三角形の収束

4 年 A 組　古宮　昌典
指導教員　川口　慎二

１．要約

サイエンス研究会数学班 4 年生は図形の性質について研究している。今回は、自ら発見した図形の性質を証明することを目標とし、参考文献[1]を用いて数列の収束や極限について学習した。

キーワード　　円、三角形、収束

２．研究の背景と目的

円に内接する三角形において、その 3 辺の垂直二等分線をかき、それらと円の交点をとる。そうしてできた 3 点を新たな頂点とする三角形についても同様の操作を行う。この操作を繰り返していくとどうなるかということを思いつき、実際に操作を行ってみると面白い事実がわかった。本稿ではその事実を紹介し、考察する。

３．研究内容

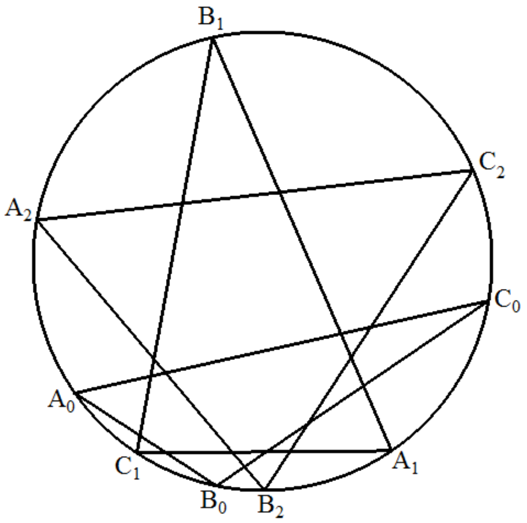
３－１．中心角の変化

上述の操作について考える。

定理１

点 O を中心とする円に内接する $\triangle A_0B_0C_0$ について、辺 A_0B_0 の垂直二等分線と円との交点のうち、直線 A_0B_0 に関して点 C_0 側でない方の点を C_1，辺 B_0C_0 の垂直二等分線と円との交点のうち直線 B_0C_0 に関して点 A_0 側でない方の点を A_1，辺 C_0A_0 の垂直二等分線と円との交点のうち、直線 C_0A_0 に関して点 B_0 側でない方の点を B_1 とする。

この操作によって得られる $\triangle A_1B_1C_1$ においても同様の操作を繰り返すということを無限に繰り返すと、得られる三角形は限りなく正三角形に近づく。



(証明)

1 回の操作で中心角がどのように変化するのかを考える(上図の $\triangle A_0B_0C_0$ のような鈍角三角形のとき、弦 A_0C_0 に対する中心角は、$\angle A_0OC_0$ (180°より大きい方) を指す)。n 回目の操作により得られる $\triangle A_nB_nC_n$ において、$\angle B_nOC_n = a_n$，$\angle C_nOA_n = b_n$，∠

$A_nOB_n = c_n$とおく。このとき、対称性より $a_n \leqq b_n \leqq c_n$ としても一般性を失わない。図より、1 回の操作で中心角はそれぞれ以下のように変化する。

$$a_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{2} = \frac{360° - a_n}{2} = 180 - \frac{a_n}{2},$$

$$b_{n+1} = \frac{c_n + a_n}{2} = \frac{360° - b_n}{2} = 180 - \frac{b_n}{2},$$

$$c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{360° - c_n}{2} = 180 - \frac{c_n}{2}.$$

また、$a_n \leqq b_n \leqq c_n$より、

$$a_{n+1} \leqq b_{n+1} \leqq c_{n+1}$$

が成り立つ。△$A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$に操作を行うと、上の漸化式より、中心角は次のように変化する。

$$a_{n+2} = 180 - \frac{a_{n+1}}{2} = 90 + \frac{a_n}{4},$$

$$b_{n+2} = 180 - \frac{b_{n+1}}{2} = 90 + \frac{b_n}{4},$$

$$c_{n+2} = 180 - \frac{c_{n+1}}{2} = 90 + \frac{c_n}{4}$$

$a_n \leqq b_n \leqq c_n$より、$a_{n+2} \leqq b_{n+2} \leqq c_{n+2}$ が成り立つ。ここで、$c_n \geqq 120^\circ$ となる。なぜならば、$c_n < 120^\circ$と仮定すると、3 つの中心角の和が 360°よりも小さくなってしまうからである。また、$c_{n+2} \leqq c_n$も成り立つ。もし、$c_{n+2} < c_n$となるnが存在すると仮定すると、$c_{n+2} = 90 + \frac{c_n}{4} < c_n$ より $90 < \frac{3}{4}\mathrm{c_n}$, $120 < \mathrm{c_n}$となり、仮定に矛盾するからである。ゆえに、数列$c_0, c_2, c_4, \cdots$は単調減少列である。さらに、任意の自然数iに対して、$c_i \geqq 120^\circ$ なので、この数列$\{c_n\}$はある値に収束する。その値が 120° であることを証明すればよい。そこで、漸化式

$$d_0 = c_0,\ d_{n+1} = 90 + \frac{d_n}{4}$$

を考える。これは、操作を 2 回続けて行うことを 1 つの操作とみなしたときの中心角の変化を表している。ここで、d_nと 120°の差を考えると、

$$d_n - 120° = 90° + \frac{d_{n-1}}{4} - 120° = \frac{d_{n-1}}{4} - 30°$$

$$= \frac{1}{4}\left(d_{n-1} - 120°\right)$$

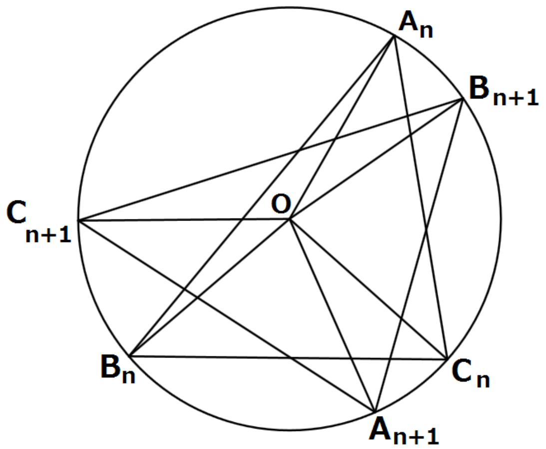
より、1 回につき、d_nと 120°の差は$\frac{1}{4}$倍となる。これは、120°に収束することを意味している。よって題意は示された。

(Q. E. D.)

円に内接する三角形の辺の垂直二等分線を引くということは、その辺に対する中心角の二等分線を引くことと同値である。そこで、次に中心角の分割について考える。

<u>定理 2</u>

円 O に内接する△$A_0B_0C_0$について、下図のように、∠A_0OB_0を$p:q$に分ける直線と円の交点のうち、直線A_0B_0に関して点C_0側でない方の点をC_1，∠B_0OC_0を$p:q$に分ける直線と円との交点のうち直線B_0C_0に関して点A_0側でない方の点をA_1，∠C_0OA_0を$p:q$に分ける直線と円との交点のうち、直線C_0A_0に関して点B_0側でない方の点をB_1とする。この操作によって得られる△$A_1B_1C_1$においても同様の操作を繰り返すということを無限に繰り返すと、得られる三角形は、限りなく正三角形に近づく。



(証明)

定理１と同様、１回の操作における中心角の変化を考える。n回目の操作で得られる△$A_nB_nC_n$において、∠$B_nOC_n = a_n$，∠$C_nOA_n = b_n$，∠$A_nOB_n = c_n$とおく。このとき、対称性より $a_n \leqq b_n \leqq c_n$ としても一般性を失わない。そして、図より、

$$a_{n+1} = \angle B_{n+1}OA_n + \angle A_nOC_{n+1}$$
$$= \frac{p}{p+q}b_n + \frac{q}{p+q}c_n = \frac{pb_n + qc_n}{p+q}$$

を得る。同様にして、

$$b_{n+1} = \frac{pc_n + qa_n}{p+q},\quad c_{n+1} = \frac{pa_n + qb_n}{p+q}$$

が成り立つ。ここで、$a_n \leqq b_n \leqq c_n$ より、以下を得る。

$$a_{n+1} = \frac{pb_n + qc_n}{p+q} \leqq \frac{pc_n + qc_n}{p+q} = c_n\,,$$
$$b_{n+1} = \frac{pc_n + qa_n}{p+q} \leqq \frac{pc_n + qc_n}{p+q} = c_n\,,$$
$$c_{n+1} = \frac{pa_n + qb_n}{p+q} \leqq \frac{pc_n + qc_n}{p+q} = c_n\,.$$

ゆえに、一般に以下が成り立つ。

$$a_{k+1} \leqq \max(a_k, b_k, c_k)\,,$$
$$b_{k+1} \leqq \max(a_k, b_k, c_k)\,,$$
$$c_{k+1} \leqq \max(a_k, b_k, c_k)\,.$$

よって、

$$\max(a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}) \leqq \max(a_k, b_k, c_k)$$

を得る。そこで、$a_0 \leqq b_0 \leqq c_0$とおくと、

$$c_0 \geqq \max(a_1, b_1, c_1) \geqq \max(a_2, b_2, c_2)$$
$$\geqq \max(a_3, b_3, c_3) \geqq \cdots \geqq 120^\circ$$

が成り立つ。同様にして、

$$a_{k+1} \geqq \min(a_k, b_k, c_k)\,,$$
$$b_{k+1} \geqq \min(a_k, b_k, c_k)\,,$$
$$c_{k+1} \geqq \min(a_k, b_k, c_k)$$

を示すことができるので、

$$a_0 \leqq \min(a_1, b_1, c_1) \leqq \min(a_2, b_2, c_2)$$
$$\leqq \min(a_3, b_3, c_3) \leqq \cdots \leqq 120^\circ$$

を得る。ここで、以下の補題を用いる。証明は参考文献[1]を参照されたい。

<u>補題</u>　　有界な単調数列は収束する。

詳しく言うと、上に有界な単調増加列と下に有界な単調減少列は、それぞれ上限と下限に収束する。

先程の議論から、数列$\{\max(a_t, b_t, c_t)\}$と$\{\min(a_t, b_t, c_t)\}$はそれぞれ有界な単調数列であるから、これらはそれぞれある値に収束する。そこで、

$$\lim_{t\to\infty} \max(a_t, b_t, c_t) = M\,,$$

$$\lim_{t\to\infty} \min(a_t, b_t, c_t) = m$$

とおく。このとき、a_t, b_t, c_tの中で２番目に大きい値を$\mathrm{mid}(a_t, b_t, c_t)$と表すことにすると、

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{mid}(a_t, b_t, c_t) = 360^\circ - M - m$$

となるので、数列$\{\mathrm{mid}(a_t, b_t, c_t)\}$も収束する。また、その収束値を$K$とおく。このと

き、次のいずれかが成り立つ。

① $\dfrac{pK+qm}{p+q}=M$

② $\dfrac{pK+qm}{p+q}=K$

③ $\dfrac{pK+qm}{p+q}=m$

④ $\dfrac{pm+qK}{p+q}=M$

⑤ $\dfrac{pm+qK}{p+q}=K$

⑥ $\dfrac{pm+qK}{p+q}=m$

①のとき、

$$m \leqq \frac{pK+qm}{p+q}=M \leqq K \leqq M$$

より、$K=M$ なので、$\dfrac{pM+qm}{p+q}=M$ ゆえに、$m=K=M$ が成り立つので、正三角形に収束する。

②のとき、

$\dfrac{pK+qm}{p+q}=K$ より、$\dfrac{pm+qM}{p+q}$ がとり得る値は m または M なので、$m=M$ が成り立つ。つまり、$m=K=M$ が成り立つので、正三角形に収束することがわかる。

③について

$\dfrac{pK+qm}{p+q}=m$ のとき $m=K$ が成り立つ。

また、$\dfrac{pM+qK}{p+q}$ の値としてあり得るのは、K または M だが、どちらの場合においても、$m=K=M$ が成り立つので、正三角形に収束する。

④，⑤，⑥の場合でも同様に、正三角形に収束することが確認できる。以上より、どの場合についても、正三角形に収束する。

(Q. E. D.)

４．今後の課題

今回は、三角形について、操作による形の変化を考察した。しかし、一般の多角形について図をかいて調べてみると、正多角形に収束することが確認できたので、その証明を完成させることが課題となる。

５．参考文献

[1] 「イプシロン－デルタ」（数学ワンポイント双書 20)，田島一郎，共立出版

６．謝辞

今回の研究にあたりご指導くださった顧問の川口先生、ありがとうございました。