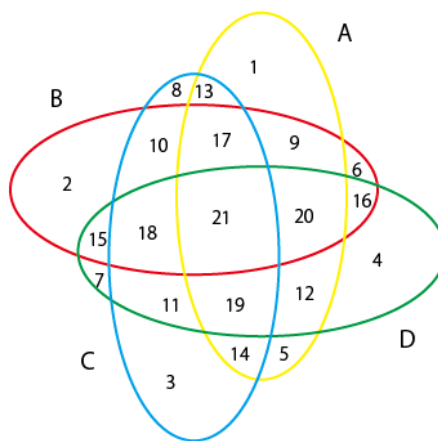


図 5

この図 5 ではすべての部分集合を表すことができるが、下表の色をついたの部分集合が重複している。これは、望ましくない

と考えたが、これ以上に適したベン図を考案することができなかつたので、先に5個以上の集合について考えることにした。図5の各部分集合は以下ようになる。

1	A	2	B	3	C
4	D	5	A	6	B
7	D	8	C	9	AB
10	BC	11	CD	12	AD
13	AC	14	AC	15	BD
16	BD	17	ABC	18	BCD
19	ACD	20	ABD	21	ABCD

3. 3 5個の集合

■虹型ベン図

5個のベン図についても部分集合を正確に表すことができるかを検証した。その結果を図6に示す。

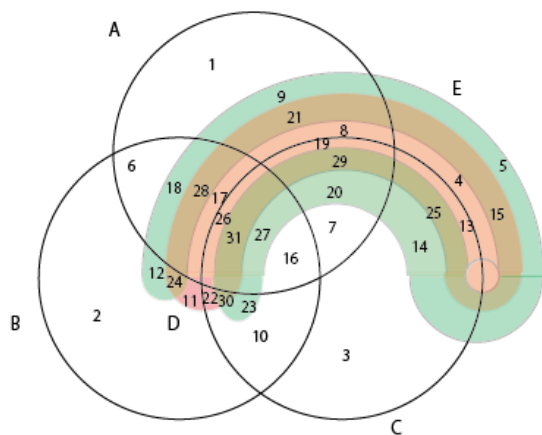


図6

1	A	2	B	3	C
4	D	5	E	6	AB
7	AC	8	AD	9	AE
10	BC	11	BD	12	BE
13	CD	14	CE	15	DE
16	ABC	17	ABD	18	ABE

19	ACD	20	ACE	21	ADE
22	BCD	23	BCE	24	BDE
25	CDE	26	ABCD	27	ABCE
28	ABDE	29	ACDE	30	BCDE
31	ABCDE				

■星形ベン図

4個の場合と同じく、3. 1節で説明した原則を踏まえ、ベン図を考えた(図7)。

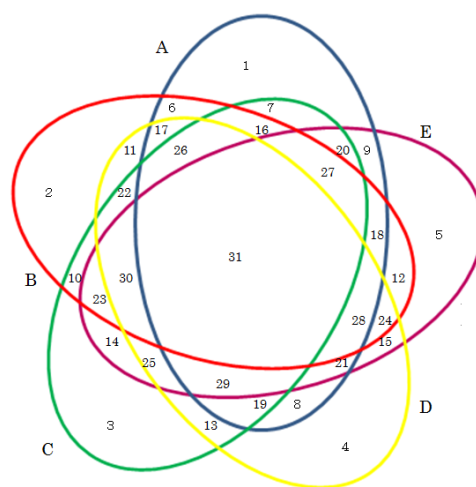


図7

1	A	2	B	3	C
4	D	5	E	6	AB
7	AC	8	AD	9	AE
10	BC	11	BD	12	BE
13	CD	14	CE	15	DE
16	ABC	17	ABD	18	ABE
19	ACD	20	ACE	21	ADE
22	BCD	23	BCE	24	BDE
25	CDE	26	ABCD	27	ABCE
28	ABDE	29	ACDE	30	BCDE
31	ABCDE				

集合の個数が5個の場合、どちらのベン図も成立する。

3. 4 6個の集合

■虹型ベン図

6個の集合のベン図についても考えた。その結果を次頁の図8に示す。図8において数字と部分集合の対応は以下の通りである。

1	A	2	B	3	C
4	D	5	E	6	F
7	AB	8	AC	9	AD
10	AE	11	AF	12	BC
13	BD	14	BE	15	BF
16	CD	17	CE	18	CF
19	DE	20	DF	21	EF
22	ABC	23	ABD	24	ABE
25	ABF	26	ACD	27	ACE
28	ACF	29	ADE	30	ADF
31	AEF	32	BCD	33	BCE
34	BCF	35	BDE	36	BDF
37	BEF	38	CDE	39	CDF
40	CEF	41	DEF	42	ABCD
43	ABCE	44	ABCF	45	ABDE
46	ABDF	47	ABEF	48	ACDE
49	ACDF	50	ACEF	51	ADEF
52	BCDE	53	BCDF	54	BCEF
55	BDEF	56	CDEF		
57	ABCDE				
58	ABCDF				
59	ABCEF				
60	ABDEF				
61	ACDEF				
62	BCDEF				
63	ABCDEF				

よって、このベン図は正しい。

■星型ベン図

6個の星型ベン図を考案した。しかし、3.1節の原則を満たしたベン図を見つけることができなかったので、途中経過として、現在判明している最適の状態のものを次頁の図9に示す。図9において数字と部分集合の対応は以下の通りである。

1	A	2	B	3	C
4	D	5	E	6	F
7	AB	8	AC	9	AD
10	AD	11	AE	12	AF
13	BC	14	BD	15	BE
16	BE	17	BF	18	CD
19	CE	20	CF	21	CF
22	DE	23	DF	24	EF
25	ABC	26	ABD	27	ABE
28	ABF	29	ACD	30	ACF
31	ADE	32	ADF	33	AEF
34	BCD	35	BCE	36	BCF
37	BDE	38	BEF	39	CDE
40	CDF	41	CEF	42	DEF
43	ABCD	44	ABCF	45	ABEF
46	ADEF	47	BCDE	48	CDEF
49	ABCDE				
50	ABCDF				
51	ABCEF				
52	ABDEF				
53	ACDEF				
54	BCDEF				
55	ABCDEF				

この表において、色のついた部分集合が重複していて、ACE, BDF, ABCE, ABDE, ABDF, ACDE, ACDF, BCDF, BCEF,

BDEF の部分集合が表せていない。

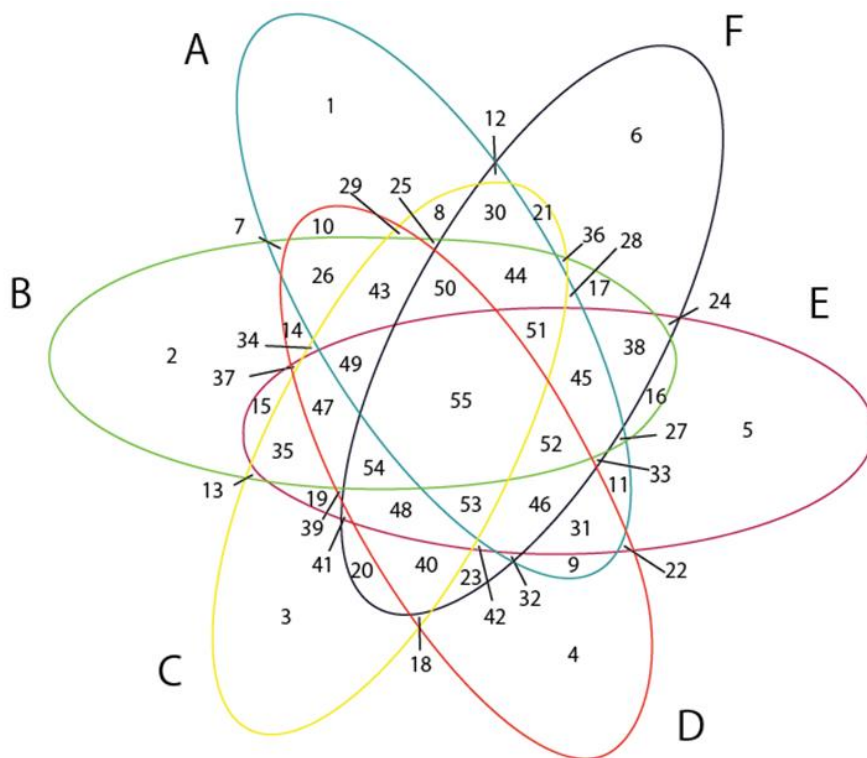


図 8

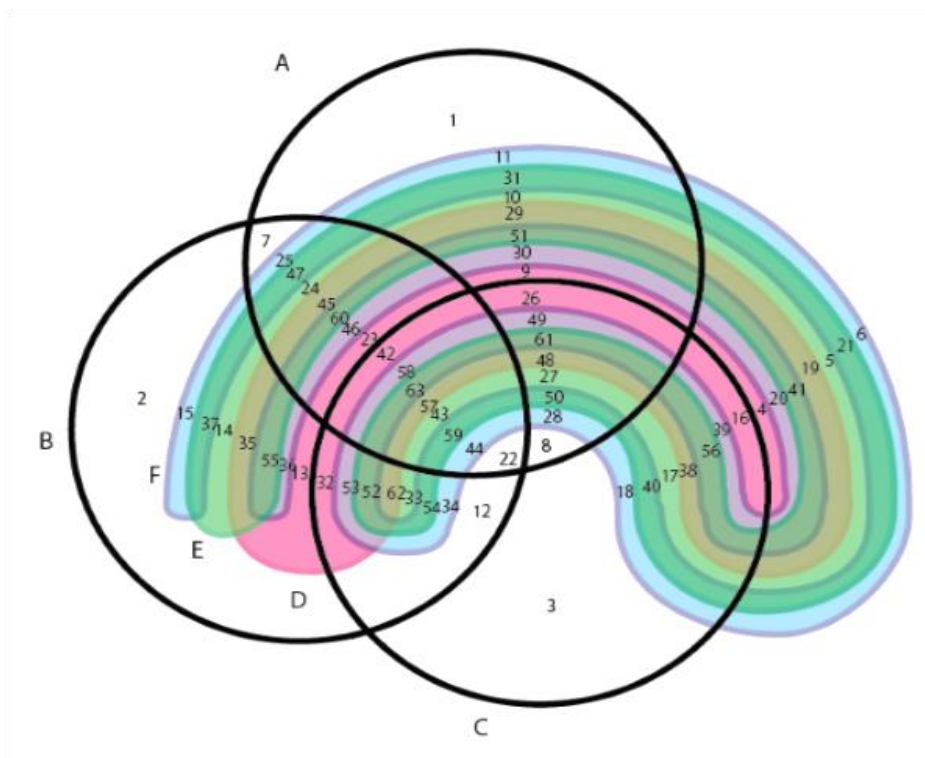


図 9

4. 考察

4. 1 虹型ベン図について

今回、4個から6個の場合について、虹型では部分集合を正確に表せるベン図を考案することができた。そこで、次の仮説を考えた。

仮説1

虹型ベン図はどのような個数の集合でもその関係を正確に表すことができる。

4. 2 星型ベン図について

星型の4個の集合と6個の集合の場合において、適切なベン図を考案することができなかった。ただ、4個と6個の星型ベン図で表せなかった部分集合を見てみると、対称の位置にある集合が組み合わさるものが多かった。例えば、4個の場合のACやBD、6個の場合のACEやABDEなどである。また、正対称にある集合が存在しない5個の集合については適切なベン図を考案することができたことから、以下の仮説を考えた。

仮説2

3.1節の原則を満たす星型ベン図は奇数個の集合のときのみ成立する。

5. 今後の展望

本研究の最終目標は、多数の集合のベン図を一般化させることである。まず、上述の仮説1と仮説2の証明を試みたい。

また本稿では、星型ベン図に3.1節のような制約をつけたが、この制約をどこまで緩めると、適切なベン図を考案できるのかを考えたい。加えて、ベン図を平面上では

なく、立体でも考えていきたい。

6. 謝辞

今回の研究にあたり、ご指導くださった顧問の川口先生、作図について助言をくださいました長谷先生、ありがとうございました。また、サイエンス研究会のみなさんにもご協力いただきました。この場を借りて御礼申し上げます。