約数の総和についてⅡ

4 年 B 組　小椋　晃一
指導教員　川口　慎二

１．要約

サイエンス研究会数学班 4 年生は約数の総和について学習している。今回は極限を用いた過剰数の評価を目的とした。その過程において、約数の総和に関する考察を行うことができたので紹介する。

キーワード　　過剰数、原始過剰数、メルセンヌ素数、素数

２．研究の背景と目的

約数の総和によって、自然数は 3 種類に分類できる。しかし、異なる自然数の間にも関連があり、その関連を倍数として捉えることができた。今回は、ただ 3 種類に分類するだけでなく、その分類の基準となる値の評価を重視し、昨年の論文[3]を加筆・修正した。

３．研究内容

３．１　定義

ここでは、本稿に用いる諸定義をまとめた。

約数とはその数自身を含めた正の約数のことを指す。また、自然数 n の**約数の総和**を $\sigma(n)$ と表す。例えば、12 の約数の総和は

$$\sigma(12)=1+2+3+4+6+12=28$$

より 28 となる。

また、自然数 n は、

- $\sigma(n)>2n$ となるとき**過剰数**
- $\sigma(n)=2n$ となるとき**完全数**
- $\sigma(n)<2n$ となるとき**不足数**

であるという。例えば、12 は過剰数である。

2^n-1 の形で表される素数を**メルセンヌ素数**という。例えば、3, 7, 31, …などがある。

自然数 n が $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ と素因数分解されるとき、指数の合計

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k$$

を n の**高さ**ということにする。

３．２　基本的な命題

この節では、いくつかの基本的な命題を証明する。

<u>命題 1</u>

p を素数とするとき、 p^α は不足数である。

(証明)

p^α の約数の総和を計算すると、

$$\sigma(p^\alpha)=p^0+p^1+p^2+\cdots+p^\alpha$$
$$=\frac{(p^\alpha-1)}{p-1}+p^\alpha$$

$$\leqq (p^{\alpha}-1)+p^{\alpha}<2p^{\alpha}$$

より、 p^{α} は不足数である。 (Q. E. D.)

命題 2

メルセンヌ素数でない素数は無数に存在する。

(証明)

背理法を用いる。いま、3 を法として議論する。メルセンヌ素数は、

$$2^n-1\equiv(-1)^n-1\equiv 0 \quad \text{または} \quad 1$$

より、3 を法として 2 と合同な素数を考えればよい。$p\equiv 2$ かつ $p\neq 2$ となる素数を有限個しかないと仮定して、順に

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\cdots,\ p_{k-1},\ p_k$$

とする。このとき、

$$3(p_1p_2p_3\cdots p_{k-1}p_k)+2$$

は 3 を法として 2 と合同であり、 p_1, p_2, $p_3,\cdots,\ p_{k-1},\ p_k$ のいずれでも割り切れないので、合成数である。よって、素数 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ を用いて、

$$3(p_1p_2p_3\cdots p_{k-1}p_k)+2=q_1q_2\cdots q_n$$

と表すことができる。ある $1\leqq i\leqq n$ に対して $q_i\equiv 0$ となるとき、必然的に $q_i=3$ となるが、$3(p_1p_2p_3\cdots p_{k-1}p_k)+2$ は 3 の倍数ではない。

また、ある $l\ (1\leqq l\leqq n)$ に対して $q_l\equiv 2$ となるとき、$q_l\neq 2$ より、$1\leqq m\leqq k$ となる整数 m を用いて、$q_l=p_m$ となる。条件より、q_l で $3(p_1p_2p_3\cdots p_{k-1}p_k)+2$ を割り切れるが、p_m で割り切れないので矛盾する。

よって、すべての $1\leqq j\leqq k$ について、$q_j\equiv 1$ とかける。すると、

$$3(p_1p_2p_3\cdots p_{k-1}p_k)+2\equiv 2$$

に対して、$q_1q_2\cdots q_n\equiv 1^n=1$ となり、矛盾している。

したがって、メルセンヌ素数でない素数は無数に存在する。 (Q. E. D.)

命題 3

自然数 n が $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ と素因数分解されるとき、

$$\sigma(n)=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\times\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\times\frac{p_3^{\alpha_3+1}-1}{p_3-1}\times\cdots\times\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}$$

(証明)

一般に、$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ の約数は次の式を展開したときの各項に現れる。

$$(1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{\alpha_1})\times(1+p_2+p_2^2+\cdots+p_2^{\alpha_2})\times\cdots\times(1+p_k+p_k^2+\cdots+p_k^{\alpha_k})$$

ゆえに、

$$\sigma(n)=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\times\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\times\frac{p_3^{\alpha_3+1}-1}{p_3-1}\times\cdots\times\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}$$

という式が得られる。 (Q. E. D.)

なお、自然数 m で表される p_m の指数が 1 のとき、その項は p_m+1 となる。

命題 4

m,n を互いに素な自然数とするとき、

$$\sigma(mn)=\sigma(m)\sigma(n)\,.$$

(証明)

m, n がそれぞれ

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha 2} p_3^{\alpha_3} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

$$n = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta 2} q_3^{\beta_3} \cdots q_l^{\beta_l}$$

と素因数分解できるとする。

m, n は互いに素であるから、p_i, q_j はすべて相異なるため、命題 3 を用いると、

$$\sigma(mn) = \left(\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \times \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \times \cdots \times \frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1} \right) \times \left(\frac{q_1^{\beta_1+1}-1}{q_1-1} \frac{q_2^{\beta_2+1}-1}{q_2-1} \cdots \frac{q_l^{\beta_l+1}-1}{q_l-1} \right) = \sigma(m)\sigma(n).$$

(Q. E. D.)

この命題 4 は自然数の個数を増やしても同様のことがいえる。

<u>命題 5</u>

(1) 完全数の倍数は過剰数である。

(2) 過剰数の倍数は過剰数である。

(証明)

(1) 完全数を n とおき、その約数を昇順で $n_1, n_2, n_3, \cdots, n_{m-1}, n_m$ と表す。そして、完全数の倍数を kn とする。このとき、

$$\sigma(n) = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_{m-1} + n_m.$$

kn の約数に 1 が含まれているのは自明であるから、$k \neq 1$ より、

$$\sigma(kn) \geqq 1 + kn_1 + kn_2 + \cdots + kn_m > k\sigma(n)$$

なので、$\sigma(kn) > k\sigma(n) = 2kn$.

(2)も同様の手段で示すことができる。

(Q. E. D.)

<u>命題 6</u>

不足数の約数は不足数である。

(証明)

不足数の約数に完全数があるとすると、不足数は完全数の倍数となるが、命題 5 に反する。過剰数についても同様のことがいえる。そのため、不足数の約数は完全数でも過剰数でもない。つまり、不足数である。

(Q. E. D.)

３．３　偶数の原始過剰数

ここで命題 5 から、他の過剰数の倍数でなく、他の完全数の倍数でもない過剰数を考えようと思い至った。そのような数を**原始過剰数**と定義する。例えば、20, 70, 88, … などが相当する。過剰数は、原始過剰数と完全数の倍数のみから構成される。このとき、以下の定理が得られた。

<u>補題</u>

自然数 n が $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ と素因数分解されるとき、n が過剰数であり、すべての $1 \leqq i \leqq k$ について

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i - 1} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

が不足数ならば、n は原始過剰数である。

(証明)

「他の過剰数の倍数でなく、他の完全数の倍数でもない」とは、「自身を除く約数はすべて過剰数でも完全数でもない」ということであり、過剰数でも完全数でもない数は

不足数なので、「自身を除く約数はすべて不足数である」と言い換えられる。これを満たす過剰数が、原始過剰数である。

命題 6 より、「自身を除く n のすべての約数が、ある $1 \leqq i \leqq k$ に対して、

$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i - 1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ の約数である」…(*)が示されればよい。

ここで、n の高さを $x+1$ とする。「高さ 1 の約数」は「高さ 2 の約数のいずれか」の約数である。同様に、すべての $1 \leqq j \leqq x$ について、「高さ $j-1$ の約数」は「高さ j の約数のいずれか」の約数である。

n の約数の約数もまた、n の約数ということも併せて考えると、「高さ j の約数は高さ x の約数のいずれかの約数」…(†)である。

「高さ j の約数」は、「自身を除く約数」の任意の 1 つであり、「高さ x の約数」とは、

$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i - 1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ $(1 \leqq i \leqq k)$のいずれかのことであるから、(†)より、「自身を除くすべての n の約数は、ある $1 \leqq i \leqq k$ について、$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i - 1} p_k^{\alpha_k}$ の約数」であり、(*)が示されたため、題意は示された。

(Q. E. D.)

命題 7－1 から命題 7－3 では、この補題に沿った証明を行う。

<u>命題 7－1</u>

偶数の原始過剰数は無数に存在する。

(証明)

p を素数として、$2^n p$ の形に素因数分解できる数を考える。

このとき、$2^n < p < 2^{n+1} - 1$ を満たすように素数 p をとると、

$$p = 2^{n+1} - m = 2^n + k$$

（m, k は自然数であり、$m > 1, k > 0$）と表せる。ここで、命題 3 を用いて

$$\begin{aligned}\sigma(2^n p) &= \frac{2^{n+1}-1}{2-1} \times \frac{p^2-1}{p-1} \\ &= (2^{n+1}-1)\frac{(p+1)(p-1)}{p-1} \\ &= (2^{n+1}-1)(p+1) \\ &= 2^{n+1} p + 2^{n+1} - p - 1 \\ &= 2^{n+1} p + 2^{n+1} - (2^{n+1} - m) - 1 \\ &= 2(2^n p) + (m-1) > 2(2^n p)\end{aligned}$$

より、$2^n p$ が過剰数であることがわかる。

補題より、次の 2 つを満たすことを調べる。

① $2^{n-1} p$ が不足数　　② 2^n が不足数

②は命題 1 から示せるため、①について考える。

$$\begin{aligned}\sigma(2^{n-1} p) &= \frac{2^n-1}{2-1} \times \frac{p^2-1}{p-1} \\ &= (2^n-1)(p+1) \\ &= 2^n p + 2^n - p - 1 \\ &= 2^n p + 2^n - (2^n + k) - 1 \\ &= 2(2^{n-1} p) - (k+1) < 2(2^{n-1} p)\end{aligned}$$

より、$2^{n-1} p$ は不足数となる。

したがって、$2^n p$ は原始過剰数である。なお、p が $p = 2^{n+1} - 1$ とかけるメルセンヌ素数であるとき、$2^n p$ は完全数になるが、命題 2 より、p として当てはまる数は無数に存在するため、$2^n p$ と表せる数は無数に存在する。よって偶数の原始過剰数は無数に存在する。　(Q. E. D.)

また、合成数は素数の倍数なので、命題 5 とあわせると次の命題が自明に成り立つ。

命題7－2

奇数の不足数Dにおいて、$2^n D$が過剰数となるnが存在する。

命題7－3

異なる2つの素数$p,\ q$について、

$$2^{n+1} < q < p < 2^{n+2}$$

が成り立つとき、$2^n pq$は原始過剰数である。

(証明)

条件より、

$$2^{n+1}+3 \leqq p \leqq 2^{n+2}-1$$
$$2^{n+1}+1 \leqq q \leqq 2^{n+2}-3$$

となる。命題3より

$$\begin{aligned}
\sigma(2^n pq) &= \frac{2^{n+1}-1}{2-1} \times \frac{p^2-1}{p-1} \times \frac{q^2-1}{q-1} \\
&= (2^{n+1}-1)(p+1)(q+1) \\
&= 2(2^n pq) + 2^{n+1}(1+p+q) \\
&\qquad -(p+1)(q+1) \\
&= 2(2^n pq) + 2^{n+1}(1+p+q) \\
&\qquad -\frac{p+1}{2} \times (2q+2) \\
&\geqq 2(2^n pq) + 2^{n+1}(1+q+2+q) \\
&\qquad -\frac{p+1}{2} \times (2q+2) \\
&= 2(2^n pq) + 2^{n+1}(2q+3) \\
&\qquad -\frac{p+1}{2} \times (2q+2) \\
&\geqq 2(2^n pq) + 2^{n+1}(2q+3) \\
&\qquad -2^{n+1}(2q+2) \\
&> 2(2^n pq).
\end{aligned}$$

よって、$2^n pq$は過剰数であるとわかる。次に、以下のすべてを満たすことを調べる。

① $2^{n-1} pq$が不足数

② $2^n p$が不足数

③ $2^n q$が不足数

②と③は命題 7－1 の証明における後半の議論から示せるので、①について考える。

$$\begin{aligned}
\sigma(2^{n-1} pq) &= (2^n-1)(p+1)(q+1) \\
&= 2(2^{n-1} pq) + 2^n(1+q+p) \\
&\qquad -(q+1)(p+1) \\
&\leqq 2(2^{n-1} pq) + 2^n(1+q+p) \\
&\qquad -(2^{n+1}+2)(p+1) \\
&= 2(2^{n-1} pq) + 2^n q - 2^n(p+1) - 2(p+1) \\
&= 2(2^{n-1} pq) - 2^n(p+1-q) - 2(p+1) \\
&< 2(2^{n-1} pq)
\end{aligned}$$

より、$2^{n-1} pq$は不足数となる。

よって、$2^n pq$は原始過剰数である。

(Q. E. D.)

なお、異なる3つの素数$p,\ q, r$について、

$$2^{n+2} < q < p < r < 2^{n+3}$$

としたときの$2^n pq$には、不足数が存在した。

補題と類似のものとして、以下のことがいえる。

命題8

自然数nが$p_1 < p_2 < \cdots < p_k$と表せる素数を用いて$p_1 p_2 \cdots p_k$と素因数分解されるとき、nが過剰数であり、$p_1 p_2 \cdots p_{k-1}$が不足数ならば、nは原始過剰数である。

（証明）

$p_1 p_2 \cdots p_{k-1}$が不足数なので、

$$\frac{\sigma(p_1 p_2 \cdots p_{k-1})}{p_1 p_2 \cdots p_{k-1}} = \frac{(p_1+1)}{p_1} \times \frac{(p_2+1)}{p_2} \times \cdots \times \frac{(p_{k-1}+1)}{p_{k-1}} < 2$$

となる。また、すべての$1 \leqq i \leqq k-1$について、

$$\frac{\sigma(p_1 p_2 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_k)}{p_1 p_2 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_k}$$
$$= \frac{\sigma(p_1 p_2 \cdots p_{k-1})}{p_1 p_2 \cdots p_{k-1}} \times \frac{p_k + 1}{p_k} \times \frac{p_i}{p_i + 1}$$
$$= \frac{\sigma(p_1 p_2 \cdots p_{k-1})}{p_1 p_2 \cdots p_{k-1}} \times \frac{p_i p_k + p_i}{p_i p_k + p_k} < 2$$

が成り立つので、高さ $k-1$ の約数がすべて不足数となり、補題から示された。

(Q. E. D.)

３．５　奇数の原始過剰数

奇数の原始過剰数を議論するために、3 つの補題を用意する。

補題 1 ([1])

素数の逆数和は正の無限大に発散する。

一般に、この補題 1 が成り立つ事実が知られており、命題 8 の証明に用いる。

補題 2

どの 2 つも互いに素な奇数の過剰数が無数に存在するとき、奇数の完全数と原始過剰数は無数に存在する。

(証明)

どの 2 つも互いに素な奇数の過剰数を順に $n_1, n_2, n_3, \cdots$ とする。

原始過剰数の定義から、過剰数の約数には原始過剰数または完全数が少なくとも 1 つ存在することがわかる。

ここで、自然数 m に対して、n_m の約数である原始過剰数または完全数のうちの 1 つを n'_m とする。すると完全数と原始過剰数から成る列 $n'_1, n'_2, n'_3, \cdots$ を得る。

$n_1, n_2, n_3, \cdots$ は互いに素であるから、それぞれを素因数分解したときに現れる素因数はすべて相異なる。

ゆえに、$n'_1, n'_2, n'_3, \cdots$ もすべて互いに素である。よって、$n'_1, n'_2, n'_3, \cdots$ は相異なる完全数あるいは原始過剰数といえる。

さらに、奇数の約数は奇数に限られるため、$n'_1, n'_2, n'_3, \cdots$ は奇数の完全数あるいは原始過剰数ともいえる。よって、奇数の完全数あるいは原始過剰数は無数に存在する。

(Q. E. D.)

補題 3

素因数分解したとき、同じ種類の素数が 1 つしかない奇数は、完全数でない。

(証明)

異なる奇素数 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ について

$$\frac{\sigma(p_1 p_2 \cdots p_m)}{p_1 p_2 \cdots p_m} = \frac{p_1 + 1}{p_1} \times \frac{p_2 + 1}{p_2} \times \cdots \times \frac{p_m + 1}{p_m}.$$

$p_1, p_2, \cdots, p_m$ は奇素数なので、分母は奇数となるが、分子は偶数の因子が少なくとも m 個存在する。よって、$p_1 p_2 \cdots p_m$ は完全数でない。　(Q. E. D.)

命題 8

奇数の原始過剰数は無数に存在する。

(証明)

素数を順に $p_1, p_2, p_3, \cdots$ としたとき、補題 1 より、任意の k について

$$\frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_{k+1}} + \frac{1}{p_{k+2}} + \cdots + \frac{1}{p_m} \geqq 1$$

を満たす m が存在する。

$p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_m$ と素因数分解できる自然数を n とする。つまり、

$$n = p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_m .$$

このとき、$k \leqq i \leqq m$ を満たす i について $\dfrac{n}{p_i}$ は n の約数であり、約数の総和は約数の部分和より大きいため、

$$\begin{aligned}\sigma(n) & \\ &\geqq n + \frac{n}{p_k} + \frac{n}{p_{k+1}} + \cdots + \frac{n}{p_m} + 1 \\ &= n + n\left(\frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_{k+1}} + \cdots + \frac{1}{p_m}\right) + 1 \\ &\geqq n + n + 1 > 2n\end{aligned}$$

より、n は過剰数である。

ここで、奇数の n について考えるため、$k_1 = 2$ とし、$p_{k_1} p_{k_1+1} p_{k_1+2} \cdots p_{m_1}$ と素因数分解できる自然数を n_1 とする。また、$k_2 = m_1 + 1$ として、$p_{k_2} p_{k_2+1} p_{k_2+2} \cdots p_{m_2}$ と素因数分解できる自然数を n_2 とする。また、$k_3 = m_2 + 1$ とし、$p_{k_3} p_{k_3+1} p_{k_3+2} \cdots p_{m_3}$ と素因数分解できる自然数を n_3 とする。この操作を繰り返して、$n_1, n_2, n_3, \cdots$ を定義していく。すると $n_1, n_2, n_3, \cdots$ は相異なる素因数をもつため、互いに素であり、奇数の過剰数である。

よって、補題 2 から奇数の完全数と原始過剰数は無数にあるといえる。しかし、補題 3 より、その中に完全数は含まれないため、奇数の原始過剰数は無数に存在する。

(Q. E. D.)

また、この証明の前半における議論から次がいえる。

命題 9

$\dfrac{\sigma(n)}{n}$ の値に上限はない。

命題 10

異なる素数 p, q を用いて $p^{\alpha} q^{\beta}$ とかける奇数の過剰数は存在しない。

(証明)

$3 \leqq p, q$ として、命題 3 から、

$$\begin{aligned}\sigma(p^{\alpha} q^{\beta}) &= \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1} \times \frac{q^{\beta+1} - 1}{q - 1} \\ &< \frac{p}{p-1} \times \frac{q}{q-1} \times p^{\alpha} q^{\beta} \\ &\leqq \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times p^{\alpha} p^{\beta} \\ &= \frac{15}{8} p^{\alpha} q^{\beta} < 2 p^{\alpha} q^{\beta}\end{aligned}$$

より、$p^{\alpha} q^{\beta}$ は不足数となる。　(Q. E. D.)

命題 11

相異なる素数 p, q, r, s を用いて $pqrs$ とかける奇数は不足数である。

(証明)

$p < q < r < s$ としても一般性を失わない。このとき、条件を式でまとめると

$$3 \leqq p,\ 5 \leqq q,\ 7 \leqq r,\ 11 \leqq s$$

となる。$n = pqrs$ として、n に対する約数の割合を求めると、

$$\begin{aligned}\sigma(n) & \\ &\leqq \frac{n}{1} + \frac{n}{3} + \frac{n}{5} + \frac{n}{7} + \frac{n}{11} + \frac{n}{15} + \frac{n}{21} + \frac{n}{33} \\ &\quad + \frac{n}{35} + \frac{n}{55} + \frac{n}{77} + \frac{n}{105} + \frac{n}{165}\end{aligned}$$

$$+\frac{n}{231}+\frac{n}{385}+\frac{n}{n}$$

$$<1.994n+1.$$

もし n が不足数でないならば、

$\sigma(n)\geqq 2n$ なので、$1.994n+1>2n$ が成り立つ。$0.006n<1$ より、$n<167$ とならねばならない。

一方、条件から $n\geqq 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11=1155$ となるため、奇数の $pqrs$ は不足数である。

(Q. E. D.)

なお、素因子が 3 つ以下のとき、$pqrs$ の約数といえるので不足数であり、素因子が 5 つの場合は原始過剰数が存在し、

$$15015=3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13$$

が最少のものである。

３．４　極限を用いた評価

命題 12

素数 p と自然数 α について、

$$\frac{p+1}{p}\leqq\frac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha}<\frac{p}{p-1}$$

が成り立つ。

(証明)

すべての自然数 α について、

$$\frac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha}=\frac{p^{\alpha+1}-1}{p^\alpha(p-1)}$$

$$<\frac{p^{\alpha+1}-1}{p^\alpha(p-1)}\times\frac{p^{\alpha+2}-1}{p^{\alpha+2}-p}$$

$$=\frac{p^{\alpha+1}-1}{p^\alpha(p-1)}\times\frac{p^{\alpha+2}-1}{p(p^{\alpha+1}-1)}$$

$$=\frac{p^{\alpha+2}-1}{p^{\alpha+1}(p-1)}=\frac{\sigma(p^{\alpha+1})}{p^{\alpha+1}}$$

より、$\dfrac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha}<\dfrac{\sigma(p^{\alpha+1})}{p^{\alpha+1}}$ が成り立つ。

そのため、$\alpha=1$ のときが $\dfrac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha}$ の最小値であり、$\dfrac{\sigma(p^1)}{p^1}=\dfrac{p+1}{p}$ …①

また、$\displaystyle\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha}=\frac{p^{\alpha+1}-1}{p^\alpha(p-1)}=\frac{p}{p-1}$

より、$\dfrac{p+1}{p}\leqq\dfrac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha}<\dfrac{p}{p-1}$.　(Q. E. D.)

また、このことから、$\displaystyle\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\sigma(2^\alpha)}{2^\alpha}=2$ が成り立つことがわかる。

命題 13

自然数 n について、$\displaystyle\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\sigma(n^\alpha)}{n^\alpha}$ は収束する。

これは、命題 12 と命題 4 から示される。

命題 14

$\displaystyle\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\sigma(n^\alpha)}{n^\alpha}$ が整数値のとき、収束値は 2 または 3 である。

(証明)

自然数 n が $p_1<p_2<\cdots<p_k$ となる素数を用いて $n=p_1p_2\cdots p_k$ と素因数分解されたとする。なぜならば、同じ種類の素数の素因数を 2 個以上含んだとしても、極限をとった後は同一視できるためである。

すると、

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\sigma(n^\alpha)}{n^\alpha}=\frac{p_1}{p_1-1}\times\frac{p_2}{p_2-1}\times\cdots\times\frac{p_k}{p_k-1}$$

命題８の補題３における同様の議論から、奇素数のみであると仮定すると、

$\lim_{\alpha\to\infty}\dfrac{\sigma(n^\alpha)}{n^\alpha}$ の分母から２の素因子を除いて、$\dfrac{(p_1-1)}{2}\times\dfrac{(p_2-1)}{2}\times\cdots\times\dfrac{(p_k-1)}{2}$ となるが、分子の $p_1p_2\cdots p_k$ より大きいため、整数値とならない。

よって n に２の素因子が含まれる。しかし、分子にある２の素因子は１つのみなので n の高さは高々2である。

このとき、$\lim_{\alpha\to\infty}\dfrac{\sigma(n^\alpha)}{n^\alpha}$ が整数値となる n は $n=2$ または $n=2\cdot 3$

つまり、$\lim_{\alpha\to\infty}\dfrac{\sigma(n^\alpha)}{n^\alpha}$ の値は２または３である。　(Q. E. D.)

<u>命題 15</u>

p を素数として、$2^n p$ の形に素因数分解できる数を考える。$2^n<p<p'<2^{n+1}-1$ のとき、$\dfrac{\sigma(2^n p)}{2^n p}>\dfrac{\sigma(2^n p')}{2^n p'}>2$ である。

(証明)

$$\begin{aligned}\frac{\sigma(2^n p)}{2^n p}&=\frac{(2^{n+1}-1)(p+1)}{2^n p}\\&=\frac{(2^{n+1}-1)(pp'+p')}{2^n pp'}\\&>\frac{(2^{n+1}-1)(pp'+p)}{2^n pp'}\\&=\frac{(2^{n+1}-1)(p'+1)}{2^n p'}=\frac{\sigma(2^n p')}{2^n p'}\end{aligned}$$

より、$\dfrac{\sigma(2^n p)}{2^n p}>\dfrac{\sigma(2^n p')}{2^n p'}$ …①

また、

$$\begin{aligned}\frac{\sigma(2^n p')}{2^n p'}&=\frac{(2^{n+1}-1)(p'+1)}{2^n p'}\\&=\frac{2(2^n p')+2^{n+1}-p'-1}{2^n p'}\\&=2+\frac{(2^{n+1}-1)-p'}{2^n p'}>2\quad\cdots②\end{aligned}$$

①, ②より、命題は示された。　(Q. E. D.)

なお、n の値によっては p を順に大きくしても $\dfrac{\sigma(2^n p)}{2^n p}$ が減少しない場合があるが、自然数 a を用いて

$$2^n<p=2^{n+1}-a<p'=2^{n+2}-a$$

と表されるとき、

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma(2^n p)}{2^n p}-\frac{\sigma(2^{n+1} p')}{2^{n+1} p'}\\&=\frac{(2^{n+1}-1)(p+1)}{2^n p}-\frac{(2^{n+2}-1)(p'+1)}{2^{n+1} p'}\\&=\frac{(2^{n+2}-2)(pp'+p')-(2^{n+2}-1)(pp'+p)}{2^{n+1}pp'}\\&=\frac{-(pp'+p')+(2^{n+2}-1)(p'-p)}{2^{n+1}pp'}\\&=\frac{-(pp'+p')+(2^{n+2}-1)2^{n+1}}{2^{n+1}pp'}\\&=\frac{2^{n+1}2^{n+2}-(p+1)p'-2^{n+1}}{2^{n+1}pp'}\\&\geq\frac{2^{n+1}2^{n+2}-2^{n+1}(2^{n+2}-1)-2^{n+1}}{2^{n+1}pp'}\\&=\frac{2^{n+1}(2^{n+2}-2^{n+2}+1-1)}{2^{n+1}pp'}=0\end{aligned}$$

より、$\dfrac{\sigma(2^n p)}{2^n p}>\dfrac{\sigma(2^{n+1} p')}{2^{n+1} p'}$ が成り立つ。

３．５　実際の値

原始過剰数は偶数であるものが多く、奇数であるものうち、最小のものは 945 とな

る。奇数では 5 の倍数が多く一の位が 1, 3, 7, 9 で最小のものは順に 81081、153153、207207、189189 である。1001 の倍数でないものもあり、例として 223839 が挙げられる。また、100 万以下での原始過剰数の個数は 1733 個であり、最大のものは、999999 である。

次頁に、5000 以下の原始過剰数と 30000 以下の奇数の原始過剰数を掲載する。

４．今後の課題

今回行わなかった、自然数全体に対しての過剰数の割合の評価を、完全数の倍数や、原始過剰数の倍数として表現できるのではないかと考えている。

５．参考文献

[1] 「数論の精選 104 問」、Titu Andreescu Dorin, Andrica,Zuming Feng 著、小林一章、鈴木晋一監 訳、清水俊宏、西本将樹 訳、朝倉書店

[2] 「直感を裏切る数学 『思い込み』にだまされない数学的思考法」、神永正博、講談社

[3] 「約数の総和について」、小椋晃一、奈良女子大学附属中等教育学校平成 27 年度 SSH 生徒研究論文集、p.36－42

６．謝辞

今回の研究にあたりご指導くださった顧問の川口先生、ありがとうございました。また、その他にもサイエンス研究会をはじめとした多くの方々に協力や助言をいただけました。ありがとうございました。

表１　5000 以下の原始過剰数

$20=2^2\cdot5$	$945=3^3\cdot5\cdot7$	$2205=3^2\cdot5\cdot7^2$	$4030=2\cdot5\cdot13\cdot31$
$70=2\cdot5\cdot7$	**$1184=2^5\cdot37$**	$2210=2\cdot5\cdot13\cdot17$	$4070=2\cdot5\cdot11\cdot37$
$88=2^3\cdot11$	**$1312=2^5\cdot41$**	$2470=2\cdot5\cdot13\cdot19$	$4095=3^2\cdot5\cdot7\cdot13$
$104=2^3\cdot13$	**$1376=2^5\cdot43$**	$2530=2\cdot5\cdot11\cdot23$	$4216=2^3\cdot17\cdot31$
$272=2^4\cdot17$	$1430=2\cdot5\cdot11\cdot13$	$2584=2^3\cdot17\cdot19$	**$4288=2^6\cdot67$**
$304=2^4\cdot19$	**$1504=2^5\cdot47$**	$2990=2\cdot5\cdot13\cdot23$	$4510=2\cdot5\cdot11\cdot41$
$368=2^4\cdot23$	$1575=3^2\cdot5^2\cdot7$	$3128=2^3\cdot17\cdot23$	**$4544=2^6\cdot71$**
$464=2^4\cdot29$	**$1696=2^5\cdot53$**	$3190=2\cdot5\cdot11\cdot29$	**$4672=2^6\cdot73$**
$550=2^4\cdot31$	$1870=2\cdot5\cdot11\cdot17$	$3230=2\cdot5\cdot17\cdot19$	$4712=2^3\cdot19\cdot31$
$572=2^2\cdot11\cdot13$	**$1888=2^5\cdot59$**	$3410=2\cdot5\cdot11\cdot31$	$4730=2\cdot5\cdot11\cdot43$
$650=2\cdot5^2\cdot13$	**$1952=2^5\cdot61$**	$3496=2^3\cdot19\cdot23$	
$748=2^2\cdot11\cdot17$	$2002=2\cdot7\cdot11\cdot13$	$3770=2\cdot5\cdot13\cdot29$	※太字は $2^n p$ の形
$836=2^2\cdot11\cdot19$	$2090=2\cdot5\cdot11\cdot19$	$3944=2^3\cdot17\cdot29$	

表２　30000 以下の奇数の原始過剰数

$945=3^3\cdot5\cdot7$	$8415=3^2\cdot5\cdot11\cdot17$	$16695=3^2\cdot5\cdot7\cdot53$	$24885=3^2\cdot5\cdot7\cdot79$
$1575=3^2\cdot5^2\cdot7$	$8925=3\cdot5^2\cdot7\cdot17$	$18585=3^2\cdot5\cdot7\cdot59$	25935
$2205=3^2\cdot5\cdot7^2$	$9135=3^2\cdot5\cdot7\cdot29$	$19215=3^2\cdot5\cdot7\cdot61$	$=3\cdot5\cdot7\cdot13\cdot19$
$3465=3^2\cdot5\cdot7\cdot11$	$9555=3\cdot5\cdot7^2\cdot13$	19635	$26145=3^2\cdot5\cdot7\cdot83$
$4095=3^2\cdot5\cdot7\cdot13$	$9765=3^2\cdot5\cdot7\cdot31$	$=3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot17$	26565
$5355=3^2\cdot5\cdot7\cdot17$	$11655=3^2\cdot5\cdot7\cdot37$	$21105=3^2\cdot5\cdot7\cdot67$	$=3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot23$
$5775=3\cdot5^2\cdot7\cdot11$	$12705=3\cdot5\cdot7\cdot11^2$	21945	$28035=3^2\cdot5\cdot7\cdot89$
$5985=3^2\cdot5\cdot7\cdot19$	$12915=3^2\cdot5\cdot7\cdot41$	$=3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot19$	28215
$6435=3^2\cdot5\cdot11\cdot13$	$13545=3^2\cdot5\cdot7\cdot43$	$22365=3^2\cdot5\cdot7\cdot71$	$=3^3\cdot5\cdot11\cdot19$
$6825=3\cdot5^2\cdot7\cdot13$	$14805=3^2\cdot5\cdot7\cdot47$	$22995=3^2\cdot5\cdot7\cdot73$	29835
$7245=3^2\cdot5\cdot7\cdot23$	15015	23205	$=3^3\cdot5\cdot13\cdot17$
$7425=3^3\cdot5^2\cdot11$	$=3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13$	$=3\cdot5\cdot7\cdot13\cdot17$	
$8085=3\cdot5\cdot7^2\cdot11$			