4次完全方陣・対称方陣の性質

5年A組　今中　翔哉
指導教員　川口　慎二

１．要約

サイエンス研究会数学班5年生は魔方陣について学んでいる。今回の研究では、前回の研究ではあまり触れることのなかった4次の完全方陣・対称方陣に関することについて研究を行い、わかったことについて考察を行った。今回は、それらを紹介していく。

キーワード　4次完全方陣、対称方陣、シフト変換

２．研究の背景と目的

前回の研究では、4次方陣のもつ特有な性質について研究を行った。今回の研究では、4次方陣の中でも完全方陣と対称方陣の2つの方陣に焦点をあててそれらの性質や相違点、関係性について研究を行った。

今回の研究の主な目的は、完全方陣と対称方陣に見られる固有の性質をもちいて新たな性質を発見していくことである。その結果を、紹介していきたい。

３．研究内容

３－１．定義

魔方陣とは1から始まる連続した自然数を碁盤の目状に並べ、各行、各行、および対角線の数の和(4次方陣では34)をすべて相等しくしたものをいう。一般に、1辺がnマスの魔方陣をn次魔方陣という。

完全方陣とは行、列、および両対角線の数の和が一定になるだけでなく、汎対角線上の数の和も、すべて等しくなるような方陣のことをいう。ここで、汎対角線とは、図1の**主対角線**(a－f－k－p)、**副対角線**(d－g－j－m)と、それらの平行な位置にある4個の要素からなる分離した対角線を称したものを指す。

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

図1

さらに、**対称方陣**とは、中心に関して対称となっている位置にある数の和がすべて一定(4次対称方陣の場合は17)となっている方陣のことをいう。

8	11	2	13
10	5	16	3
15	4	9	6
1	14	7	12

(4次完全方陣)

11	5	2	16
14	4	7	9
8	10	13	3
1	15	12	6

(4次対称方陣)

３－２．４次方陣の基本性質

はじめに、完全方陣や対称方陣に関わらず、4 次方陣一般に対して成り立つ基本的な性質を紹介しておく。

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

性質 1

$a+d+m+p=34$

$b+c+n+o=34$

$e+i+h+l=34$

$f+g+k+j=34$

性質 2

$b+c=m+p$, $e+i=d+p$

$n+o=a+d$, $h+l=a+m$

性質 3

$a+p=g+j$, $d+m=f+k$

性質 4

$f+g=i+l$, $j+k=e+h$

$g+k=b+m$, $f+j=c+o$

これらの証明は参考文献[1]に記している。

３－３．４次完全方陣

3-3-1　シフト変換

4 次の完全方陣は全部で 48 個ある。
完全方陣では、すべての汎対角線で定和をもつために、次のような性質をもつ。

n 次完全方陣においては、

①最下行を最上行の上側に移動させても、
②最右列を最左列の左側に移動させても、
つねに、n 次完全方陣が得られる。

上記の①，②の変換というのは**シフト変換**といわれる。それぞれ、行のシフト変換、列のシフト変換という。また、この変換は 4 次完全方陣のみならず、すべての完全方陣において成立する。以下に、この変換が成り立つ例を１つ挙げる。

5	16	3	10
4	9	6	15
14	7	12	1
11	2	13	8

→

11	2	13	8
5	16	3	10
4	9	6	15
14	7	12	1

この変換は、4 次の完全方陣の性質を考えるうえで重要になってくる。

3-3-2　シフト変換で導かれる主な性質

次に、完全方陣に見られる特有な性質を挙げる。

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

4 次方陣であるので、第 1 行、第 3 行、第 1 列、第 3 列の和に注目すると、

$a+b+c+d=34$, $i+j+k+l=34$

$a+e+i+m=34$, $c+g+k+o=34$

上の 2 式を足し、下の 2 式を足して比較すると、

$$b+j+l+d=e+g+m+o$$

となり、この左辺、右辺を足すと汎対角線

の和は34なので、34×2となり、

$$b+j+l+d=e+g+m+o=34$$

となる。

この式は、シフト変換を用いることにより、すべての3×3の正方形の隅の数の和は、34となる。…①

そして、完全方陣であるため、次のことも成り立つ。

$$e+j+o+d=34\ ,\ m+j+g+d=34$$

これらから、 $m+g=e+o$.

この性質と、①の性質を組み合わすことによって、

$$m+g=e+o=17$$

とわかる。そして、この式にシフト変換を用いると4組すべての3×3の正方形の対角和は17になることがわかる。

次に、完全方陣は4次方陣のもつ一般的な性質も満たすため、3－2節で紹介したように、

$$f+g+k+j=34$$

が自ずと成り立つので、この式にもシフト変換を用いるとすべての2×2の正方形(9組ある)の隅の和も34になることがわかる。

実際に 上記で示されたような性質が成り立つことを以下で確かめてほしい。

7	2	16	9
12	13	3	6
1	8	10	15
14	11	5	4

(例 1)

9	4	5	16
7	14	11	2
12	1	8	13
6	15	10	3

(例 2)

そして、明らかなことではあるが、これらは完全方陣では汎対角線の和が34であることと、シフト変換を利用できるという性質を用いたものであるため、完全方陣以外の方陣に対しては成り立たない。

そして、シフト変換に注目すると完全方陣の場合は3－2節で挙げたような基本的性質を発展させたものとして次のような性質をもつ。

$$a+m=f+j\ ,\ d+p=g+k$$

$$a+d=f+g\ ,\ m+p=j+k$$

これらもシフト変換で導かれる。

このように完全方陣には多種多様な性質をもつことがわかる。

3-3-3　完全方陣の連続性

完全方陣では、シフト変換が使えるため、自ずと次のようなことがわかる。1つの完全方陣を平面上に、四方八方に敷き詰めると、4×4の正方形枠をどこに切り取っても、それが4次完全方陣になっている。

1	12	6	15	1	12	6	15
8	13	3	10	8	13	3	10
11	2	16	5	11	2	16	5
14	7	9	4	14	7	9	4
1	12	6	15	1	12	6	15
8	13	3	10	8	13	3	10
11	2	16	5	11	2	16	5
14	7	9	4	14	7	9	4

(例 3)

また、34≡2 (mod 4)より、各行、各列、両対角線にある数を大きく2つに分けると、それぞれの数は4を法として、

$$0+2=1+1\equiv 3+3\equiv 2 \pmod 4$$

となる。そしてそれら分けた 2 つの数をさらに細かく分けると 4 を法として

$$0+0+0+2=2$$
$$0+0+1+1=2$$
$$0+0+3+3\equiv 2$$
$$1+3+0+2\equiv 2$$
$$1+3+1+1\equiv 2$$
$$1+3+3+3\equiv 2$$
$$2+2+0+2\equiv 2$$
$$2+2+1+1\equiv 2$$
$$2+2+3+3\equiv 2$$

となり実際に 4 次完全方陣を各行・各列の数の和で分けると合計 9 つの型に分けられそうだが、実際は合計 48 個の完全方陣は次の 3 つの型でしか分けることができなかった(ただし、図は 4 を法としている)。

0	1	2	3
2	3	0	1
3	2	1	0
1	0	3	2

(A 型)

0	1	3	2
3	2	0	1
2	3	1	0
1	0	2	3

(B 型)

0	2	1	3
1	3	0	2
0	2	1	3
1	3	0	2

(C 型)

すなわち、各行、各列、両対角線には偶数と奇数が 2 つずつ現れている。また、4 次完全方陣は全部で 48 個あるため、それぞれの型の個数は 16 個。そして A 型、B 型はほとんど同じ型であり各行、各列に 4 の倍数が含まれている。このようにしてみると、4 次完全方陣を任意に選ぶとその各行、各列に 4 の倍数が含まれている確率は $\frac{2}{3}$ となることがわかる。

３－４．４次対称方陣

4 次対称方陣にもシフト変換と少し類似した操作が存在する。つまり、次のような変換を行っても異なる対称方陣が得られるのである。

①第 1 行と第 4 行を入れ換える。
②第 2 行と第 3 行を入れ換える。
③第 1 行と第 3 行、第 2 行と第 4 行を同時に入れ換える。
④第 1 列と第 4 列を入れ換える。
⑤第 2 列と第 3 列を入れ換える。
⑥第 1 列と第 3 列、第 2 列と第 4 列を同時に入れ換える。

11	5	2	16
14	4	7	9
8	10	13	3
1	15	12	6

①

1	15	12	6
14	4	7	9
8	10	13	3
11	5	2	16

②

1	15	12	6
8	10	13	3
14	4	7	9
11	5	2	16

③

14	4	7	9
11	5	2	16
1	15	12	6
8	10	13	3

④，⑤，⑥についても同様に、以下のようになる。

11	5	2	16
14	4	7	9
8	10	13	3
1	15	12	6

④ ⇄

16	5	2	11
9	4	7	14
3	10	13	8
6	15	12	1

⇅ ⑤

16	2	5	11
9	7	4	14
3	13	10	8
6	12	15	1

⑥ ⇄

5	11	16	2
4	14	9	7
10	8	3	13
15	1	6	12

また、4 次の対称方陣は、その対称性から次のように、完全方陣の一部であるような性質が見られる。

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

図 1

16	2	5	11
9	7	4	14
3	13	10	8
6	12	15	1

図 2

対称方陣では、

$b+o=e+l=17$ ，$c+n=h+i=17$

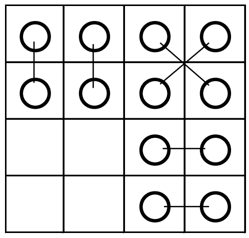
が成り立つので汎対角線 e－b－o－l，c－h－i－n において、その和が完全方陣と同様 34 になるということである。しかし、他の 4 本の汎対角線の和はどんな対称方陣でも 34 とならないので完全方陣とはいえない。

すなわち、完全方陣でもあり対称方陣でもあるような 4 次方陣は存在しないのである。

そして、4 次対称方陣においても各行、各列、両対角線にある数字は偶数、奇数が 2 つずつになった。また、同様に対称方陣を任意に選びその各行、各列に 4 の倍数が並んでいる確率は $\frac{2}{3}$ となった。

3-4-1　完全方陣と対称方陣を結ぶ操作

すべての 4 次の対称方陣は次のような操作をすることにより完全方陣になることができる。



これを具体例に当てはめることにより確かめてみると、 次に示すようになる。

16	5	2	11
9	4	7	14
3	10	13	8
6	15	12	1

図 3

⇄

9	4	14	7
16	5	11	2
3	10	8	13
6	15	1	12

図 4

実際に、図 3 に示した魔方陣は 4 次対称方陣になっており、それに操作を施した図 4 の魔方陣は 4 次完全方陣になっている。また、逆にこの操作を見ると任意の 4 次完全方陣にこの操作を施すとそれは 4 次の対称方陣になるのである。

ここから、わかることは 4 次の対称方陣の個数は完全方陣に等しい 48 個であるということである。

以下、この変換の仕組みについて簡単に説明する。

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

⇄

e	f	h	g
a	b	d	c
i	j	l	k
m	n	p	o

図 5　　　図 6

いま、図 5 の方陣が対称方陣であるとする。すると、

$$a+p=m+d=b+o=n+c=17$$

$$e+l=i+h=f+k=j+g=17$$

より、これを図 6 に適用する際には、3-3-2 節で挙げたようにすべての 3×3 の正方形の対角和が 17 になることを用いている。図 6 から図 5 においても同様のことがいえ、完全方陣の性質を使うと和が 17 になる数をうまく 4 次方陣の中心に関して対称の位置に置くことにより、4 次対称方陣が完成するわけである。

また、この対称方陣と完全方陣との間での変換を用いることで、対称方陣について以下のことが自ずとわかる。図 6 において 2×2 の正方形(e−f−b−a), (h−g−d−c), (l−k−o−p)，(i−j−n−m)に注目すると、これらはそれぞれその 2×2 の正方形の中だけでしか変換によって移動していないため、得られた対称方陣の 4 隅にある 2×2 の正方形の中の数の和は 34 になる(3-3-2 節の完全方陣の性質による)。

次に、図 5 で 3×3 の正方形の隅に位置する数に注目する。そして、図 6 のそれぞれの数の位置に注目すると、それらは 3−2 節で挙げたように数の和は 34 に等しいことがわかる。このことは、同時に図 5 (対称方陣)において、3×3 の正方形の隅に位置する数の和も 34 となることを示している。

４．研究の考察と今後の展望

今回の研究では、前回の 4 次方陣の性質に関する研究を更に限定して、4 次完全方陣や対称方陣の特有の性質など操作を使用することで自分なりの見解や考察を行うことができた。また、完全方陣と対称方陣の共通点・相違点についても見出すことができた。今後の課題は 4 次完全方陣・対称方陣の各行、各列、両対角線に並ぶ数の規則性やその数に関して、完全方陣や対称方陣の型の分類というものを扱っていきたい。そして、今回はあまり対称方陣の変換を用い考察することができなかったため今後進めていきたい。また、前回と今回の研究では 4 次方陣しか扱うことができなかった。しかし、今後は 5 次方陣や 6 次方陣についても調べより発展的な内容を理解し研究を進めていきたい。

５．参考文献

[1] 「4 次方陣の性質に関する研究」、今中翔哉、奈良女子大学附属中等教育学校、平成 28 年度 SSH サイエンス研究会生徒研究論文集、p.79-85

[2] 「魔方陣の世界」、大森清美、日本評論社(2013)

６．謝辞

今回の研究にあたりご指導くださった顧問の川口先生ありがとうございました。