数学オリンピック模擬問題の作成

4 年 A 組　古宮　昌典
4 年 B 組　小椋　晃一
4 年 B 組　林　建吾
4 年 B 組　松川　賢太朗
4 年 C 組　今中　翔哉
指導教員　川口　慎二

１．要約

サイエンス研究会数学班 4 年生は、合同で数学の問題作成について研究している。今回は、数学オリンピックの問題を模範として、それに類似した問題を作成することを目標とした。

キーワード　　数学オリンピック、模擬問題、作問、問題の構造

２．研究の背景と目的

普段、数学の問題に触れるとき、それは「数学の問題を解く」という形が多いが、ただ問題を解き、答えを導くだけでは、問題の本質やそれに基づいた新たな数学的発見が見えてこない。そこで、逆に「数学の問題を作成する」という新たな視点の導入により、数学の問題の構造をひもとくことにした。

３．研究内容

３－１．数論

数学オリンピックの数論の問題は、合同式を用いることで解決できる場合が多い。そこで,7 を法とする剰余を考えることで、次の問題を作成することができた。

<u>問題 1</u>

次の方程式を満たす整数 x, y, z は存在するか。

$$x^6+y^5+x^4+y^3+x^2+y=(z^3+1)^3+1$$

$\boxed{\text{解答}}$

問の式を満たす x, y, z は存在しないことを示す。以下、7 を法として考える。$x\equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ のそれぞれについて、整数 x^2, x^4, x^6 を 7 で割った余りを以下の表に示す。

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	2	2	4	1
x^4	0	1	2	4	4	2	1
x^6	0	1	1	1	1	1	1

この表から、$x^6+x^4+x^2$ を 7 で割った余りとしてあり得るのは、0 か 3 である。同様にして、$y+y^3+y^5$ を 7 で割った余り

としてありうるのは0か3か4である。

y	0	1	2	3	4	5	6
y^3	0	1	1	6	1	6	6
y^5	0	1	4	5	2	3	6

ゆえに、問題の式の左辺を7で割った余りとしてありうる値は0か3か4か6である。また、yに関する剰余の表から、整数zについて、z^3を7で割った余りは0, 1, 6のいずれかであるから、$(z^3+1)^3+1$ を7で割った余りとしてとりうる値は2のみである。以上から、任意の整数x, y, zにおいて、左辺と右辺をそれぞれ7で割った余りは異なるので、方程式を満たすx, y, zは存在しないことが示された。　　(終)

この問題において重要となる「7を法とする」ということは問題文中に記されているわけではないので、この7という数字は解答する側が自ら発見しなければならない。このように、問題文中に示されていないが、解答にたどり着くうえで重要となる鍵を探すのが難しい問題が、数学オリンピックなどでよく見受けられる。しかし、問題の中にヒントが隠されている場合も多い。この問題では、「左辺が6次式である」あるいは「右辺が3次式の組み合わせである」ということから、フェルマーの小定理や、3乗数を7で割った余りとして考えられるのは0か1か6であるという事実を知っていれば、「法を7に設定するとうまくいきそうだ」という発想ができる。

次の問題は、合同式の性質と周期性を利用して作成したものである。

<u>問題2</u>

正の整数nについて、2^{2^n}の下2桁としてありうる値をすべて求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

まず、正の整数mに対して、2^mの下2桁を考える。このとき、100の剰余で考えた数列と同値であるため、以下のような周期性が確認できる。

02→04→08→16→32→64→28→56→12
→24→48→96→92→84→68→36→72
→44→88→76→52→04→08→…

つまり、$m \geqq 2$において、周期20の数列になっていることがわかる。ゆえに、問の下2桁は、2^nを20で割った余りから決定できるので、2^nを20で割った余りとしてありうる値を調べる。20の剰余で考えた数列と同値であるため、以下のような周期性が確認できる。

02→04→08→16→12→04→08→…

以上から下2桁としてありうる値は、上の循環の中の2番目、4番目、8番目、12番目、16番目をみて、04, 16, 36, 56, 96である。　　(終)

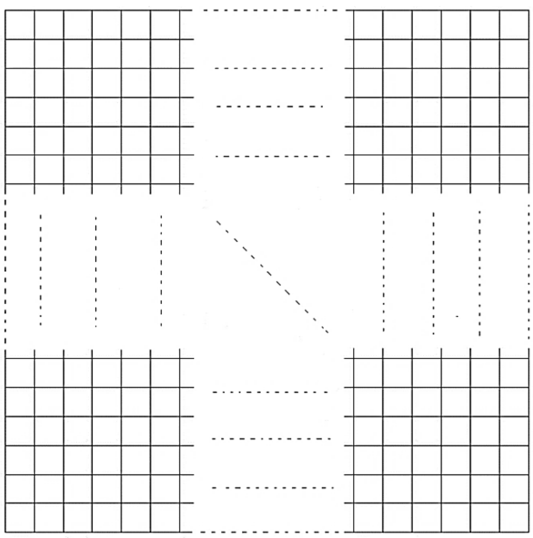
この問題は、2の累乗の下2桁に関するものだが、2以外の2の累乗は4の倍数であるから、2の累乗の下2桁としてありうる値はたかだか26個であるとわかる。よって、2の累乗の下2桁にはそれほど長くない周期があり、そこから解答に近づくことができると考えることができる。また、この解法は、低い位が高い位に支配的であるほど適用しやすい。

３－２．組合せ

数学オリンピックの組合せ問題において、数論、幾何問題ほどは解答の道筋を見出す斬新な発想が要求されない場合が多い。とりわけ、平易な組合せ問題においては、与えられた複雑な情報を的確に組み立て、ひとつずつ忠実に数え上げる処理能力が求められている。そこで、以下の問題を作成した。

<u>問題 3</u>

一辺の長さが 1 の正方形のタイルが下図のように正方形状に並べられている。そして、各タイルの頂点を格子点と呼ぶ。すると、この正方形全体の中にある 2 つの格子点を結んだ線分であって、長さが 3 より小さいものが 4218 本存在するという。このとき、この正方形全体の中にある 2 つの格子点を結んだ線分であって、長さが 2 より大きく、3 より小さいものはいくつあるか。

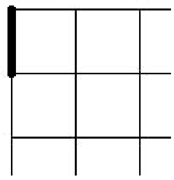


解答

2 つの格子点を結んだ線分であって、長さが 3 より小さいものは、長さが 1, $\sqrt{2}$, 2, $\sqrt{5}$, $2\sqrt{2}$ の 5 種類ある。

タイルが一辺 k 枚ずつ並んでいるとする。このとき、各線分の本数 k を用いて表す。

① 長さが 1 である線分



求める本数は、$k \times k$ の正方形における右図の太線のような線分の本数に等しい。よって、

$$k(k+1)\times 2 = 2k^2 + 2k \text{（本）}.$$

② 長さが $\sqrt{2}$ である線分

求める本数は、正方形全体の中にあるタイルの対角線の本数に等しい。正方形全体の中にあるタイルは、正方形全体の一辺に k 枚ずつ並んでいるので k^2 (枚)ある。各タイルに対角線は 2 本ずつあるから、求める本数は $2k^2$ (本)である。

③長さが 2 である線分

求める本数は、①と同様に考えると、隣り合う 2 枚のタイルからなる長方形の長辺の本数に等しい。よって、

$$\begin{aligned}(k-1)(k+1)\times 2 &= 2(k^2-1)\\ &= 2k^2 - 2 \text{（本）}.\end{aligned}$$

④長さが $\sqrt{5}$ である線分

求める本数は、隣り合う 2 枚のタイルからなる長方形の対角線の本数と等しい。まず、正方形全体の中にある隣り合うタイルは、一辺に k 枚ずつ並んでいるので $k(k-1)$ (枚)ある。したがって、

$$k(k-1)\times 2\times 2 = 4k(k-1) = 4k^2 - 4k \text{（本）}.$$

⑤長さが $2\sqrt{2}$ である線分

求める本数は、

$$\begin{aligned}(k-1)^2\times 2 &= 2(k^2-2k+1)\\ &= 2k^2-4k+2 \text{（本）}\end{aligned}$$

①～⑤より、2 つの格子点を結んだ線分であって、長さが 3 より小さいものは、

$(2k^2+2k)+2k^2+(2k^2-2)$

$\quad +(4k^2-4k)+(2k^2-4k+2)$

$\qquad =12k^2-6k$ (本)と

表せる。これが 4218 本であるから、

$12k^2-6k=4218$．両辺を 6 で割って

$2k^2-k=703$， $k(2k-1)=19\cdot 37$

$k>0$ より $k<2k-1$ であるから、k＝19.

長さが 2 より大きく 3 より小さい線分は、

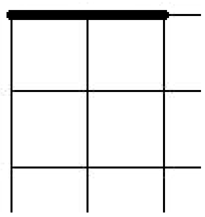
長さが $\sqrt{5}, 2\sqrt{2}$ のものの 2 種類。

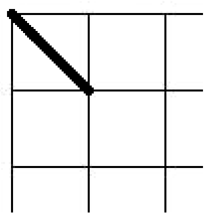
ゆえに、求める本数は長さが $\sqrt{5}, 2\sqrt{2}$ の線分の本数の和であるから、

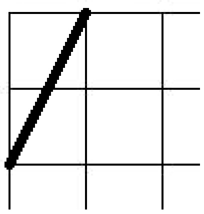
$(4k^2-4k)+(2k^2-4k+2)$

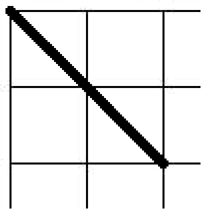
$\quad =6k^2-8k+2=6\cdot 19^2-8\cdot 19+2$

$\quad$＝2016 (本)









次に、色を塗り分ける問題を考える。

色を塗り分ける場合の数を求める問題は、平面を扱ったものが多いが、立体を用いたものは少ない。そこで、以下の問題を作成した。

３－３．幾何

まず、参考文献[1]に記載されていた以下の問題について、考察を行った。

<u>例題 1</u>

正三角形 ABC の内部に点 P があり、PA＝3, PB＝4, PC＝5 が成り立つ。このとき、三角形 ABC の面積を求めよ。

そして、この問題のアイデアを用いて、以下の問題を作成した。

<u>問題 4</u>

正六角形 ABCDEF が描かれてあり、PA＝6, PB＝4, PC＝ $2\sqrt{3}$ を満たす点 P を正六角形内部に取れることがわかっている。あなたはいま、「定規」、「コンパス」、「8 コンパス」、「4 $\sqrt{3}$ コンパス」をもっているが、それぞれ 1 回ずつしか使用することはできない。このとき、点 P を作図せよ。

ただし、「8 コンパス」、「4 $\sqrt{3}$ コンパス」とは、それぞれ半径が 8, 4 $\sqrt{3}$ の円しかかけないコンパスである。

解答

この問題は難問である。宝物を見つけるには、まず、探検のための準備をする必要がある。そして、森の中を探検する。途中で少し休憩をはさむ。さらに森を進んでいき、最後に、対称性を使ってワープすると、宝物のある場所へとたどり着くことができる。

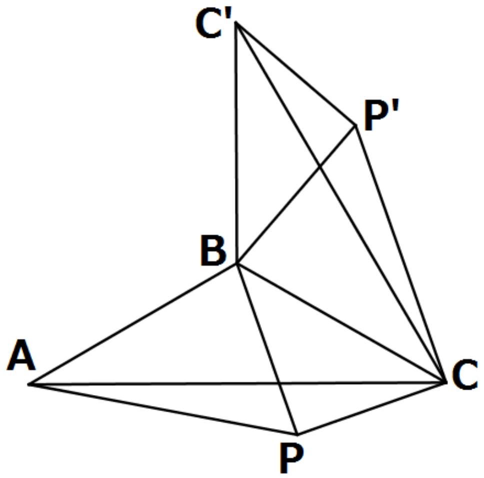
【探検の準備】

ここでは、条件を満たす正六角形の 1 辺の長さを求める。そのために、次の命題を証明する。

［命題 1］　∠APC＝150°である。

(証明)

次図のように、四角形 BACP を、点 B を中心に 120°回転させた図形を考える。このとき、∠ABC＝120°であるから、A が移動した先の点は C である。また、C が移動した先の点を C′, P が移動した先の点を P′ とする。



いま、BP＝BP′, ∠P′BP＝120°であるから、$PP' = 4\sqrt{3}$ がすぐにわかる。ゆえに、△PCP′ において、$(4\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{3})^2 + 6^2$ が成り立つので、∠PCP′＝90°である。よって、

∠ACP＋∠C′CP＝90°－60°＝30°

なので、∠ACP＋∠PAC＝30°を得る。したがって、∠APC＝180°－30°＝150°である。

(Q. E. D.)

命題 1 と余弦定理より、

$$AC^2 = 6^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 6 \cdot 2\sqrt{3}\cos 150^\circ$$

$$= 84$$

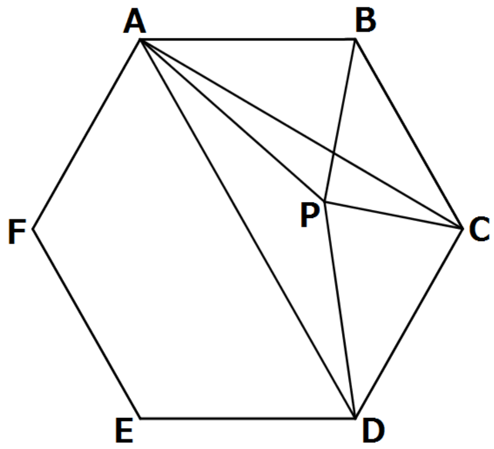
より、AC＝ $2\sqrt{21}$ である。ここで、△ABC は AB＝BC, ∠BCA＝30° の二等辺三角形なので、AB＝BC＝ $2\sqrt{7}$ が得られる。

【探検 1】

次に、PD の長さを調べよう。求め方は 2 通りある。

［求め方 1］

△BCP において $BC^2 = BP^2 + CP^2$ が成り立つので、∠BPC＝90°である。ゆえに、∠APB＝60°であるから、点 P は△ACD の内部に存在することがわかる。



いま、∠APC＝150°, ∠CAD＝30° であるから、

∠PAC＋∠PCA＝30°＝∠DAP＋∠PAC

より、∠PCA＝∠DAP を得る。ここで、AC＝ $2\sqrt{21}$ であるから、余弦定理より、

$$\cos\angle PCA = \frac{(2\sqrt{21})^2 + (2\sqrt{3})^2 - 6^2}{2 \cdot 2\sqrt{21} \cdot 2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{5}{2\sqrt{7}}$$

が得られる。そして、AD＝2×2 $\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$ なので、

$$PD^2 = (4\sqrt{7})^2 + 6^2 - 2 \cdot 4\sqrt{7} \cdot 6 \cdot \frac{5}{2\sqrt{7}}$$

$$= 28$$

したがって、PD＝$2\sqrt{7}$ を得る。

［求め方 2］

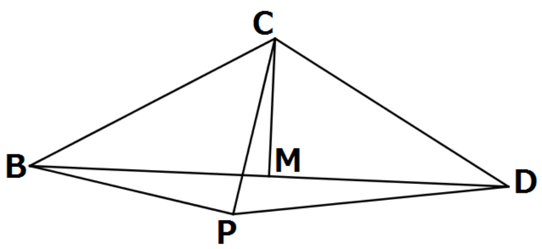
△BCP において $BC^2 = BP^2 + CP^2$ が成り立つので、∠BPC＝90°である。いま、C から線分 BD へ降ろした垂線の足を M とする。△BCD は二等辺三角形であるから、M は線分 BD の中点である。

ここで、余弦定理より、

$$\cos\angle BCP = \frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + \left(2\sqrt{7}\right)^2 - 4^2}{2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{7}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{21}} > \frac{3}{6} = \cos 60°$$

であるから、∠BCP＜60°が成り立つ。



よって、点 P は△BCD の外部にあるので、4 点 B, P, M, C はこの順に同一円周上にある。ゆえに、トレミーの定理より、

BC・PM＋BP・CM＝BM・CP

が成り立つ。いま、BC＝$2\sqrt{7}$ より、CM＝$\sqrt{7}$, BM＝$\sqrt{21}$ であるから、PM＝1 を得る。△BPD において、線分 PM は中線であるから、中線定理より、

$$DP^2 + BP^2 = 2BM^2 + 2PM^2$$

が成り立つので、DP＝$2\sqrt{7}$ が得られる。

【休憩】

ここでは、問題の解答に直結するわけではないが、【探検 1】から得られる点 P の作図方法を 2 つ紹介する。

さきほどの探検から、DP＝$2\sqrt{7}$ が得られた。ここで、正六角形 ABCDEF の外接円の中心を O とすると、△ADP において、線分 OP は中線であるから、中線定理より、

$$2OP^2 + 2OA^2 = PA^2 + PD^2$$

$$2OP^2 + 2\cdot\left(2\sqrt{7}\right)^2 = 6^2 + \left(2\sqrt{7}\right)^2$$

であるから、OP＝2 を得る。よって、P は O を中心とした半径 2 の円周上に存在する。

また、DC＝DP＝DE＝$2\sqrt{7}$ が成り立つので、P は D を中心とし、半径が DC$\left(=2\sqrt{7}\right)$ の円周上に存在する。ここで、もし、半径が 2 の円しかかけない「2 コンパス」と半径が $2\sqrt{7}$ の円しかかけない「$2\sqrt{7}$ コンパス」なるものがあれば、以下の手順で P を作図できる。

(作図法 1)

①A と D を結ぶ直線をかく。

② D を中心とし、半径を DC とした円をかく。

③ ①と②の交点をとる。

④ ③の点を中心とし、半径 2 の円をかく。

⑤ ②と④の BC 側の交点が P である。

実際、この手順で得られた点 P が条件を満たすことは容易に確かめられる。

また、∠APB＝60°であるから、∠AOB＝60°とあわせて、点 P は△AOB の外接円上に存在する。よって、以下のように、定規とコンパスだけで作図可能である。

(作図法 2)

①AC と BF の交点を G とする。

② G を中心とし、半径が GA の円をかく。

③ D を中心とし、半径が DC の円をかく。

④ ②と③の BC 側の交点が P である。

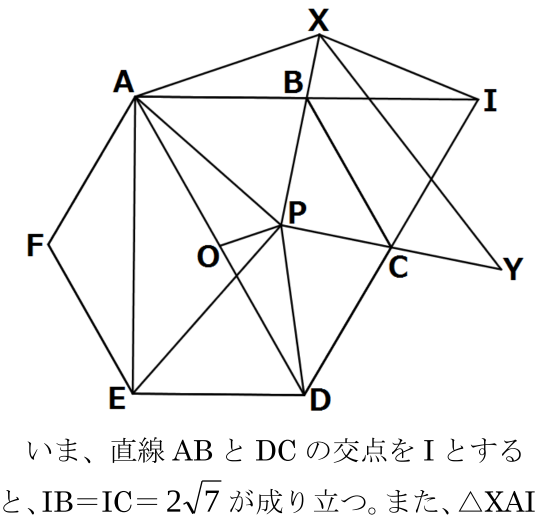
【探検 2】

【探検 1】より、DC＝DP＝DE＝$2\sqrt{7}$ が成り立つので、△CPE の外心は D である。∠CDE＝120°であるから、∠CPE＝120° を得る。よって、

$$\angle APE = 360° - 150° - 120° = 90°$$

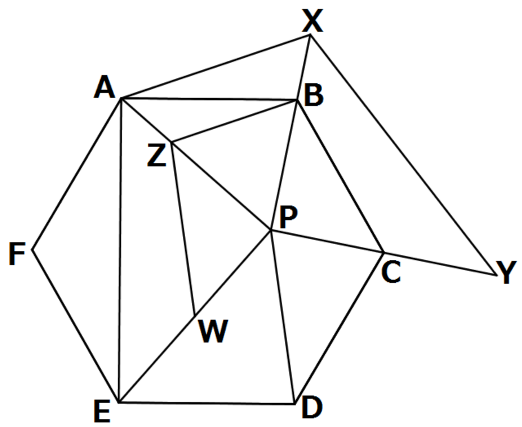
がわかる。ゆえに、∠APE＝∠CPB＝90° である。ここで、【探検 1】の［求め方 1］において用いた∠PAD＝∠PCA より、∠PAE＝∠PCB が得られるので、△CPB ∽ △APE であることがわかる。

よって、4 : PE＝$2\sqrt{3}$: 6 より、PE＝$4\sqrt{3}$ を得る。ここで、∠APB＝60°であるから、直線 PB 上に点 X を、△APX が正三角形となるようにとることができる。このとき、PX＝PA である。また、∠APE＝∠CPB であるから、直線 PC 上に点 Y を、△XPY≡△APE となるようにとることができる。特に、直線 PX に関して A と反対側にある方に Y をとる。すると、PB : PY＝PC : PX ゆえ、PB・PX＝PC・PY が成り立つので、方べきの定理の逆より、四角形 BCYX は円に内接する。



いま、直線 AB と DC の交点を I とすると、IB＝IC＝$2\sqrt{7}$ が成り立つ。また、△XAI と△PAD において、AI＝AD＝$4\sqrt{7}$, AX＝AP, ∠XAI＝60°－∠PAB＝∠PAD が成り立つので、△XAI≡△PAD である。さらに、点 B, O はそれぞれ線分 AI, AD の中点であるから、IB＝DO＝$2\sqrt{7}$ を得る。したがって、I は△XBC の外心であるから、I は四角形 BCYX の外心であり、外接円の半径は $2\sqrt{7}$ である。

【宝物にたどりつく】



線分 AP 上に点 Z を、PZ＝4 となるようにとり、線分 EP 上に点 W を、PW＝$2\sqrt{3}$ をみたすようにとる。このとき、△PZW≡△PBC が成り立つので、四角形 ZWEA と四角形 BCYX は合同である。このとき、【探検 2】より、四角形 ZWEA の外接円の半径は $2\sqrt{7}$ に等しい。いま、四角形 ZWEA の外心を T とすると、T は線分 AE の垂直二等分線上にあり、TA＝TE＝$2\sqrt{7}$ をみたす。ゆえに、T＝F であるから、Z は F を中心とし、半径が FA$\left(=2\sqrt{7}\right)$の円周上にある。また、PZ＝4, PE＝$4\sqrt{3}$, ∠APE＝90°より、EZ＝8 を得る。さらに、P が D を中心とし、半径が DC の円周上にあることと合わせて、以下の順に作図すればよい。

(作図法 3)

① F を中心とし、半径 FA の円をかく。

② E を中心とし、半径 8 の円をかく。

③ ①と②の交点のうち、正六角形の内部にある方を Z とする。

④ Z と A を通る直線をひく。

⑤ 点 E を中心とし、半径 $4\sqrt{3}$ の円をかく。

⑥ ④と⑤の接点が P である。

実際、この手順で得られた点 P が条件を満たすことは容易に確かめられる。

この問題は、求められる辺の長さ、角度の大きさなどをできるだけ多く計算し、そこから解答に結びつきそうな情報を取り出して、うまく処理していく必要がある。

さて、森の全体像が見えたところで、他にも作図法がないか考えてみよう。以下に、定規、コンパスなどの道具の使用回数が少ない作図法を紹介する。証明は探検で得られたアイテムを用いれば容易である。

(作図法 4)

① D を中心とし、半径が DC の円をかく。

② CF と AE の交点を Q とする。

③ Q を中心とし、半径が QA の円をかく。

④ ①と④の交点のうち、E でないほうが P である。

(作図法 5)

① F を中心とし、半径が FA の円をかく。

② A を中心とし、半径 2 の円をかく。

③ ①と②の交点のうち、正六角形の内部にある方を Z とする。

④ Z と A を通る直線をひく。

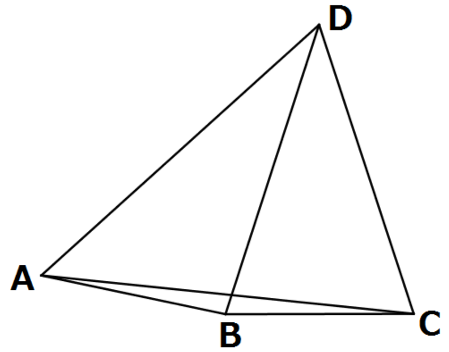
⑤ D を中心とし、半径が DC の円をかく。

⑥ ④と⑤の交点のうち、正六角形の内部にある方が P である。　(終)

次に、角度の問題について考察した。角度を求める問題は、主に算数オリンピックなどでよく出題される。以下の問題を参考にして、問を作成した。

<ins>例題 2</ins>

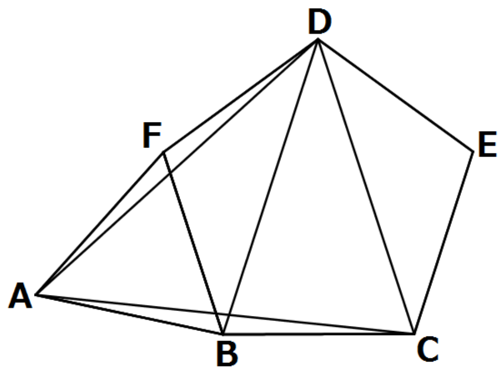
以下の図において、AC＝AD, DB＝DC, ∠BDC＝36°, ∠ADB＝30°, ∠BCA＝6°をみたすとき、∠BAC の大きさを求めよ。



$\boxed{\text{解答}}$

次の図は、正五角形と正三角形をつなげたものである。このとき、AC＝AD, DB＝DC,∠BDC＝36°,∠ADB＝30°,∠BCA＝6°をみたしている。逆に、問の条件から、四角形 ABCD は 1 つに決まるので、以下の図において∠BAC の大きさを求められればよく、AB＝BC より、∠BAC＝6°を得る。

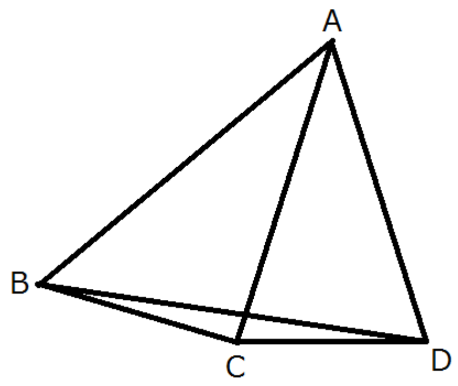
(終)



次の問題は、例題 2 とよく似ているが、解法は上に挙げたものと異なる。

問題 5

以下の図において、AC＝AD, BA＝BD, ∠BAC＝30°,∠BCA=∠BDA＋30°を満たす。このとき、CB＝CD を証明せよ。



解答

下の図のように、△BED が正三角形となるように点 E をとり、△ABC≡△AFD となるように点 F をとる。

∠BCA＝∠FDA,∠BCA＝∠BDA＋30°であるから、∠FDA＝∠BDA＋30°. ゆえに、∠FDB＝30°である。一方、△EBD は正三角形であるから、BA＝BD＝BE. よって、点 B は△DAE の外心である。

円周角の定理より、∠DAE＝30°. ここで、∠DAF＝30°であることから、点 F は線分 AE 上に存在する。また、∠BDF＝30°より、直線 DF は線分 BE の垂直二等分線であるから、∠EBF＝∠BEF. ∠BAF＝x とおく。△BAE は二等辺三角形であるから、∠BEF＝∠BEA＝x. ∠EBF＝∠BEF より、∠EBF＝x. ゆえに、∠BFA＝$2x$.

一方、△ABF は二等辺三角形であるから、∠BFA＝$\dfrac{180^\circ - x}{2}$. したがって、

$2x = \dfrac{180^\circ - x}{2}$ より、$5x = 180^\circ$ なので、$x = 36^\circ$.

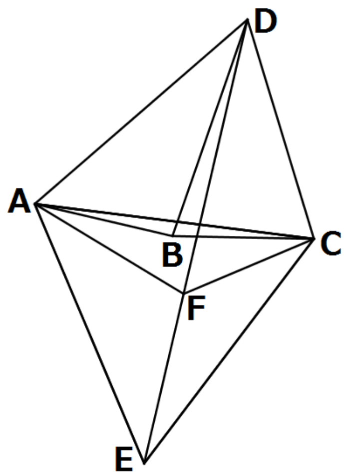
∠BAF＝30°＋∠CAF＝∠CAD であるから、∠CAD＝36°, ∠BDA＝∠BAD＝30°＋36＝66°. ∠CDA＝(180°－36°)÷2＝72°より、∠CDB＝6°.

一方、∠ABD＝180°－66°×2＝48° であるので、円周角の定理より、∠AED＝48°÷2＝24°. ∠EDF＝30°より、

∠ABC＝∠AFD＝24°＋30°＝54°.

ゆえに、∠DBC＝∠ABC－∠ABD＝54°－48°＝6°. したがって、∠CBD＝∠CDB＝6° であるから、CB＝CD が成り立つ。

(Q. E. D.)



ちなみに、この補助線を例題 2 に適応すると、例題 2 の解を得ることができる。この解答の発想も、例題 1 とよく似ている。幾何の問題は、どこでどの定理を使うかが鍵となるため、問題を解くときは、手当たり次第に使えそうな定理を探したり、条件から分かる角度や辺の長さを片っ端から計算したりするのも有効である。

４．今後の課題

今回、数論、組合せ、幾何の 3 分野における考察を行ったが、特に組合せの、突飛な発想を必要とする問題はあまり考察できなかった。組合せの分野に長けた人間がいないことが最大の原因だが、これからは、算数オリンピックなど、小学生の知識だけで解けるようなパズル要素の強い問題についても考えていきたい。

５．参考文献

[1] 平面幾何パーフェクトマスター　めざせ、数学オリンピック、鈴木晋一、日本評論社

[2] 広中杯　ハイレベル中学数学に挑戦－これが中学数学の最高峰、算数オリンピック委員会 監修、青木亮二 解説、講談社

６．謝辞

今回の研究にあたり、ご指導くださいました顧問の川口先生ありがとうございました。