数学オリンピックの問題に関する研究

4年A組　古宮　昌典
指導教員　川口　慎二

１．要約

サイエンス研究会数学班4年生は数学オリンピックの問題について研究している。今回は、数学オリンピックの問題に関して、一般化および考察を行うことを目標とした。

キーワード　　数学オリンピック、問題の一般化

２．研究の背景と目的

数学オリンピックの問題は、難解であるとともに、数学的な美しさも併せ持っている。しかし、数学オリンピックの予選問題などは、答えだけを求めるものであり、数学的な広がりを持っていない場合が多い。そこで、今回は、過去に数学オリンピックで出題された幾何と数論の問題において、その一般化および考察を行った。

３．研究内容

３．１　幾何

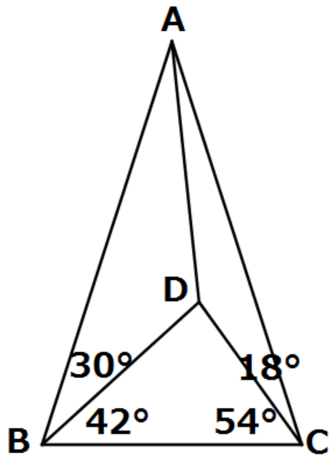
3.1.1　角度の問題

以下の問題は角度に関する問題である。

<u>例題１</u>

△ABCの内部に点Dがあり、∠DBA＝30°, ∠DBC＝42°, ∠DCB＝54°, ∠DCA＝18° を満たすとき、∠BADの大きさを求めよ。　［第4回広中杯ファイナル問題］

この問題は以下のように解くことができる。



解答

図１は、正五角形EFGHIの内部に点Jを、△EFJが正三角形となるようにとったものである。

このとき、

∠EGJ＝30°, ∠JGH＝42°,

∠GHJ＝54°, ∠EHJ＝18°

であることは容易にわかる。また、△EGHと△ABCは相似であるから、点Dと点Jはこの相似変換において対応する。ゆえに、∠GEJ＝∠BADであり、∠GEJ＝24°であるから、∠BAD＝24°を得る。　　(終)

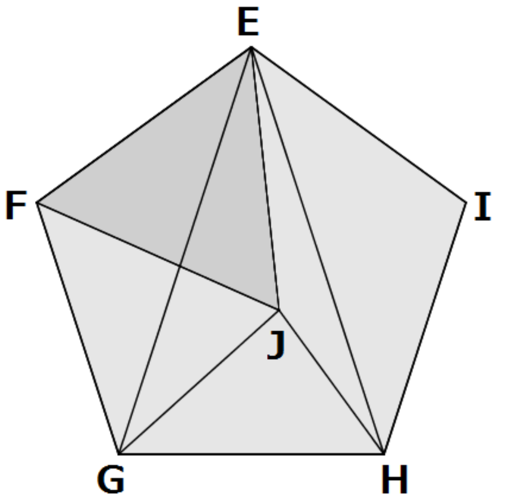


図１

このような角度の問題は、上記のように特殊な解法である場合がほとんどであるため、初等幾何的に一般化することは難しい。しかし、三角関数を用いることで、この問題は以下のように一般化することができた。

定理１

△ABC とその内部にある点 D において、

∠DBA＝θ_1, ∠DBC＝θ_2, ∠DCB＝θ_3,

∠DCA＝θ_4, ∠BAC＝θ_5,　∠BAD＝x とするとき、

$$\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{\tan\theta_5}=\frac{\sin\theta_2\sin\theta_4}{\sin\theta_1\sin\theta_3\sin\theta_5}$$

が成り立つ。

(証明)

図２のように、点 D から辺 BC へ降ろした垂線の足を H とする。また、CD＝a とおく。すると、DH＝$a\sin\theta_3$ より、

$\sin\theta_2=\dfrac{\text{DH}}{\text{DB}}=\dfrac{a\sin\theta_3}{\text{DB}}$ ゆえ、

$$\text{DB}=\frac{a\sin\theta_3}{\sin\theta_2}\quad\cdots①$$

ここで、△ABD と△ACD において、正弦定理より、

$$\frac{\sin\theta_1}{\text{AD}}=\frac{\sin x}{\text{DB}}\quad\cdots②$$

$$\frac{\sin\theta_4}{\text{AD}}=\frac{\sin(\theta_5-x)}{a}\quad\cdots③$$

を得る。②に①を代入して、

$$\frac{\sin\theta_1}{\text{AD}}=\frac{\sin x\sin\theta_2}{a\sin\theta_3}\quad\cdots④$$

③, ④をそれぞれ $\dfrac{1}{\text{AD}}$ について解くことで、

$\dfrac{\sin(\theta_5-x)}{a\sin\theta_4}=\dfrac{\sin x\sin\theta_2}{a\sin\theta_1\sin\theta_3}$ から、

$$\frac{\sin(\theta_5-x)}{\sin x}=\frac{\sin\theta_2\sin\theta_4}{\sin\theta_1\sin\theta_3}.$$

加法定理より、

$$\frac{\sin\theta_5\cos x-\cos\theta_5\sin x}{\sin x}=\frac{\sin\theta_2\sin\theta_4}{\sin\theta_1\sin\theta_3},$$

$$\frac{\sin\theta_5}{\tan x}-\cos\theta_5=\frac{\sin\theta_2\sin\theta_4}{\sin\theta_1\sin\theta_3}$$

これを両辺 $\sin\theta_5$ で割ることで、求める式が得られる。　　(Q. E. D.)

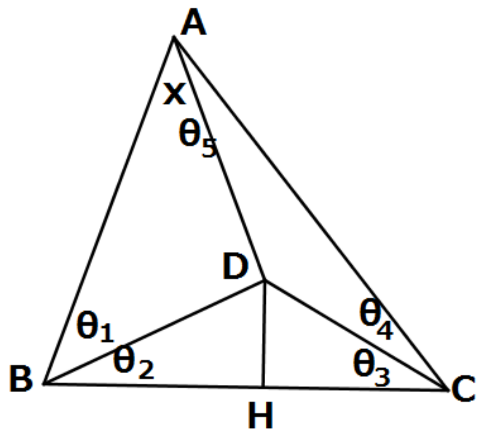


図２

ちなみに、先程の例題１の角度を定理１に代入すると、

$$\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{\tan 36^\circ}=\frac{\sin 42^\circ \sin 18^\circ}{\sin 30^\circ \sin 54^\circ \sin 36^\circ},$$

$$\frac{1}{\tan x}=\frac{2\sin 42^\circ \sin 18^\circ}{\cos 36^\circ \sin 36^\circ}+\frac{\cos 36^\circ}{\sin 36^\circ}=\frac{4\sin 42^\circ \sin 18^\circ}{\sin 72^\circ}+\frac{\cos 36^\circ}{2\sin 18^\circ \cos 18^\circ}$$

$$=\frac{8\sin 42^\circ \sin^2 18^\circ+\cos 36^\circ}{2\sin 18^\circ \cos 18^\circ}=\frac{8\sin 18^\circ\left\{-\frac{1}{2}\left(\cos 60^\circ-\cos 24^\circ\right)\right\}+\cos 36^\circ}{2\sin 18^\circ \cos 18^\circ}$$

$$=\frac{4\sin 18^\circ \cos 24^\circ-2\sin 18^\circ+\sin 54^\circ}{2\sin 18^\circ \cos 18^\circ}$$

$$=\frac{4\sin 18^\circ \cos 24^\circ-\sin 18^\circ+2\cos 36^\circ \sin 18^\circ}{2\sin 18^\circ \cos 18^\circ}=\frac{4\cos 24^\circ-1+2\cos 36^\circ}{2\cos 18^\circ}$$

$$=\frac{2\cos 24^\circ \sin 24^\circ-\frac{1}{2}\sin 24^\circ+\cos 36^\circ \sin 24^\circ}{\cos 18^\circ \sin 24^\circ}$$

ここで、分子は、

$$2\cos 24^\circ \sin 24^\circ-\frac{1}{2}\sin 24^\circ+\cos 36^\circ \sin 24^\circ$$

$$=\sin 48^\circ-\frac{1}{2}\sin 24^\circ+\frac{1}{2}\sin 60^\circ-\frac{1}{2}\sin 12^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cos 42^\circ+\frac{1}{2}\left(\sin 48^\circ-\sin 12^\circ\right)+\frac{1}{2}\left(\sin 60^\circ-\sin 24^\circ\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cos 42^\circ+\cos 42^\circ \sin 18^\circ+\cos 30^\circ \sin 18^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cos 42^\circ+\left(\cos 42^\circ+\cos 30^\circ\right)\sin 18^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cos 42^\circ+2\cos 36^\circ \cos 6^\circ \sin 18^\circ=\frac{1}{2}\cos 42^\circ+2\cdot\frac{1}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}\cos 6^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cos 42^\circ+\frac{1}{2}\cos 6^\circ=\cos\frac{42^\circ-6^\circ}{2}\cos\frac{42^\circ+6^\circ}{2}=\cos 18^\circ \cos 24^\circ$$

となるので、$\frac{1}{\tan x}=\frac{\cos 24^\circ}{\sin 24^\circ}$ より、$x=24^\circ$を得る。

しかし、上の計算のように、実際に角度を求めようとすると複雑になり、問題を解く際はあまり実用的ではない。

3.1.2　面積

次に、面積を求める問題について考える。

<u>例題 2</u>

△ABC の重心を G とする。$\mathrm{GA}=2\sqrt{3}$ $\mathrm{GB}=2\sqrt{2}$, $\mathrm{GC}=2$ であるとき、△ABC の面積を求めよ。　［日本数学オリンピック 1991］

$\boxed{\text{解答}}$

図 3 のように、AG の延長上に点 P を、AG＝GP をみたすようにとる。AP と BC の交点を D とすると、D は辺 BC の中点なので、$\mathrm{GD}=\mathrm{DP}=\frac{1}{2}\mathrm{AG}$ が成り立つ。したがって、四角形 BGCP は平行四辺形であり、BP＝GC＝2 である。

さらに、$\mathrm{GB}^2+\mathrm{BP}^2=12=\mathrm{GP}^2$ より、∠GBP＝90° だから、四角形 BGCP は長方形である。よって、

$$\triangle\mathrm{BGC}=\frac{1}{2}\times\mathrm{BG}\times\mathrm{GC}=2\sqrt{2}\,.$$

ゆえに、$\triangle\mathrm{ABC}=3\triangle\mathrm{BGC}=6\sqrt{2}$ と求められた。　(終)

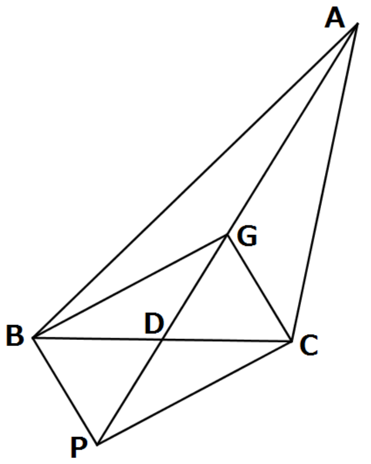


図 3

この問題は、∠GBP＝90°を導くことで、面積が求めやすくなっている。また、この問題について G から各頂点までの距離を文字でおくことにより、以下の結果が得られた。

<u>定理 2</u>

面積が S である△ABC の重心を G とし、GA＝a , GB＝b , GC＝c とする。

このとき、

$$S=\frac{3}{4}\sqrt{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}$$

が成り立つ。

(証明)

直線 AG と辺 BC の交点を M とする。このとき、M は辺 BC の中点である。また、重心の性質から、AG : GM＝2 : 1 であるから、$\mathrm{GM}=\frac{a}{2}$ とかける。ここで、△GBC において、中線定理より、

$$b^2+c^2=2\left(\frac{a^2}{4}+\mathrm{BM}^2\right)=\frac{a^2}{2}+2\mathrm{BM}^2$$

なので、

$$\mathrm{BC}^2=4\mathrm{BM}^2=2b^2+2c^2-a^2 \quad \cdots①$$

同様にして、

$$\mathrm{CA}^2=2c^2+2a^2-b^2 \quad \cdots②$$

$$\mathrm{AB}^2=2a^2+2b^2-c^2 \quad \cdots③$$

が成り立つ。ところで、いま、

$$S=\frac{1}{2}\times\mathrm{CA}\times\mathrm{AB}\times\sin\angle\mathrm{CAB}$$

であるが、この式を両辺 2 倍してから 2 乗すると、

$$\begin{aligned}4S^2&=\mathrm{CA}^2\mathrm{AB}^2\sin^2\angle\mathrm{CAB}\\&=\mathrm{CA}^2\,\mathrm{AB}^2(1-\cos^2\angle\mathrm{CAB})\end{aligned}$$

$$=\mathrm{CA}^2\mathrm{AB}^2\left\{1-\left(\frac{\mathrm{CA}^2+\mathrm{AB}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}}\right)^2\right\}$$

$$=\mathrm{CA}^2\mathrm{AB}^2-\frac{1}{4}\left(\mathrm{CA}^2+\mathrm{AB}^2-\mathrm{BC}^2\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}\left\{4\mathrm{CA}^2\mathrm{AB}^2-\left(\mathrm{CA}^2+\mathrm{AB}^2-\mathrm{BC}^2\right)^2\right\}$$

となるので、この式に①，②，③を代入して、整理すると以下を得る。

$$4S^2=\frac{1}{4}(18a^2b^2+18b^2c^2+18c^2a^2 -9a^4-9b^4-9c^4)$$

ゆえに、両辺を$\frac{1}{4}$倍してから平方根をとると、示すべき等式が導かれる。(Q. E. D.)

上述の例2は重心についての問題だが、これを内心で考えると、次の定理が成り立つことがわかった。

定理3

△ABC において、内心を I とし、$\mathrm{IB}\cdot\mathrm{IC}=\alpha,\ \mathrm{IC}\cdot\mathrm{IA}=\beta,\ \mathrm{IA}\cdot\mathrm{IB}=\gamma$ とする。また、∠IBC＝θとする。このとき、

$$\gamma\alpha\sin^3\theta +(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\sin^2\theta-\beta^2=0$$

が成り立つ。

(証明)

図4のように、IA＝a , IB＝b , IC＝c とおく。△IAB において、正弦定理より、

$$\frac{a}{\sin\theta}=\frac{b}{\sin\angle\mathrm{IAB}},\quad \sin\angle\mathrm{IAB}=\frac{b\sin\theta}{a}$$

より、

$$\cos^2\angle\mathrm{IAB}=1-\frac{b^2\sin^2\theta}{a^2}$$

$$=\frac{a^2-b^2\sin^2\theta}{a^2}$$

ここで、∠BAC＜180°より、∠IAB＜90°であるから、cos∠IAB＞0 である。ゆえに、

$$\sin\angle\mathrm{IAB}=\frac{b\sin\theta}{a}\quad\cdots①$$

$$\cos\angle\mathrm{IAB}=\frac{\sqrt{a^2-b^2\sin^2\theta}}{a}\quad\cdots②$$

が成り立つ。

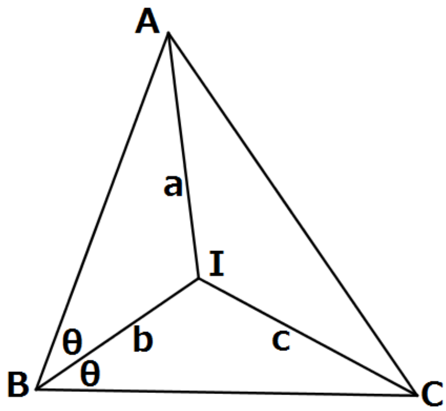


図4

また、△IBC において、正弦定理より、

$$\sin\angle\mathrm{BCI}=\frac{b\sin\theta}{c}\quad\cdots③$$

ここで、

$$\angle\mathrm{BCI}=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle\mathrm{ABC}-\angle\mathrm{CAB})$$

$$=90^\circ-\theta-\angle\mathrm{IAB}$$

より、

$$\begin{aligned}&\sin\angle\mathrm{BCI}\\&=\sin\{90^\circ-(\theta+\angle\mathrm{IAB})\}\\&=\cos(\theta+\angle\mathrm{IAB})\\&=\cos\theta\cos\angle\mathrm{IAB}-\sin\theta\sin\angle\mathrm{IAB}\end{aligned}$$

①，②を代入して、

$$\sin\angle\mathrm{BCI}=\frac{\cos\theta\sqrt{a^2-b^2\sin^2\theta}}{a}-\frac{b\sin^2\theta}{a}$$

ゆえに、③とあわせて、

$$\frac{\cos\theta\sqrt{a^2-b^2\sin^2\theta}}{a}=\frac{b\sin\theta}{c}+\frac{b\sin^2\theta}{a}$$

両辺を２乗してから、整理すると、

$$2ab^2c\sin^3\theta$$
$$+(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\sin^2-c^2a^2=0$$

この式において、$bc=\alpha,\ ca=\beta, ab=\gamma$ とおけば、求める等式が得られる。

(Q. E. D.)

この等式を $\sin\theta$ についての方程式とみて $\sin\theta$ を求めれば、三角形 ABC の面積を求めることができるが、$\sin\theta$ を求めるには 3 次方程式を解く必要があり、△ABC の面積を IA, IB, IC だけで表すと複雑な式となる。

次も、五心が用いられている問題である。

<u>例題 3</u>

△ABC の内心を I, 外心を O とする。AB＝2, AC＝3, ∠AIO＝90°が成立しているとき、△ABC の面積を求めよ。　［日本ジュニア数学オリンピック 2011 予選］

解答

図５のように、辺 AB, AC の中点をそれぞれ M, N とすると、∠AMO＝∠ANO＝90°が成り立つ。また、∠AIO＝90°であるから、円周角の定理の逆より、5 点 A, M, I, O, N は同一円周上にある。特に、四角形 AMIN は円に内接するので、

∠INC＝180°－∠IMB …①

が成り立つ。ここで、三角不等式より、BC＞AC－AB＝１＝AM なので、辺 BC 上に、BD＝1 となる点 D をとることができる。このとき、∠MBI＝∠DBI であるから、△MBI≡△DBI である。ゆえに、∠IMB＝∠IDB である。①とあわせると、

∠IDC＝180°－∠IDB

＝180°－∠IMB＝∠INC

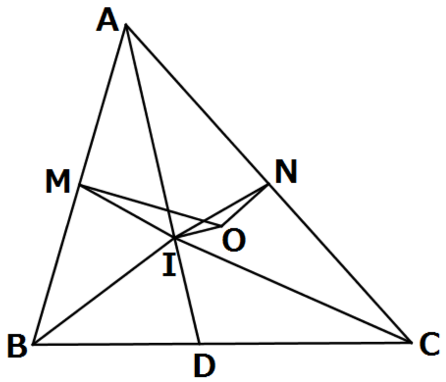


図５

また、∠DCI＝∠NCI であるから、△IDC≡△INC が成り立つ。よって、

CD＝CN＝$\dfrac{3}{2}$ であるから、BC＝$\dfrac{5}{2}$.

3 辺の長さが得られたので、ヘロンの公式に代入すると、△ABC＝$\dfrac{15\sqrt{7}}{16}$ を得る。

(終)

この問題において、辺の長さである 2 や 3 という数値自体にはそれほど意味がなく、∠AIO＝90°かつ $\dfrac{3}{2}$AB ≦AC を満たすとき、BC＝$\dfrac{\mathrm{AB}+\mathrm{AC}}{2}$ と表せることは容易にわかる。つまり、∠AIO の大きさが 90°であるということが、この問題で最も重要なポイントであることがわかる。そこで、∠AIO＝θ とすると、以下の定理が得られる。

<u>定理 4</u>

鋭角三角形 ABC において、内心を I, 外心を O とする。また、AB＝c, AC＝b,

$\dfrac{3}{2}c \leqq b$ とし、△ABC の外接円の半径を R とする。∠AIO＝θとして、

$$\angle\text{ABO} < \theta < 180° - \angle\text{ABO}$$

を満たすとき、以下が成り立つ。

$$\left(\frac{b}{R} + \frac{1}{\tan\theta}\right)\sqrt{4R^2 - c^2} + \left(\frac{c}{R} - \frac{1}{\tan\theta}\right)\sqrt{4R^2 - b^2} = b + c$$

(証明)

辺AB, ACの中点をそれぞれM, Nとする。∠ABO＜θ＜180°－∠ABO より、辺 AB 上に∠ADO＝θとなる点 D をとることができる(図6)。また、$c < b$ なので、∠ACB＜∠ABC であり、

$$\angle\text{ABO} = 90° - \angle\text{ACB},$$
$$\angle\text{CAO} = 90° - \angle\text{ABC}$$

とかけるので、∠CAO＜∠ABO＜θ, θ＜180°－∠ABO ＜180°－∠CAO が成り立つので、辺 AC 上に∠OEC＝θとなる点 E をとることができる。

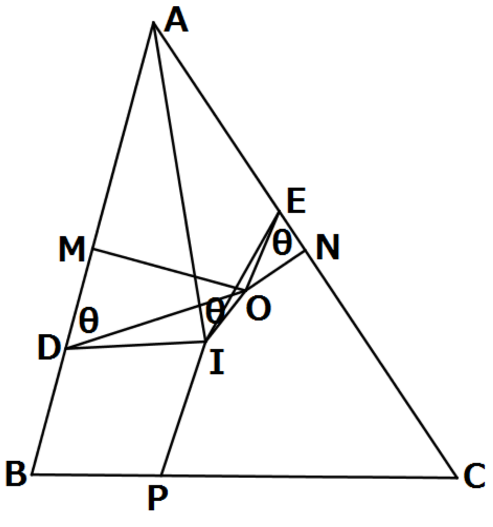


図6

このとき、$\text{OM}^2 = \text{OA}^2 - \text{AM}^2$

$$= R^2 - \frac{c^2}{4} = \frac{4R^2 - c^2}{4}$$

より、$\text{OM} = \dfrac{\sqrt{4R^2 - c^2}}{2}$.

そして、∠OMD＝90°であるから、

θ＜90°のとき、

$$\tan\theta = \frac{\text{OM}}{\text{DM}} = \frac{\sqrt{4R^2 - c^2}}{2\text{DM}},$$

$$\text{DM} = \frac{\sqrt{4R^2 - c^2}}{2\tan\theta}$$

ゆえに、$\text{BD} = \dfrac{c}{2} - \dfrac{\sqrt{4R^2 - c^2}}{2\tan\theta}$.

$\theta \geqq 90°$のときは、点 D が線分 AM 上にあるが、$\text{DM} = -\dfrac{\sqrt{4R^2 - c^2}}{2\tan\theta}$ が成り立つので、この場合も、$\text{BD} = \dfrac{c}{2} - \dfrac{\sqrt{4R^2 - c^2}}{2\tan\theta}$ とかける。同様にして、$\text{CE} = \dfrac{b}{2} + \dfrac{\sqrt{4R^2 - b^2}}{2\tan\theta}$ を得る。

いま、三角不等式より、BC $> b - c \geqq \dfrac{c}{2}$ ＞BD なので、辺 BC 上に、BP＝BD となる点 P をとることができる。すると、△BDI≡△BPI であるから、

$$\angle\text{IPC} = 180° - \angle\text{BDI} \cdots ①$$

が成り立つ。また、∠ADO＝θ, ∠AIO＝θ, ∠AEO＝180°－θより、5点 A, D, I, O, E は同一円周上にあるので、特に、四角形 ADIE について、

$$\angle\text{IEC} = 180° - \angle\text{BDI} \cdots ②$$

①, ②より、∠IPC＝∠IEC なので、△IPC≡△IEC. ゆえに、

$$\text{CP} = \text{CE} = \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{4R^2 - b^2}}{2\tan\theta}$$

つまり、

$$\mathrm{BC} = \frac{c}{2} + \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{4R^2 - c^2}}{2\tan\theta} + \frac{\sqrt{4R^2 - b^2}}{2\tan\theta} \quad \cdots ③$$

一方、正弦定理より、

$$\sin\angle\mathrm{ABC} = \frac{b}{2R},\quad \sin\angle\mathrm{BCA} = \frac{c}{2R}$$

であるから、

$$\cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{\sqrt{4R^2 - b^2}}{2R},$$

$$\cos\angle\mathrm{BCA} = \frac{\sqrt{4R^2 - c^2}}{2R}$$

を得る。ここで、A から BC へ降ろした垂線の足を H とすると、

$$\mathrm{BH} = \frac{c\sqrt{4R^2 - b^2}}{2R},\quad \mathrm{CH} = \frac{b\sqrt{4R^2 - c^2}}{2R}$$

とかけるので、

$$\mathrm{BC} = \frac{c\sqrt{4R^2 - b^2} + b\sqrt{4R^2 - c^2}}{2R} \cdots ④$$

と表すことができる。そして、③を④へ代入してから整理すると、求める式が得られる。(Q. E. D.)

この一般化した命題も、もともとの問題の解答と同じアイデアで証明することができた。しかし、θ の角度によっては、補助線を引くことができない場合があり、$\angle\mathrm{ABO} < \theta < 180° - \angle\mathrm{ABO}$ という条件が必要となる。

3.1.3　円に外接する四角形

最後に、円に外接する四角形に関する問題について考える。

<u>例題 4</u>

四角形ABCDが点Oを中心とする円に外接しており、OA＝5, OB＝6, OC＝7, OD＝8 が成立している。線分 AC の中点を M, 線分 BD の中点を N とするとき、OM : ON を求めよ。　［日本数学オリンピック 2011 予選］

解答

図 7 のように、円の半径を r とし、辺 DA, AB, BC, CD と円の接点をそれぞれ P, Q, R, S とする。また、線分 PQ, QR, RS, SP の中点をそれぞれ A′, B′, C′, D′ とする。

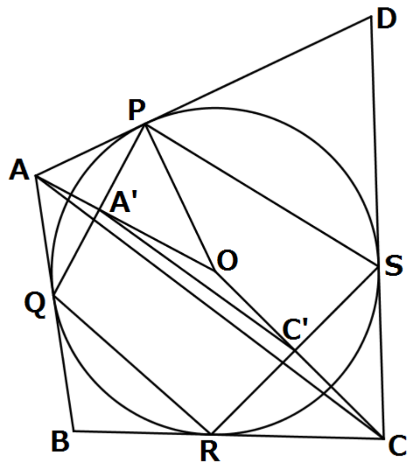


図 7

このとき、3 点 A, A′, O は同一直線上にあり、∠ OA′P ＝90°, ∠OPA＝90°であるから、△OPA と△ OA′P は相似である。ゆえに、AO : PO＝PO : A′ O から、

$$\mathrm{A'O} = \frac{r^2}{\mathrm{AO}}.$$

同様にして、$\mathrm{C'O} = \dfrac{r^2}{\mathrm{CO}}$ を得る。よって、A′ O : C′ O＝CO : AO であるから、△OAC と△ OC′A′ は相似である。ここで、線分 A′C′ の中点を M′ とすると、M と M′ はこの相似により対応するので、

OM : OM′ ＝OA : OC′.

ゆえに、$OM' = \dfrac{OM \cdot r^2}{OA \cdot OC}$. 同様にして、線分$B'D'$の中点を$N'$とすると、

$$ON' = \frac{ON \cdot r^2}{BO \cdot DO}.$$

ここで、四角形$A'B'C'D'$は平行四辺形なので、線分$A'C'$と$B'D'$はそれぞれの中点で交わり、$M' = N'$である。ゆえに、

$$\frac{OM \cdot r^2}{OA \cdot OC} = \frac{ON \cdot r^2}{OB \cdot OD}.$$

したがって、

$$OM : ON = OA \cdot OC : OB \cdot OD$$
$$= 35 : 48$$

より、答えは 35 : 48.　　(終)

この問題では、$M' = N'$ということを使わなければ、$OM : ON$を求めるのは難しい。$M' = N'$となるのは四角形特有の性質であるから、この問題を一般の多角形について考えると、とたんに難しくなる。そこで、問題の図において、他に性質がないか調べたところ、次の定理を得た。

<u>定理 5</u>

中心Oの円に外接する四角形ABCDにおいて、OA＝a, OB＝b, OC＝c, OD＝dとするとき、以下が成り立つ。

$$AB = ab\sqrt{\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{d}+\frac{d}{c}}{ab+cd}}$$

$$\text{または}\quad AB = \sqrt{a^2 + b^2}$$

<u>証明</u>

まず、以下の補題が成り立つことを示す。

<u>補題 1</u>

AB : CD＝ab : cd　であり、

∠AOB＝∠COD

　　または ∠AOB+∠COD＝180°.

(補題 1 の証明)

辺 DA, AB, BC, CD と円の接点をそれぞれ P, Q, R, S とする。また、PQ, QR, RS, SP の中点をそれぞれ A′, B′, C′, D′ とすると、

例題 4 の解答より、$OA' = \dfrac{r^2}{OA}$, $OB' = \dfrac{r^2}{OB}$ とかける。

ゆえに、OA : OB＝OB′ : OA′なので、△OABと△OB′A′は相似である。よって、

AB : A′B′＝OA : OB′,

$$A'B' = \frac{AB \cdot OB'}{OA} = \frac{AB \cdot r^2}{OA \cdot OB}.$$

ここで、A′, B′はそれぞれ PQ, QR の中点なので、2A′B′＝PR. ゆえに、

$$PR = \frac{2AB \cdot r^2}{OA \cdot OB}.$$

同様にして、$PR = \dfrac{2CD \cdot r^2}{OC \cdot OD}$を得るので、

$$\frac{2AB \cdot r^2}{OA \cdot OB} = \frac{2CD \cdot r^2}{OC \cdot OD}.$$

したがって、AB : CD＝ab : cdを得る。ここで、O から辺 AB, CD に降ろした垂線の長さは等しいので、△OABと△OCDの面積比はab : cdとなる。一方、

△OAB : △OCD

　＝$ab\sin$∠AOB : $cd\sin$∠COD

とかけるので、sin ∠AOB＝sin ∠COD.

ゆえに、∠AOB＝∠COD または、∠AOB＋∠COD＝180°である。　(Q. E. D.)

(定理 5 の証明の続き)

∠AOB が 90°であるときと、90°でないときに場合分けをする。

(ⅰ) ∠AOB＝90°のとき

三平方の定理より、$\mathrm{AB}=\sqrt{a^2+b^2}$ が成り立つ。

(ⅱ) ∠AOB≠90°のとき

補題 1 より、正の実数 k を用いて、AB＝kab, CD＝kcd とかける。ここで、∠AOB＋∠COD＝180°であるから、∠AOD＋∠BOC＝180°が成り立つので、

$$\cos\angle\mathrm{AOB}=-\cos\angle\mathrm{COD}$$

が成り立つ。ここで、

$$\cos\angle\mathrm{AOB}=\frac{a^2+b^2-(kab)^2}{2ab},$$

$$\cos\angle\mathrm{COD}=\frac{c^2+d^2-(kcd)^2}{2cd}$$ なので、

$$\frac{a^2+b^2-(kab)^2}{2ab}=-\frac{c^2+d^2-(kcd)^2}{2cd}$$

が成り立つ。これを k について解くと、

$$k=\sqrt{\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{d}+\frac{d}{c}}{ab+cd}}$$ であるから、

$$\mathrm{AB}=kab=ab\sqrt{\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{d}+\frac{d}{c}}{ab+cd}}$$

を得る。ゆえに、題意は示された。(Q. E. D.)

また、以下の定理を得た。

<u>定理 6</u>

円に内接する四角形 ABCD について、対角線の交点を O とする。O から、直線 AB, BC, CD, DA へ降ろした垂線の足をそれぞれ X, Y, Z, W とする。このとき、四角形 XYZW は中心 O の円に外接する。

(証明)

図 8 において、円周角の定理より、∠DAO＝∠OBC．また、∠AWO＝∠BYO＝90°より、∠AOW＝∠BOY．ここで、四角形 AXOW と四角形 BXOY は円に内接するので、∠AOW＝AXW, ∠BOY＝∠BXY が成り立つ。ゆえに、∠AXW＝∠BXY なので、∠WXO＝∠YXO を得る。

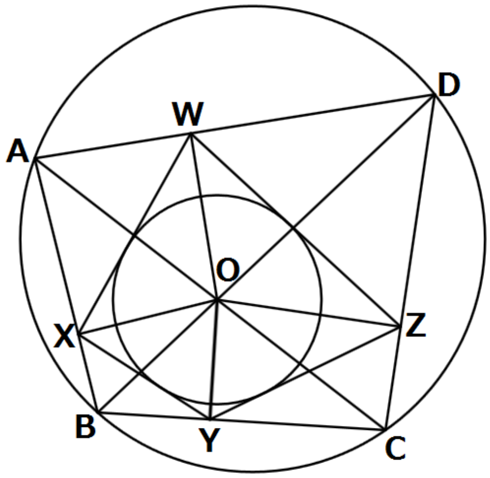


図 8

よって、O は∠WXY の二等分線上にある。同様にして、O は 4 つの内角の二等分線上にあることが示されるので、四角形 XYZW は、中心を O とする円に外接する。

(Q. E. D.)

ちなみに、定理 6 は次の問題から着想を得たものである。

<u>例題 5</u>

円周 X は四角形 PQRS に内接している。また、四角形 PQRS の辺を延長した直線のうち 3 本と接するような円周 A, B, C, D を図 9 のようにとる。円周 A, B, C, X の半径はそれぞれ 2, 1, 4, 3 である。このとき、円

周Dの半径を求めよ。　［日本ジュニア数学オリンピック 2012 予選］

次に、この問題について考察していく。

参考文献[2]には、点 P, Q, R, S から円の接点までの長さに着目した解答が記述されていたが、点 P, Q, R, S から円の中心までの長さに着目した次のような解き方も可能であることを発見した。

別解

5つの円周 A, B, C, D, X の中心をそれぞれ A_0, B_0, C_0, D_0, O として、半径をそれぞれ a, b, c, d, x とする(図9)。

$\angle C_0PO=\angle C_0QO=90^\circ$ より、$\angle POQ=180^\circ-\angle PC_0Q$ であるから、$\sin\angle POQ=\sin\angle PC_0Q$ が成り立つ。ゆえに、

$$\triangle POQ:\triangle PC_0Q=OP\cdot OQ:C_0P\cdot C_0Q$$

がわかる。一方、線分 PQ は共通なので、$\triangle POQ:\triangle PC_0Q=x:c$ であることがわかる。

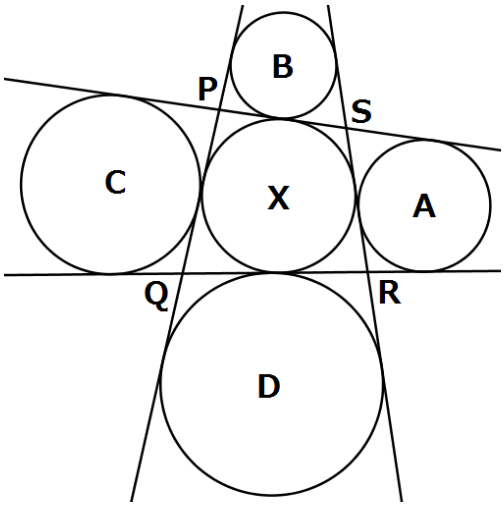


図9

よって、$OP\cdot OQ:C_0P\cdot C_0Q=x:c$ より、

$$C_0P\times C_0Q\times\frac{x}{c}=OP\times OQ\quad\cdots①$$

同様にして、

$$A_0S\times A_0R\times\frac{x}{a}=OS\times OR\quad\cdots②$$

$$B_0S\times B_0P\times\frac{x}{b}=OS\times OP\quad\cdots③$$

$$D_0Q\times D_0R\times\frac{x}{d}=OQ\times OR\quad\cdots④$$

を得る。ここで、

$$①\times②=OP\cdot OQ\cdot OR\cdot OS=③\times④$$

が成り立つので、

$$A_0S\times A_0R\times C_0P\times C_0Q\times\frac{x}{a}\times\frac{x}{c}=B_0S\times B_0P\times D_0Q\times D_0R\times\frac{x}{b}\times\frac{x}{d},$$

$$A_0S\times A_0R\times C_0P\times C_0Q\times bd=B_0S\times B_0P\times D_0Q\times D_0R\times ac$$

を得る。いま、A_0 から RS へ降ろした垂線の足を I，B_0 から SP へ降ろした垂線の足を J とすると、$\triangle A_0IS\backsim\triangle B_0JS$ より、$A_0S:B_0S=a:b$ が成り立つ。ゆえに、

$B_0S=\dfrac{b}{a}A_0S$ が成り立つ。同様にして、

$$B_0P=\frac{b}{c}C_0P,\ D_0Q=\frac{d}{c}C_0Q,\ D_0R=\frac{d}{a}A_0R$$

が成り立つので、

$$A_0S\times A_0R\times C_0P\times C_0Q\times bd=A_0S\times A_0R\times C_0P\times C_0Q\times\frac{b}{a}\times\frac{b}{c}\times\frac{d}{c}\times\frac{d}{a}\times ac$$

よって、$ac=bd$ を得るので、$d=8$ である。　(終)

この解答の最後の式から、一般に、

$$\mathrm{A_0S \times A_0R \times C_0P \times C_0Q}$$
$$\mathrm{= B_0S \times B_0P \times D_0Q \times D_0R}$$
が成立することがわかる。

３．２　数論

数論は、以下の問題について詳しく考察することができた。

例題 6

$8^n + n$ が $2^n + n$ で割り切れるような正整数 n をすべて求めよ。　［日本数学オリンピック 2009 本選］

$\boxed{\text{解答}}$

まず、以下のように変形する。

$$8^n + n = (2^n)^3 + n$$
$$= (2^n + n)\left((2^n)^2 - 2^n \cdot n + n^2\right) - n^3 + n.$$

よって、$8^n + n$ が $2^n + n$ で割り切れることは、$n^3 - n$ が $2^n + n$ で割り切れることと同値である。ゆえに、$n^3 - n \geqq 2^n + n$ である必要がある。

$n = 1$ のときは、$n^3 - n = 0$ であり、条件を満たす。$n \geqq 2$ のときは、$n^3 > 2^n$ であることが必要である。ここで、正整数 n に対して、$f(n) = \dfrac{n^3}{2^n}$ とすると、$n \geqq 4$ について、

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3$$
$$\leqq \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right)^3 < 1$$

である。また、$f(10) < 1$ であるから、$n \geqq 10$ について、$n^3 < 2^n$.

ゆえに、$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ について調べればよい。すると、$n = 1, 2, 4, 6$ を得る。　(終)

この問題の一般形として、次の定理が得られた。

定理 7

a を 2 以上の整数、k を 3 以上の奇数とする。$a^{nk} + n$ が $a^n + n$ で割り切れるような正の整数 n について、以下が成り立つ。ただし、e はネイピア数を表す。

(1) $k \leqq a$ のとき、$n \leqq k - 1$

(2) $3 \leqq a < k$ のとき、$n < k \cdot \dfrac{\log k - 1}{\log a - 1}$

(3) $a = 2$ のとき、
$$n < k \cdot \frac{\log k + \log 3 - 1}{\log 2 - \frac{1}{3}}$$

(証明)

(1) $k \leqq a$ とする。

k は奇数であるから、任意の整数 x, y について、$x^k + y^k$ は $x + y$ で割り切れる。ゆえに、以下が成り立つ。

$$a^{nk} + n = (a^n)^k + n^k - (n^k - n)$$
$$\equiv n^k - n \pmod{a^n + n}$$

つまり、$a^{nk} + n$ が $a^n + n$ で割り切れることは、$n^k - n$ が $a^n + n$ で割り切れることと同値である。ゆえに、$n^k - n \geqq a^n + n$ が必要である。

$n = 1$ のときは $n^k - n = 0$ なので、条件を満たす。$n \geqq 2$ のときは、$n^k > a^n$ であることが必要である。いま、$k \leqq a$ であるから、$n \geqq k$ について条件を満たすと仮定すると、$n^k \leqq k^n \leqq a^n$ が成り立つので、矛盾する。

ゆえに、$n \leqq k-1$が必要である。

⑵ $3 \leqq a < k$とする。

先程の議論から、$n \geqq 2$のとき、$n^k > a^n$となることが必要である。ここで、

$f(n) = \dfrac{n^k}{a^n}$とすると、$n \geqq k$において、以下が成り立つ。

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{1}{a}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^k = \frac{1}{a}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^k$$
$$\leqq \frac{1}{a}\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$$

いま、$k \geqq 3$について、数列$a_k = \left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k$を考えると、この数列は単調増加であり、ネイピア数$e$に収束する。また、$a \geqq 3$であることから、以下を得る。

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} \leqq \frac{1}{a}\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < \frac{e}{a} < 1.$$

すなわち、$f(n)$は$n \geqq k$において単調減少である。また、$k \geqq a$より、$f(k) = \dfrac{k^k}{a^k} > 1$なので、$1 < f(k+m)$を満たす実数$m$の範囲について調べればよい。

いま、$\dfrac{f(n+1)}{f(n)} < \dfrac{e}{a}$, $f(k) = \dfrac{k^k}{a^k}$より、

$1 < f(k+m) < \dfrac{k^k}{a^k}\cdot\dfrac{e^m}{a^m}$ が成り立つ。

ゆえに、$a^k \cdot a^m < k^k \cdot e^m$.

ここで、正の実数pを用いて、$m = pk$とおくと、$a^k \cdot a^{pk} < k^k \cdot e^{pk}$ から、

$\left(a^{p+1}\right)^k < \left(k \cdot e^p\right)^k$, $a^{p+1} < k \cdot e^p$ より

$\left(\dfrac{a}{e}\right)^p \cdot a < k$, $p < \log_{\frac{a}{e}} \dfrac{k}{a}$.

ゆえに、$m < k \log_{\frac{a}{e}} \dfrac{k}{a}$ であり、

$n < k + m < k\left(\log_{\frac{a}{e}} \dfrac{k}{a} + 1\right)$ を満たすnについて$f(n) > 1$である。ここで、

$$k\left(\log_{\frac{a}{e}} \frac{k}{a} + 1\right) = k \cdot \frac{\log k - 1}{\log a - 1}$$

より、題意は示された。

⑶ $a = 2$とする。

先程の議論同様、$f(n) = \dfrac{n^k}{2^n}$について考える。すると、$n \geqq 3k$において、以下が成り立つ。

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^k = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^k$$
$$\leqq \frac{1}{2}\cdot\left\{\left(1+\frac{1}{3k}\right)^{3k}\right\}^{\frac{1}{3}} < \frac{\sqrt[3]{e}}{2} < 1.$$

すなわち、$f(n)$は$n \geqq 3k$において単調減少である。また、$k \geqq 3$ より、

$$f(3k) = \frac{(3k)^k}{2^{3k}} = \left(\frac{3k}{8}\right)^k > 1$$

なので、$1 < f(3k+m)$ を満たす実数mの範囲について調べればよい。⑵と同様に計算すると、$m < k \log_{\frac{2}{\sqrt[3]{e}}} \dfrac{3k}{8}$ が導かれ、

$n < k\left(\log_{\frac{2}{\sqrt[3]{e}}} \dfrac{3k}{8} + 3\right)$を満たす$n$について

$f(n) > 1$ である。ここで、

$$k\left(\log_{\frac{2}{\sqrt[3]{e}}} \frac{3k}{8} + 3\right) = k \cdot \frac{\log k + \log 3 - 1}{\log 2 - \frac{1}{3}}$$

より、題意は示された。 (Q. E. D.)

例題 6 は $(a, k)=(2, 3)$ の場合であり、これを定理 6 の(3)に代入すると、

$$n < k \cdot \frac{\log k + \log 3 - 1}{\log 2 - \frac{1}{3}} \approx 9.98$$

となり、例題の解答で示された $n<10$ と一致する。しかし、定理 6 の(2)において、$a=4, k=13$ とすると、

$$n < k \cdot \frac{\log k - 1}{\log a - 1} \approx 52.66$$

となるが、GeoGebra を用いてグラフ $y=\frac{x^{13}}{4^x}$ と $y=1$ の交点を求めたところ、$x=32.7$，すなわち、$n<32.7$ が得られ、(a, k) の値によっては誤差が大きくなる。

そこで、$n^k - n = a^n + n$ となる場合を考える。$n=1$ のとき、明らかに成り立たないので、$n \geqq 2$ とする。n を m 回($m \geqq 1$)割り切る素数 p について、a^n は p で割り切れるので、a は p で 1 回以上割り切れる。いま、$p \geqq 3$ とすると、$n^k - a^n = 2n$ より、左辺は p で $\min(mk,\ p^m)$ 回以上割り切れ、右辺は m 回 p で割り切れるので、

$$\min(mk,\ p^m) \leqq m$$

である。$\min(mk,\ p^m) = mk$ のとき、$k \geqq 3$ であるから、明らかに不適である。
$\min(mk,\ p^m) = p^m$ のときも、$p \geqq 3$ より、$p^m > m$ が成り立つので、不適となり、$p=2$ である。

このとき、$\min(mk, 2^m) \leqq m+1$ であるが、$\min(mk, 2^m) = mk$ のときは適さないので、$2^n \leqq m+1$ が成り立つ。$m \geqq 1$ より、$2 \leqq m+1$ であるから、$m=1$ を得る。また、$p \geqq 3$ のとき矛盾することから、$n=2$ である。よって、$2^k - a^2 = 4$ が成り立つ。このとき、a は偶数であるから、正の整数 q を用いて、$a=4q$ または $a=4q-2$ とかける。$a=4q$ とかけたとすると、$k \geqq 3$ から、左辺は 2 で 3 回以上割り切れ、右辺は 2 で 2 回しか割り切れないので、矛盾する。

つまり、$a=4q-2$ である。このとき、

$$2^k = a^2 + 4 = (4q-2)^2 + 4$$

であり、右辺を展開すると $16q^2 - 16q + 8$ となり、これは 2 で 3 回しか割り切れないので、$k=3$ を得る。よって、$q=1$ より、$a=2$ であるから、$(a, k)=(2, 3)$ の場合を除いて、$n^k - n = a^n + n$ を満たす n は存在しない。

次に、$n^k - n = 2(a^n + n)$ となる場合について考える。$n^k - 2a^n = 3n$ となるから、n を m 回割り切る素数 p について、同様の議論により、$p \geqq 5$ とすると矛盾が起きるので、$p=2,3$ を得る。

$p=2$ のとき、$\min(mk,\ 2^m+1) \leqq m$ となるが、これを満たす m は存在しない。また、$p=3$ のとき、$\min(mk, 3^m) \leqq m+1$ となるが、これを満たす m は存在しない。

すなわち、$n^k - n = 2(a^n + n)$ を満たす n は存在しない。

上の議論から、$n^k - n \geqq 3(a^n + n)$ となる。ゆえに、$n^k \geqq 3a^n$ となる必要があるから、$f(n) = \frac{n^k}{a^n} > 3$ が必要である。つまり、$a \geqq 3$ のとき、$3 < f(k+m)$ を満たす実数 m の範囲について考えればよい。上述のように計算すると、

$$n < k\left(\log_{\frac{a}{e}} \frac{k}{a\sqrt[k]{3}} + 1\right)$$

が得られる。特に、$a = 2$ のときは、

$$n < k\left(\log_{\frac{2}{\sqrt[3]{e}}} \frac{3k}{8\sqrt[k]{3}} + 3\right)$$

が得られ、評価を改良することができた。

もう一度、$a = 4,\ k = 13$ のときを考えると、上の式から、$n < 49.82$ が得られる。また、GeoGebra を用いて交点を求めると、$n < 31.59$ が得られるので、少しだけ精度が上がっている。

一般に、正の整数 b について、$n^k - n \geqq b(a^n + n)$ が成り立つことがわかっているとする。

$a \geqq 3$ のときは、

$$n < k\left(\log_{\frac{a}{e}} \frac{k}{a\sqrt[k]{b}} + 1\right),$$

$a = 2$ のときは、

$$n < k\left(\log_{\frac{2}{\sqrt[3]{e}}} \frac{3k}{8\sqrt[k]{b}} + 1\right)$$

が成り立つ。

しかし、b の範囲を求める際、b が具体的な数値である場合について考えることはそれほど難しくないが、一般的に考えることは難しい。また、例題 6 の解答では、最後に直接具体的な値を代入して確認しているので、一般形について、n の具体的な値を求めることは難しい。

k の値が偶数のときは次の結果が得られた。

<u>定理 8</u>

a を 2 以上の整数、k を 2 以上の偶数とする。$a^{nk} + n$ が $a^n + n$ で割り切れるような正の整数 n で、a と互いに素であるものについて、以下が成り立つ。ただし、e はネイピア数を表す。

(1) $k - 1 \leqq a$ のとき、$2 \leqq n \leqq k - 2$

(2) $3 \leqq a < k - 1$ のとき、

$$2 \leqq n < (k-1)\left(\log_{\frac{a}{e}} \frac{k-1}{a} + 1\right)$$

(iii) $a = 2$ のとき、

$$2 \leqq n < (k-1)\left(\log_{\frac{2}{\sqrt[3]{e}}} \frac{3(k-1)}{8} + 3\right)$$

(証明)

まず、$n \geqq 2$ を示す。$n = 1$ と仮定する。このとき、$a^k + 1$ が $a + 1$ で割り切れるが、$k = 2m$（m は正の整数)とおくと、$\mathrm{mod}\ a + 1$ において、

$$a^k + 1 = a^{2m} - 1 + 2 = \left(a^2\right)^m - 1 + 2 \equiv 2$$

であるから、$a \leqq 1$ となるが、これは $a \geqq 2$ に反する。ゆえに、$n \geqq 2$ が示された。

k は偶数であるから、整数 x, y に対して、$x^{k-1} + y^{k-1} \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ x + y)$ が成り立つ。ゆえに、$\mathrm{mod}\ (a^n + n)$ において、

$$\begin{aligned} a^{nk} + n &\equiv a^{nk} + n - a^n - n \\ &= a^{nk} - a^n = a^n\left(a^{nk-n} - 1\right) \\ &= a^n\left\{\left(a^n\right)^{k-1} + n^{k-i} - n^{k-1} - 1\right\} \\ &\equiv -a^n\left(n^{k-1} + 1\right) \end{aligned}$$

よって、$a^n\left(n^{k-1} + 1\right)$ が $a^n + n$ で割り切れるような n について考えればよい。ここで、条件より、a と n は互いに素なので、$a^n + n$ と a^n は互いに素である。ゆえに、$n^{k-1} + 1$ が $a^n + n$ で割り切れるような n について考える。$n \geqq 2$ より、$n^{k-1} > a^n$ が必要である。

これ以降の証明は、定理 6 と同様である。

(Q. E. D.)

４．今後の課題

今回は、特に幾何と数論の問題について考察を行ったが、不等式や場合の数、関数方程式なども一般化や考察を行っていきたい。また、問題間の関係性や有名な定理との関連を探っていくことも目標である。

５．参考文献

(例題の解答はすべて以下の文献を参照とした。)

[1]「広中杯　ハイレベル中学数学に挑戦－これが中学数学の最高峰」, 算数オリンピック委員会 監修, 青木亮二 解説, 講談社

[2]「平面幾何パーフェクトマスター　めざせ、数学オリンピック」, 鈴木晋一, 日本評論社

[3] 「数学オリンピック 2011～2015」, 数学オリンピック財団, 日本評論社

[4]「初等整数パーフェクトマスター　めざせ、数学オリンピック」, 鈴木晋一, 日本評論社

６．謝辞

今回の研究にあたり、ご指導くださいました顧問の川口先生ありがとうございました。