約数の総和についてⅢ

5 年 A 組　小椋　晃一
指導教員　川口　慎二

１．要約

サイエンス研究会数学班 5 年生は約数の総和について学習している。今回は過剰数の割合の評価を目的とした。その過程において、約数の総和に関する考察を行うことができたので紹介する。

キーワード　　過剰数、原始過剰数、メルセンヌ素数、素数、割合

２．研究の背景と目的

約数の総和によって、自然数は 3 種類に分類できる。しかし、異なる自然数間にも関連があり、その関連を倍数として見ることができた。今回は原始過剰数を中心に、昨年度の論文にいくつか加えることができた。

３．研究内容

３－１．定義

本稿では、昨年度の論文[4]と同じ定義を用いる。

また、素数を順に $p_1, p_2, p_3, \cdots$ とする。例えば、 $p_1=2, p_2=3, p_3=5$ である。

また、ある無限集合の n 以下における個数を $\pi(n)$ としたとき、$\lim_{n\to\infty}\dfrac{\pi(n)}{n}$ を、その集合の割合とする。例えば偶数の割合は $\dfrac{n-1}{2} \leqq \pi(n) \leqq \dfrac{n}{2}$ より $\dfrac{1}{2}$ であり、3 の倍数の割合は $\dfrac{n-2}{3} \leqq \pi(n) \leqq \dfrac{n}{3}$ より $\dfrac{1}{3}$ である。

３－２．主たる結果

命題１

$\dfrac{\sigma(p_a)}{p_a} > \dfrac{\sigma({p_{a+1}}^{\alpha})}{{p_{a+1}}^{\alpha}}$ が成り立つ。

（証明）

$p_{a+1} \geqq p_a+1$ であり、[4](命題 12)より、

$$\frac{\sigma(p_a)}{p_a} = \frac{p_a+1}{p_a} \geq \frac{p_{a+1}}{p_{a+1}-1} > \frac{\sigma({p_{a+1}}^{\alpha})}{{p_{a+1}}^{\alpha}}$$

(Q. E. D.)

命題２

１でない任意の数 k について

$$p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x}$$

が原始過剰数となる x が存在する。

（証明）

１でない任意の数 k について

$$\frac{\sigma(p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x})}{p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x}} > 2$$

となる x が存在し([4]命題 8 の証明)、最小

の x をとると

$$\frac{\sigma(p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x-1})}{p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x-1}} < 2 \quad \cdots①$$

となる。

ここで、すべての $k \leqq i \leqq k+x$ について、

$$p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+i-1} p_{k+i+1} \cdots p_{k+x}$$

が不足数と示せばよい。

[4]における補題と①より、

$$\frac{\sigma(p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+i-1} p_{k+i+1} \cdots p_{k+x})}{p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+i-1} p_{k+i+1} \cdots p_{k+x}}$$

$$= \frac{\sigma(p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x})}{p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x}} \frac{p_i}{p_i + 1}$$

$$= \frac{\sigma(p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x-1})}{p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x-1}} \frac{p_i}{p_i + 1} \frac{p_{k+x} + 1}{p_{k+x}}$$

$$= \frac{\sigma(p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x-1})}{p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x-1}} \frac{p_i p_{k+x} + p_i}{p_i p_{k+x} + p_{k+x}}$$

$$< 2$$

よって、$p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x}$ は原始過剰数である。 (Q. E. D.)

命題３

$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_k$ として

$p_{a_1} p_{a_2} p_{a_3} \cdots p_{a_{k-1}}$ が不足数であり、

$p_{a_1} p_{a_2} p_{a_3} \cdots p_{a_k}$ が過剰数ならば、

$p_{a_1} p_{a_2} p_{a_3} \cdots p_{a_k}$ は原始過剰数である。

この命題３は、命題１と同様に示すことができる。

命題４

任意の素数 p_a について、 p_a の倍数の原始過剰数が無数に存在する

（証明）

任意の素数 p_a について、 p_a の倍数の原始過剰数が無数に存在することを示せばよい。

$p_a = 2$ は、偶数の原始過剰数が無数に存在する[(4)]ため成り立つ。 $p_a \neq 2$ のとき、$p_a < p_k$ をみたすすべての k について

$$\frac{\sigma(p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x})}{p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x}} > 2 \frac{p_a}{p_a + 1}$$

となる x が存在するため、

$$\frac{\sigma(p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x})}{p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x}} \frac{p_a + 1}{p_a} > 2$$

$$\frac{\sigma(p_a p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x})}{p_a p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x}} > 2$$

以下、命題１と同様に

$p_a p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x}$ が原始過剰数と示せる。k が無数に存在するため、 p_a の倍数の原始過剰数が無数に存在する。 (Q. E. D.)

命題５

3 以上の任意の高さについて、原始過剰数が存在する。

（証明）

$2^n p$ を考える。このとき、高さは $n+1$ なので、$n \geqq 2$ のとき $2^n < p < 2^{n+1} - 1$ をみたす素数が存在すると示せばよい。

ベルトランの仮説より、

$$2^n - 1 < p < 2(2^n - 1)$$

$$2^n - 1 < p < 2^{n+1} - 2$$

を満たす素数が存在する。 (Q. E. D.)

命題６

2 のべき乗として表せる数の割合は 0 である。

（証明）

k 以下の 2 のべき乗の個数を $\pi(k)$ とする。$2^{n-1} \leqq x < 2^n$ として、$\pi(2^n) = n+1$ より

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x} \leqq \lim_{n\to\infty}\frac{\pi(2^n)}{2^{n-1}} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(2^n)}{2^n} = 0$$

はさみうちの原理より、$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x} = 0$.

(Q. E. D.)

命題７

$2^n p$ と表せる原始過剰数の割合は 0

（証明）

n 以下における素数の個数を $\pi(n)$，n 以下における $2^n p$ と表せる原始過剰数の個数を $\pi'(n)$ とする。

素数定理より、$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(n)}{n} = 0$.

また、$\pi'(n) < \pi(n)$ よりはさみうちの原理から、$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi'(n)}{n} = 0$.　(Q. E. D.)

同様にして、偶数の完全数の割合が 0 と示せる。

命題８

過剰数の割合は、少なくとも 0.236 である。

（証明）

完全数・原始過剰数である 6, 20, 28 の倍数から完全数自身を除いたものは、過剰数の部分和といえる。完全数自身は有限個であり、割合に影響しないので、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(n)}{n} > \frac{1}{6}+\frac{1}{20}+\frac{1}{28}-\frac{1}{6\cdot 20}-\frac{1}{6\cdot 28} - \frac{1}{20\cdot 28}+\frac{1}{6\cdot 20\cdot 28}$$

> 0.236.　(Q. E. D.)

この方法で過剰数の割合を近似することができる。しかし、簡単な計算ではなく、近似が遅い。

４．今後の課題

予想１

原始過剰数の割合は 0 である。

実験的に予想したものである。5000 以下の原始過剰数は 49 個、100 万以下の原始過剰数は 1733 個である。

予想２

同じ高さの原始過剰数は有限個である。

同じ高さの過剰数は無限個であること、原始過剰数全体の個数は無限個であること、3 以上の高さ x について、原始過剰数が存在することは示したが、この予想の証明はできていない。

予想３

ある高さについて、$\frac{\sigma(n)}{n}$ が最も 2 に近い不足数が存在する

予想４

平方数の原子過剰数は無数に存在する。

なお、平方数の原始過剰数は今のところ見つかっていないが、存在すると予想している。

５．参考文献

[1] 「数論の精選 104 問」、Titu Andreescu Dorin, Andrica,Zuming Feng 著、小林一章、鈴木晋一監訳、清水俊宏、西本将樹訳、朝倉書店

[2] 「直感を裏切る数学 「思い込み」にだまされない数学的思考法」、神永正博、講談社

[3]「約数の総和について」、小椋晃一、奈良女子大学附属中等教育学校平成 27 年度 SSH 生徒研究論文集、p.36-42

[4]「約数の総和についてⅡ」、小椋晃一、奈良女子大学附属中等教育学校平成 28 年度 SSH 生徒研究論文集、p.68-78

６．謝辞

今回の研究にあたりご指導くださった顧問の川口先生、ありがとうございました。また、その他にもサイエンス研究会をはじめとした多くの方々に協力や助言をいただけました。ありがとうございました。