４次方陣の性質に関する研究

４年Ｃ組　今中　翔哉
指導教員　川口　慎二

１．要約

サイエンス研究会数学班４年生は魔方陣について学習している。今回の研究では、４次魔方陣における特有の性質について、交換様式という角度から考察をおこなった。

キーワード　　４次魔方陣、交換様式、完全方陣

２．研究の背景と目的

前回の研究([1])では、魔方陣の作り方における自分なりの見解や考察を行うことができた。今回は、魔方陣の性質を中心に調べることにした。その中でも、性質の種類が多く知られている４次魔方陣に焦点を絞って研究を行った。今回の研究の目的は、４次魔方陣の性質を交換様式など、魔方陣特有の性質を用いて考察を行うことである。今回は、その結果を紹介したい。

３．研究内容

３．１　定義

魔方陣とは、１から始まる連続した自然数を、各行、各行、及び対角線の数の和(4次方陣では34)をすべて相等しくなるように、碁盤の目状に並べたものをいう。一般に、1辺が n マスの魔方陣を n 次魔方陣という。また、n 次魔方陣を単に「n 次方陣」ということが多い。

n 次魔方陣に対して、魔方陣の定和性を満たし続ける操作のことを**交換様式**という。今回は４次方陣に対する交換様式を中心に考察する。

３．２　４次方陣の性質

次のような４次方陣を考える。

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

図１　４次方陣

命題　次の $\boxed{\text{性質１}}$ から $\boxed{\text{性質４}}$ が成立する。

$\boxed{\text{性質１}}$
$$a+d+m+p=34$$
$$b+c+n+o=34$$
$$e+i+h+l=34$$
$$f+g+j+k=34$$

$\boxed{\text{性質２}}$
$$b+c=m+p$$
$$d+p=e+i$$
$$a+d=n+o$$
$$a+m=h+l$$

$\boxed{\text{性質３}}$
$$a+p=g+j$$
$$d+m=f+k$$

$\boxed{\text{性質４}}$
$$f+g=i+l$$
$$e+h=j+k$$
$$b+n=g+k$$
$$c+o=f+j$$

(証明)

4 次魔方陣の性質から、各行、各列、両対角線の和(定和)は 34 であるため、

$a+b+c+d=34$ …①

$e+f+g+h=34$ …②

$i+j+k+l=34$ …③

$m+n+o+p=34$ …④

$a+e+i+m=34$ …⑤

$b+f+j+n=34$ …⑥

$c+g+k+o=34$ …⑦

$d+h+l+p=34$ …⑧

$a+f+k+p=34$ …⑨

$d+g+j+m=34$ …⑩

性質 1 について、

①+④から、

$(a+d+m+p)+(b+c+n+o)=34\times2$ …⑪

⑤+⑧から、

$(a+d+m+p)+(e+h+i+l)=34\times2$ …⑫

⑨+⑩から、

$(a+d+m+p)+(f+g+j+k)=34\times2$ …⑬

②+③から、

$(e+h+i+l)+(f+g+j+k)=34\times2$ …⑭

⑬−⑭より、

$a+d+m+p=e+h+i+l$

よって、⑫から、

$a+d+m+p=34$ …⑮

$e+h+i+l=34$ …⑯

また、⑪,⑭より、

$b+c+n+o=34$ …⑰

$f+g+j+k=34$ …⑱

性質 2 について、

①と⑰から $a+d=n+o$

⑤と⑮から $d+p=e+i$

⑤と⑯から $a+m=h+l$

④と⑰から $b+c=m+p$

性質 3 について

⑨と⑮から $d+m=f+k$

⑩と⑮から $a+p=g+j$

性質 4 について

③と⑱から $f+g=i+l$

②と⑱から $e+h=j+k$

⑥と⑱から $b+n=g+k$

⑦と⑱から $c+o=f+j$　　(Q. E. D.)

3．3　4 次方陣の分類

4 次方陣の種類は、1 の配置場所によって 3 つの場合に、また 16 の位置に注目して以下の 21 の型に分けることができる。

図 1 の m の位置に 1 を入れた場合を A 型、i の位置に 1 を入れた場合を B 型、j の位置に 1 を入れた場合を C 型とする。

(1) A 型を 16 の位置により、以下の 6 つの型に分類する(図 2 参照)。

$a=16$ のとき、(A-1)型

$e=16$ のとき、(A-2)型

$i=16$ のとき、(A-3)型

$j=16$ のとき、(A-4)型

$g=16$ のとき、(A-5)型

$d=16$ のとき、(A-6)型

A-1			A-6
A-2		A-5	
A-3	A-4		
1			

図 2　A 型の 4 次方陣

(2) B 型を 16 の位置により、以下の 9 つの型に分類する(図 3 参照)。

$a=16$ のとき、(B-1)型

$e=16$ のとき、(B-2)型

$m=16$ のとき、(B-3)型

$j=16$ のとき、(B-4)型

$n=16$ のとき、(B-5)型

$c=16$ のとき、(B-6)型

$k=16$ のとき、(B-7)型

$h=16$ のとき、(B-8)型

$l=16$ のとき、(B-9)型

B-1		B-6	
B-2			B-8
1	B-4	B-7	B-9
B-3	B-5		

図 3　B 型の 4 次方陣

(3) C 型を 16 の位置により、以下の 6 つの型に分類する(図 4 参照)。

$i=16$ のとき、(C-1)型

$m=16$ のとき、(C-2)型

$b=16$ のとき、(C-3)型

$f=16$ のとき、(C-4)型

$g=16$ のとき、(C-5)型

$d=16$ のとき、(C-6)型

	C-3		C-6
	C-4	C-5	
C-1	1		
C-2			

図 4　C 型の 4 次方陣

これらの型の分類については、参考文献[2] p.66 を参考にした。

３．４　４次方陣の交換様式

4 次方陣の交換様式は 6 種類あることが知られている。そのうち、今回は以下の 3 種類を使用する。

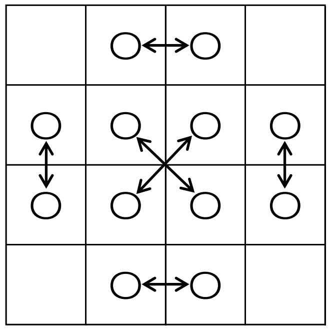

図 5　交換様式 1

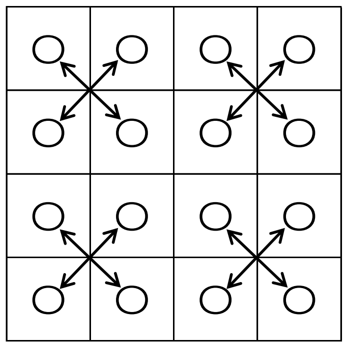

図 6　交換様式 2

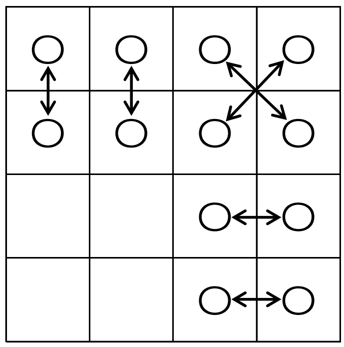

図 7　交換様式 3

但し、交換様式 3 は$\underline{b+e+l+o}=34$ の場合に限る。

以下に、交換様式 1 と 3 が定和を変えないことについて、簡単な証明を記しておく。

(交換様式 1 の定和保存性の証明)

操作を加える前の任意の 4 次方陣を図 8 とする。すると、交換様式 1 を施した魔方陣は図 9 のようになる。

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

図 8

a	c	b	d
i	k	j	l
e	g	f	h
m	o	n	p

図 9

図 9 において、各行、各列、対角線の和は、図 8 と比較すると、各和の構成要素が変わっていないので、

$a+c+b+d=34,\ i+k+j+l=34$

$e+g+f+h=34,\ m+o+n+p=34$

$a+i+e+m=34,\ c+k+g+o=34$

$b+j+f+n=34,\ d+l+h+p=34$

$a+k+f+p=34,\ d+j+g+o=34$

(Q. E. D.)

ここで、交換様式 1 を施しても、第 1 行、第 4 行、第 1 列、第 4 列に含まれる数は(順序の入れ替えのみであり)変わらないことがわかる。

(交換様式 3 の定和保存性の証明)

交換様式 3 を施す前の任意の 4 次方陣を図 10 とする。すると、交換様式 3 を施した魔方陣は図 11 のようになる。

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

図 10

e	f	h	g
a	b	d	c
i	j	l	k
m	n	p	o

図 11

図 3 において、$\underline{e+b+l+o}=34$ であることに注意する。図 11 において、各行、各列、両対角線の和は、図 10 より

$e+f+h+g=34,\ a+b+d+c=34$

$i+j+l+k=34,\ m+n+p+o=34$

$e+a+i+m=34,\ f+b+j+n=34$

$h+d+l+p=34,\ g+c+k+o=34$

$\underline{e+b+l+o}=34,\ g+d+j+m=34$

(Q. E. D.)

また、この交換様式 3 を施すことができる方陣(つまり、$e+b+l+o=34$ を満たす方陣)としては、**完全方陣**や**対称魔方陣**(中心に関して対称の位置にある数の和が 17 になる方陣)が挙げられる。

以上から、交換様式 1 と交換様式 3 の場合について証明できたが、交換様式 2 の場合についても、同様に証明をすることができる。

3．5　交換様式と 4 次方陣の分類

4 次方陣の交換様式を用いて、方陣の型の間に、次のような関係があることがわかった。

8	2	13	11
15	9	6	4
10	16	3	5
1	7	12	14

(A-4)型

①

8	13	2	11
10	3	16	5
15	6	9	4
1	12	7	14

(A-5)型

図 12　(A-4)型と(A-5)型の対応

図 12 のように、(A-4)型に交換様式 1 を施すと(A-5)型の方陣になる。つまり、(A-4)型と(A-5)型の方陣の間には、交換様式 1 を施すと互いに写りあう対応関係があり、それぞれ 1 対 1 に対応する。

また、交換様式 1 の関係は、(A-2)型と(A-3)型、(B-4)型と(B-7)型、(B-5)型と(B-6)型との間にもそれぞれ成り立つことがわかった。残りの(B-2)型、(B-8)型、(B-9)型、(C-4)型、(C-5)型については、交換様式 1 を施すと同じの型の方陣になる。例えば、図 13 のように、(B-2)型の方陣は(B-2)型に対応する。

3	10	15	6
16	7	2	9
1	12	13	8
14	5	4	11

(B-2)型

①

3	15	10	6
1	13	12	8
16	2	7	9
14	4	5	11

(B-2)型

図 13　(B-2)型の対応

図 13 で得られた(B-2)型の方陣を和が等しくなるようにしたままで、わかりやすく変形すると図 14 のようになる。このように、1 が移動した場合は、方陣を反転させてから型に分類する必要がある。

3	15	10	6
1	13	12	8
16	2	7	9
14	4	5	11

14	4	5	11
16	2	7	9
1	13	12	8
3	15	10	6

図 14

次に、(A-1)型に交換様式 2 を施すと図 15 のように(C-4)型になることがわかった。

16	3	10	5
6	4	15	9
11	13	2	8
1	14	7	12

(A-1)型

②

4	6	9	15
3	16	5	10
14	1	12	7
3	11	8	2

(C-4)型

図 15　(A-1)型と(C-4)型の対応

また、(A-2)型と(C-3)型、(A-3)型と(C-1)型、(A-4)型と(C-2)型、(A-5)型と(C-6)型、(A-6)型と(C-5)型との間にもそれぞれ成り立つ関係である。このことから、A 型と C 型の方陣は 1 対 1 に対応し、それぞれの個数は等しいことがわかる。

B 型については、それぞれの型に交換様式 2 を施すことにより、(B-1)型は(B-7)型、(B-2)型は(B-9)型、(B-3)型は(B-4)型にそれぞれ対応している。

また、(B-5)型、(B-6)型、(B-8)型に関しては交換様式 2 を施すとそれら自身の型の方陣になることがわかった。

8	3	10	13
14	9	4	7
1	6	15	12
11	16	5	2

(B-5)型

②

9	14	7	4
3	8	13	10
16	11	2	5
6	1	12	15

(B-5)型

図 16　(B-5)型の対応

図 16 で得られた(B-5)型を和が等しくなるようにしたままで、わかりやすく変形すると図 17 のようになる。

9	14	7	4
3	8	13	10
16	11	2	5
6	1	12	15

15	5	10	4
12	2	13	7
1	11	8	14
6	16	3	9

図 17

３．６　４次完全方陣

3-6-1　シフト変換

右図の方陣の**主対角線**(a−f−k−p)と**副対角線**(d−g−j−m)と、それらの平行な位置にある n 個の要素からなる分離した対角線をまとめて**汎対角線**という。

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

また、行、列、および両対角線の数の和が一定になるだけでなく、汎対角線上の数の和も、すべて等しくなるような方陣を**完全方陣**という。つまり、4 次の完全方陣においては一般の 4 次方陣の性質に加えて、次が成り立つ。

命題　完全方陣の汎対角線和は一定である。

$$a+h+k+n=34,\ b+e+l+o=34$$
$$c+f+i+p=34,\ d+e+i+o=34$$
$$c+h+i+n=34,\ b+g+l+m=34$$

そして、完全方陣はすべての汎対角線で定和をもつために、次のような完全方陣特有の変換が考えられる。n 次完全方陣に対して、

S_1：最下行を最上行の上側に移動させる
S_2：最右列を最左列の左側に移動させる

のどちらを行っても、つねに、n 次完全方陣が得られる。上の S_1, S_2 の変換を**シフト変換**という。以下に、シフト変換によって、完全方陣が完全方陣に対応することを示す。

（シフト変換による完全方陣の対応）

シフト変換を施す前の 4 次方陣を図 18 とする(但し、この方陣は完全方陣であるとする)。シフト変換 S_1 の場合、変換後の方陣が完全方陣であることを示す。

図 18 の方陣にシフト変換を施して得られた方陣を図 19 とすると、次のようになる。

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

図 18

$\xrightarrow{S_1}$

m	n	o	p
a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l

図 19

ここで、 図 18 において完全方陣の定義より、以下が成り立つ。

$$a+n+k+h=34,\ e+b+o+l=34$$
$$i+f+c+p=34,\ d+e+j+o=34$$
$$c+h+i+n=34,\ b+g+l+m=34$$

また、図 19 において、上の式と 4 次魔方陣の性質から各行、各列、両対角線、汎対角線の和はすべて 34 となることがわかる。よって、得られた魔方陣(図 19)は 4 次完全方陣である。　　(Q. E. D.)

また、これはシフト変換 S_2 についても同様に示すことができる。そして、このシフト変換によって 1 つの 4 次完全方陣から 16 個(=4^2 個)の 4 次完全方陣が得られるということがわかる。

3-6-2　完全方陣の性質

完全方陣の性質を満たす方陣を図 20 とすると、

$$b+g+l+m=34$$
$$d+g+j+m=34$$

より、$d+j=b+l$ …ⓐ

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

図 20

また、完全方陣に対しては交換様式 3 を適用することができる。

交換様式 3 を施す前 4 次完全方陣を上の図 20 とする。そして、この図 20 に交換様式 3 を施して得られた方陣を図 21 とすると、次のようになる。

e	f	h	g
a	b	d	c
i	j	l	k
m	n	p	o

図 21

図 21 において、4 次方陣の性質から、

$$b+d+l+j=34 \quad \cdots ⓑ$$

ⓐとⓑより、$d+j=b+l=17$ …ⓒ

そして、完全方陣にはシフト変換を適用することができるため、残りの 3×3 マスの隅の数についても、同様にして

$$d+j=b+l=17,\ c+i=a+k=17$$

$$h+n=f+p=17,\ g+m=e+o=17$$

が成り立つ。つまり、4 次完全方陣におけるすべての 3×3 マスの隅の数の和は 4 次方陣の定和 34 に等しいことがわかる。

また、図 20 の 4 次方陣の性質から

$$f+g+j+k=34$$

である。図 20 は完全方陣でもあるため、シフト変換を用いるとすべての 2×2 マスの隅の数についても同様に、

$$a+b+f+e=34,\ b+c+g+f=34$$

$$c+d+h+g=34,\ e+f+j+i=34$$

$$f+g+k+j=34,\ g+h+l+k=34$$

$$i+j+n+m=34,\ j+k+o+n=34$$

$$k+l+p+o=34,\ f+g+k+j=34$$

が成り立つ。

さらに、4 次方陣には一般に 21 種類の型が存在する。その中でも、(A-5)型、(B-6)型、(C-6)型はこの小正方形 3×3 マスの隅の和の 1 と 16 の位置関係に注目すると完全方陣の性質を満たすことがわかる。つまり、(A-5)型、(B-6)型、(C-6)型の 4 次方陣は完全方陣であるということがわかるのである。

8	13	2	11
10	3	16	5
15	6	9	4
1	12	7	14

(A-5)型

10	3	16	5
15	6	9	4
1	12	7	14
8	13	2	11

(B-6)型

5	10	3	16
4	15	6	9
14	1	12	7
11	8	13	2

(C-6)型

しかし、これらの 4 次方陣はシフト変換の視点でみると、本質的には同じ完全方陣と捉えることができる。

4．今後の展望

今回の研究では、4 次方陣固有の交換様式や変換を用いて 4 次方陣や 4 次完全方陣の性質について考察を行うことができた。今後は、4 次方陣のみならず、さまざまな魔方陣に対象を広げ、発展させていきたい。また、完全方陣の分類についても考えていきたい。

5．参考文献

[1] 「魔方陣を作る」、今中翔哉、奈良女子大学附属中等教育学校 平成 27 年度 SSH サイエンス研究会生徒研究論文集、p.28-35

[2] 「魔方陣の世界」、大森清美、日本評論社(2013)

6．謝辞

今回の研究にあたりご指導くださった顧問の川口先生 ありがとうございました。