幾何の定理の別証明

5 年 B 組　林　建吾
5 年 C 組　古宮　昌典
指導教員　川口　慎二

１．要約

サイエンス研究会数学班 5 年生は定理の別証明について研究している。今回は、平面幾何における定理の別証明を考え、幾何学の様々なアプローチについて学んだ。

キーワード　　証明、計算による解法、初等幾何的解法

２．研究の背景と目的

Ⅰ期中間考査に出題された幾何の証明問題について、答え合わせをしていたところ、さまざまな解法があることに気がついた。そこで、平面幾何の定理の証明方法について、すでに知られているものも含め、まとめることにした。

３．研究内容

３－１．Ⅰ期中間考査最終問題の証明

次が、5 年「代数・幾何」Ⅰ期中間考査で出題された問題である。

問題

△ABC の辺 BC を 1：2 に内分する点を D とする。このとき、

$$2\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=3\left(\mathrm{AD}^2+2\mathrm{BD}^2\right)$$

が成り立つことを示せ。

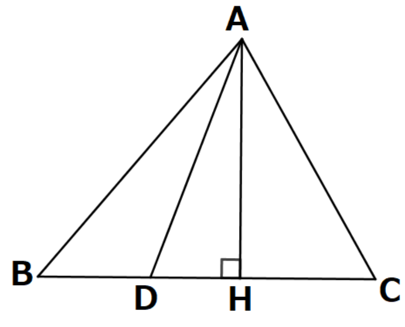
3-1-1　三平方の定理を用いた解法

三平方の定理のみを用いて証明することもできる。

点 A から辺 BC へ降ろした垂線の足を H とする。H の位置によって以下の 4 つの場合が考えられるが、ここでは(ⅰ)の証明のみ与える。(ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)についても同様に示せる。

（ⅰ）線分 CD 上に点 H がある場合
（ⅱ）線分 BD 上に点 H がある場合
（ⅲ）半直線 DC 上であって△ABC の外部に点 H がある場合
（ⅳ）半直線 DB 上であって△ABC の外部に点 H がある場合

＜(ⅰ)の証明＞



△ABH において、三平方の定理より

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{AH}^2+\mathrm{BH}^2$$
$$\mathrm{BH}=\mathrm{BD}+\mathrm{DH}$$

であるから、

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{AH}^2+(\mathrm{BD}+\mathrm{DH})^2$$

$= \mathrm{AH}^2 + \mathrm{BD}^2 + 2\mathrm{BD}\cdot\mathrm{DH} + \mathrm{DH}^2$

…①

また、△ACH において、三平方の定理より

$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AH}^2 + \mathrm{CH}^2$

$= \mathrm{AH}^2 + (\mathrm{CD} - \mathrm{DH})^2$

$= \mathrm{AH}^2 + \mathrm{CD}^2 - 2\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DH} + \mathrm{DH}^2$,

$\mathrm{CD} = 2\mathrm{BD}$ より、

$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AH}^2 + 4\mathrm{BD}^2 - 4\mathrm{BD}\cdot\mathrm{DH} + \mathrm{DH}^2$

…②

①×2＋②より、

$2\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2$

$= 2\left(\mathrm{AH}^2 + \mathrm{BD}^2 + 2\mathrm{BD}\cdot\mathrm{DH} + \mathrm{DH}^2\right)$

$+ \mathrm{AH}^2 + 4\mathrm{BD}^2 - 4\mathrm{BD}\cdot\mathrm{DH} + \mathrm{DH}^2$

$= 6\mathrm{BD}^2 + 3\mathrm{AH}^2 + 3\mathrm{DH}^2$

△ADH において、三平方の定理から

$\mathrm{AH}^2 + \mathrm{DH}^2 = \mathrm{AD}^2$ であるので、

$2\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 6\mathrm{BD}^2 + 3\mathrm{AH}^2 + 3\mathrm{DH}^2$

$= 3\left(2\mathrm{BD}^2 + \mathrm{AD}^2\right)$

を得る。(Q. E. D.)

3-1-2　座標を用いた解法

座標を用いる場合、原点をおく場所によって以下の 3 つの証明方法が考えられる。

(Ⅰ) BC が x 軸と一致し、D を原点におく。

(Ⅱ) BC が x 軸と一致し、B または C を原点におく。

(Ⅲ) 3 点すべてを文字でおく。

ここでは、(Ⅲ)の証明のみを挙げる。

＜証明＞

$\mathrm{A}(a_1, a_2)$, $\mathrm{B}(b_1, b_2)$, $\mathrm{C}(c_1, c_2)$ とおくと、$\mathrm{D}\left(\dfrac{2b_1 + c_1}{3}, \dfrac{2b_2 + c_2}{3}\right)$ と表せる。

$$(\text{左辺}) = 2\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2$$

$$= 2\left\{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2\right\} + \left\{(a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2\right\}$$

$$= 2\left(a_1{}^2 - 2a_1b_1 + b_1{}^2 + a_2{}^2 - 2a_2b_2 + b_2{}^2\right) + a_1{}^2 - 2a_1c_1 + c_1{}^2 + a_2{}^2 - 2a_2c_2 + c_2{}^2$$

$$= 2a_1{}^2 - 4a_1b_1 + 2b_1{}^2 + 2a_2{}^2 - 4a_2b_2 + 2b_2{}^2 + a_1{}^2 - 2a_1c_1 + c_1{}^2 + a_2{}^2 - 2a_2c_2 + c_2{}^2$$

$$= 3a_1{}^2 + 2b_1{}^2 + c_1{}^2 - 4a_1b_1 - 2c_1a_1 + 3a_2{}^2 + 2b_2{}^2 + c_2{}^2 - 4a_2b_2 - 2c_2a_2$$

$$(\text{右辺}) = 3\left(\mathrm{AD}^2 + 2\mathrm{BD}^2\right)$$

$$= 3\left[\left\{\left(a_1 - \frac{2b_1 + c_1}{3}\right)^2 + \left(a_2 - \frac{2b_2 + c_2}{3}\right)^2\right\} + 2\left\{\left(b_1 - \frac{2b_1 + c_1}{3}\right)^2 + \left(b_2 - \frac{2b_2 + c_2}{3}\right)^2\right\}\right]$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{9}\left[\left\{(3a_1 - 2b_1 - c_1)^2 + (3a_2 - 2b_2 - c_2)^2\right\} + 2\left\{(b_1 - c_1)^2 + (b_2 - c_2)^2\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left(9{a_1}^2 + 6{b_1}^2 + 3{c_1}^2 - 12a_1b_1 - 6c_1a_1 + 9{a_2}^2 + 6{b_2}^2 + 3{c_2}^2 - 12a_2b_2 - 6c_2a_2\right)$$

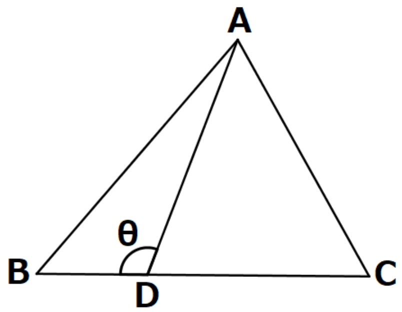
$$= 3{a_1}^2 + 2{b_1}^2 + {c_1}^2 - 4a_1b_1 - 2c_1a_1 + 3{a_2}^2 + 2{b_2}^2 + {c_2}^2 - 4a_2b_2 - 2c_2a_2$$

ゆえに、(左辺)＝(右辺)が成り立つ。 (Q. E. D.)

3-1-3　余弦定理を用いた解法

余弦定理を用いると以下のように証明できる。

＜証明＞



$\angle \mathrm{ADB} = \theta$ とおくと、$\triangle \mathrm{ADB}$, $\triangle \mathrm{ADC}$ において、それぞれ余弦定理から、

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{BD}^2 - 2\mathrm{AD} \cdot \mathrm{BD}\cos\theta \quad \cdots①$$

$$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{CD}^2 - 2\mathrm{AD} \times \mathrm{CD}\cos(180° - \theta)$$

$\mathrm{BD} : \mathrm{CD} = 1 : 2$ より $\mathrm{CD} = 2\mathrm{BD}$ であるので、

$$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AD}^2 + 4\mathrm{BD}^2 + 4\mathrm{AD} \cdot \mathrm{BD}\cos\theta \quad \cdots②$$

ここで、①×2＋②より

$$2\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2\mathrm{AD}^2 + 2\mathrm{BD}^2 - 4\mathrm{AD} \cdot \mathrm{BD}\cos\theta + \mathrm{AD}^2 + 4\mathrm{BD}^2 + 4\mathrm{AD} \cdot \mathrm{BD}\cos\theta$$

整理すると、

$$2\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 3\left(\mathrm{AD}^2 + 2\mathrm{BD}^2\right)$$

ゆえに、(左辺)＝(右辺)が成り立つ。

(Q. E. D.)

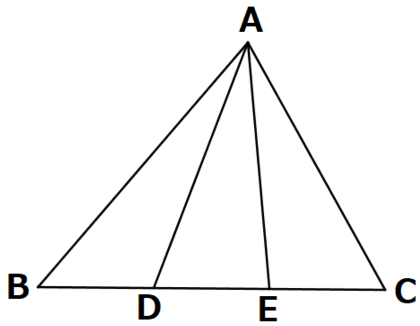
3-1-4　中線定理を用いた解法

補助線の引き方によって 2 通りの証明方法がある。

（Ｉ）図形の内側に補助線を引く

＜証明＞

下図のように、線分 CD の中点 E をとる。



$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = 1 : 2$ であるから、BD＝DE＝EC が成り立つ。よって、点 D は線分 BE の中点であるから、$\triangle \mathrm{ABE}$ において中線定理より、

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AE}^2 = 2\mathrm{BD}^2 + 2\mathrm{AD}^2 \quad \cdots①$$

また､点Eは線分CDの中点であるから、$\triangle \mathrm{ACD}$ において中線定理より、

$$\mathrm{AD}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2\mathrm{DE}^2 + 2\mathrm{AE}^2 \quad \cdots②$$

①×2 より

$$2\mathrm{AB}^2+2\mathrm{AE}^2=4\mathrm{BD}^2+4\mathrm{AD}^2 \quad \cdots ③$$

また、②において $\mathrm{BD}=\mathrm{DE}$ であるから、

$$\mathrm{AD}^2+\mathrm{AC}^2=2\mathrm{BD}^2+2\mathrm{AE}^2,$$

$$2\mathrm{AE}^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{AC}^2-2\mathrm{BD}^2 \quad \cdots ④$$

④を③に代入して、

$$2\mathrm{AB}^2+\left(\mathrm{AD}^2+\mathrm{AC}^2-2\mathrm{BD}^2\right)=4\mathrm{BD}^2+4\mathrm{AD}^2.$$

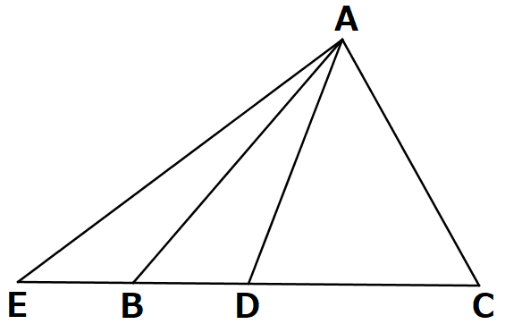
整理すると求める式が得られる。

(Q. E. D.)

（Ⅱ）図形の外側に補助線を引く

＜証明＞

下図のように、線分 CD を 1 : 2 に外分する点 E をとる。



$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=1:2$ であるから、$\mathrm{EB}=\mathrm{BD}$, $\mathrm{ED}=\mathrm{DC}$ が成り立つ。よって、点 D は線分 EC の中点であるから、△AEC において中線定理より、

$$\mathrm{AE}^2+\mathrm{AC}^2=2\mathrm{ED}^2+2\mathrm{AD}^2 \quad \cdots ①$$

また、点 B は線分 ED の中点であるから、△AED において中線定理より、

$$\mathrm{AE}^2+\mathrm{AD}^2=2\mathrm{EB}^2+2\mathrm{AB}^2 \quad \cdots ②$$

①において、$\mathrm{ED}=2\mathrm{BD}$ より、

$$\mathrm{AE}^2+\mathrm{AC}^2=8\mathrm{BD}^2+2\mathrm{AD}^2 \quad \cdots ③$$

また、②において $\mathrm{EB}=\mathrm{BD}$ であるから、

$$\mathrm{AE}^2+\mathrm{AD}^2=2\mathrm{BD}^2+2\mathrm{AB}^2,$$

$$\mathrm{AE}^2=2\mathrm{BD}^2+2\mathrm{AB}^2-\mathrm{AD}^2 \quad \cdots ④$$

④を③に代入して、

$$\left(2\mathrm{BD}^2+2\mathrm{AB}^2-\mathrm{AD}^2\right)+\mathrm{AC}^2=8\mathrm{BD}^2+2\mathrm{AD}^2.$$

整理すると求める式

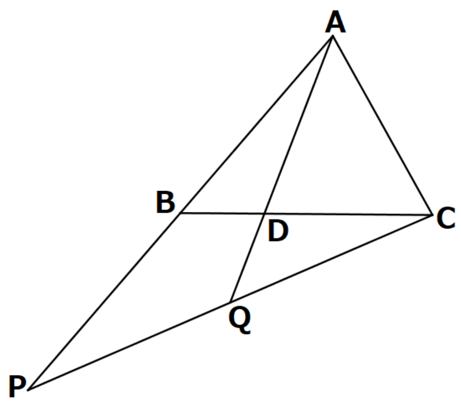
$$2\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=6\mathrm{BD}^2+3\mathrm{AD}^2=3\left(2\mathrm{BD}^2+\mathrm{AD}^2\right)$$

が得られる。(Q. E. D.)

3-1-5　三角形の重心を用いた解法

D が辺 BC を 1 : 2 に内分していることから、重心の性質を用いた証明ができる。

＜証明＞



線分 AB を 2 : 1 に外分する点 P をとり、線分 PC の中点を Q とする。いま、点 D は線分 BC を 1 : 2 に内分しているので、点 D は△APC の重心である。ゆえに、3 点 A, D, Q は同一直線上にある。

△APC において、(CP を底辺とみて)中線定理より、

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{AC}^2=2\mathrm{PQ}^2+2\mathrm{AQ}^2 \quad \cdots ①$$

$\mathrm{AD}:\mathrm{DQ}=2:1$ より、$\mathrm{AQ}=\dfrac{3}{2}\mathrm{AD}$

であり、$\mathrm{AP}=2\mathrm{AB}$ なので①に代入すると、

$$4\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2\mathrm{PQ}^2+\frac{9}{2}\mathrm{AD}^2.$$

両辺を 2 倍して、

$$8\mathrm{AB}^2+2\mathrm{AC}^2=4\mathrm{PQ}^2+9\mathrm{AD}^2 \quad \cdots②$$

を得る。

いま、△CPA において点 B は辺 AP の中点であるから、(AP を底辺とみて)中線定理より、

$$\mathrm{CA}^2+\mathrm{CP}^2=2\mathrm{AB}^2+2\mathrm{CB}^2 \quad \cdots③$$

が成り立つ。

いま、$\mathrm{CA}=2\mathrm{PQ}$, $\mathrm{BC}=3\mathrm{BD}$ であるから、③に代入して、

$$\mathrm{AC}^2+4\mathrm{PQ}^2=2\mathrm{AB}^2+18\mathrm{BD}^2,$$

$$4\mathrm{PQ}^2=2\mathrm{AB}^2+18\mathrm{BD}^2-\mathrm{AC}^2. \quad \cdots④$$

②に④を代入して、

$$8\mathrm{AB}^2+2\mathrm{AC}^2=\left(2\mathrm{AB}^2+18\mathrm{BD}^2-\mathrm{AC}^2\right)+9\mathrm{AD}^2$$

整理すると

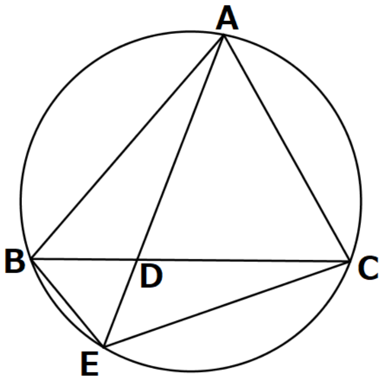
$$6\mathrm{AB}^2+3\mathrm{AC}^2=18\mathrm{BD}^2+9\mathrm{AD}^2$$

両辺を 3 で割って整理すると、求める式が得られる。 (Q. E. D.)

3-1-6　外接円を用いた解法

△ABC の外接円を考えることで以下のような証明ができる。

＜証明＞



△ABC の外接円と、直線 AD との(A とは異なる)交点を E とする。

方べきの定理より、

$$\mathrm{BD}\times\mathrm{DC}=\mathrm{AD}\times\mathrm{DE}.$$

$\mathrm{DC}=2\mathrm{BD}$ より、

$$2\mathrm{BD}^2=\mathrm{AD}\times\mathrm{DE}.$$

ゆえに

$$\mathrm{DE}=\frac{2\mathrm{BD}^2}{\mathrm{AD}} \quad \cdots①$$

△ABE と△ACE において、

BD:DC＝1：2 なので、△ABE と△ACE の面積比は 1：2 となる。

一方、

$$\triangle\mathrm{ABE}=\frac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times\mathrm{BE}\times\sin\angle\mathrm{ABE}$$

$$\triangle\mathrm{ACE}=\frac{1}{2}\times\mathrm{AC}\times\mathrm{CE}\times\sin\angle\mathrm{ACE}$$

$$=\frac{1}{2}\times\mathrm{AC}\times\mathrm{CE}\times\sin(180^\circ-\angle\mathrm{ABE})$$

$$=\frac{1}{2}\times\mathrm{AC}\times\mathrm{CE}\times\sin\angle\mathrm{ABE}$$

とかけるので、△ABE と△ACE の面積比は $(\mathrm{AB}\times\mathrm{BE}):(\mathrm{AC}\times\mathrm{CE})$ となる。

ゆえに、

$$(\mathrm{AB}\times\mathrm{BE}):(\mathrm{AC}\times\mathrm{CE})=1:2$$

が成り立つので、

$$2\mathrm{AB}\times\mathrm{BE}=\mathrm{AC}\times\mathrm{CE}$$

よって、

$$\mathrm{BE}:\mathrm{CE}=\mathrm{AC}:2\mathrm{AB}$$

が成り立つ。よって正の実数 k を用いて、

$$\mathrm{BE}=k\mathrm{AC},\ \mathrm{CE}=2k\mathrm{AB} \quad \cdots②$$

とかける。

先ほどと同様にして、

$$(\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}):(\mathrm{BE}\times\mathrm{EC})=\mathrm{AD}:\mathrm{DE}$$

$$\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times\mathrm{DE}=\mathrm{AD}\times\mathrm{BE}\times\mathrm{EC}$$

①, ②を代入して、

$$\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times\frac{2\mathrm{BD}^2}{\mathrm{AD}}=\mathrm{AD}\times k\mathrm{AC}\times 2k\mathrm{AB}$$

これをkについて解くと、

$$k=\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AD}}$$

②より、

$$\mathrm{BE}=\frac{\mathrm{AC}\times\mathrm{BD}}{\mathrm{AD}},\quad \mathrm{CE}=\frac{2\mathrm{AB}\times\mathrm{BD}}{\mathrm{AD}}\quad\cdots③$$

を得る。

トレミーの定理より、

$$\mathrm{AB}\times\mathrm{CE}+\mathrm{AC}\times\mathrm{BE}=\mathrm{AE}\times\mathrm{BC}$$
$$=(\mathrm{AD}+\mathrm{DE})\times\mathrm{BC}$$

①，③を代入して、

$$\mathrm{AB}\times\frac{2\mathrm{AB}\times\mathrm{BD}}{\mathrm{AD}}+\mathrm{AC}\times\frac{\mathrm{AC}\times\mathrm{BD}}{\mathrm{AD}}$$
$$=\left(\mathrm{AD}+\frac{2\mathrm{BD}^2}{\mathrm{AD}}\right)\times\mathrm{BC}$$

$\mathrm{BC}=3\mathrm{BD}$より、

$$\frac{2\mathrm{AB}^2\times\mathrm{BD}}{\mathrm{AD}}+\frac{2\mathrm{AC}^2\times\mathrm{BD}}{\mathrm{AD}}$$
$$=\left(\frac{\mathrm{AD}^2+2\mathrm{BD}^2}{\mathrm{AD}}\right)\times 3\mathrm{BD}$$

両辺に$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}}$をかけて整理すると、

$$2\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=3\left(\mathrm{AD}^2+2\mathrm{BD}^2\right)$$

となり、示された。 (Q. E. D.)

3-1-7　ベクトルを用いた解法

ベクトルを用いると、比較的簡潔に証明することができる。

＜証明＞

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{\mathrm{b}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{\mathrm{c}}$とおくと、

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{2\vec{\mathrm{b}}+\vec{\mathrm{c}}}{3},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{2\vec{\mathrm{b}}+\vec{\mathrm{c}}}{3}-\vec{\mathrm{b}}=\frac{-\vec{\mathrm{b}}+\vec{\mathrm{c}}}{3}$$

と表せる。

$$(\text{左辺})=2\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2=2\left|\vec{\mathrm{b}}\right|^2+\left|\vec{\mathrm{c}}\right|^2$$

$$(\text{右辺})=3\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2+2\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|^2\right)$$
$$=3\left(\left|\frac{2\vec{\mathrm{b}}+\vec{\mathrm{c}}}{3}\right|^2+2\left|\frac{-\vec{\mathrm{b}}+\vec{\mathrm{c}}}{3}\right|^2\right)$$
$$=3\cdot\frac{1}{9}\left\{4\left|\vec{\mathrm{b}}\right|^2+4\vec{\mathrm{b}}\cdot\vec{\mathrm{c}}+\left|\vec{\mathrm{c}}\right|^2\right.$$
$$\left.+2\left(\left|\vec{\mathrm{b}}\right|^2-2\vec{\mathrm{b}}\cdot\vec{\mathrm{c}}+\left|\vec{\mathrm{c}}\right|^2\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(6\left|\vec{\mathrm{b}}\right|^2+3\left|\vec{\mathrm{c}}\right|^2\right)=2\left|\vec{\mathrm{b}}\right|^2+\left|\vec{\mathrm{c}}\right|^2$$

ゆえに、(左辺)＝(右辺)が成り立つ。

(Q. E. D.)

３－２．スチュワートの定理の証明

３－１節で考えた問題の一般化であるスチュワートの定理の証明方法について考えた。

<u>スチュワートの定理</u>

△ABC において、辺 BC を$m:n$に内分する点を D とするとき、以下が成り立つ。

$$n\mathrm{AB}^2+m\mathrm{AC}^2=(m+n)\left(\mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC}+\mathrm{AD}^2\right)$$

３－１節で述べた証明方法のうち、「中線定理を用いた解法」と「重心の性質を用いた解法」以外の解法はすべてスチュワートの定理の証明にもそのまま適用できる。中線定理を用いた解法については、同様の証

明によってmとnがともに有理数である場合は解決できる。ここで、求める式をADの長さを求める関数とみると、明らかにこの関数は連続であるから、mまたはnが無理数である場合もこの等式が成り立つことがわかる。

３－３．オイラーの定理の証明

平面幾何におけるオイラーの定理について、初等幾何での別証明を考えた。

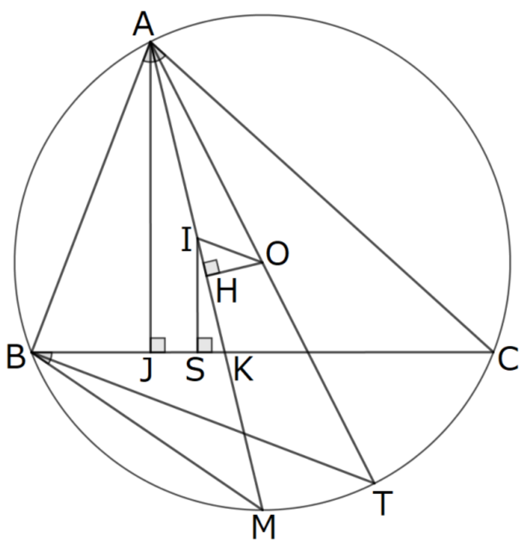
オイラーの定理

三角形について、外心と内心の距離をd, 外接円の半径をR,内接円の半径をrとするとき、以下が成り立つ。

$$d^2 = R^2 - 2Rr$$

すでに知られている初等幾何的な証明については参考文献[1]を参照されたい。また、ベクトルを用いた証明もよく知られている。

＜証明＞



△ABCの外接円をΓとする。また、上図のように、直線AIとΓの交点をM，直線AOとΓの交点をT，点Oから直線AMへ降ろした垂線の足をH，点Aから直線BCへ降ろした垂線の足をJ, 直線AMと辺BCの交点をK，点Iから辺BCへ降ろした垂線の足をSとする。

まず、$\mathrm{OH} \perp \mathrm{AM}$より、$\mathrm{AH} = \mathrm{HM}$が成り立つ。△OIH，△OAHについて、三平方の定理より、

$$\begin{aligned} \mathrm{OI}^2 &= \mathrm{OH}^2 + \mathrm{IH}^2 \\ &= \mathrm{OH}^2 + (\mathrm{AH} - \mathrm{AI})^2 \quad \cdots ① \end{aligned}$$

$$\mathrm{OH}^2 = \mathrm{OA}^2 - \mathrm{AH}^2 \quad \cdots ②$$

②を①へ代入して、

$$\begin{aligned} \mathrm{OI}^2 &= \mathrm{OA}^2 - \mathrm{AH}^2 + (\mathrm{AH} - \mathrm{AI})^2 \\ &= \mathrm{R}^2 - 2\mathrm{AH} \cdot \mathrm{AI} + \mathrm{AI}^2 \\ &= \mathrm{R}^2 - \mathrm{AI}(2\mathrm{AH} - \mathrm{AI}) \\ &= \mathrm{R}^2 - \mathrm{AI}(\mathrm{MH} + \mathrm{HI}) \\ &= \mathrm{R}^2 - \mathrm{AI} \cdot \mathrm{IM} \end{aligned}$$

ゆえに、$\mathrm{AI} \cdot \mathrm{IM} = 2Rr$を示せばよい。

線分ATはΓの直径なので、$\angle \mathrm{ABT} = 90°$が成り立つ。また、円周角の定理より、$\angle \mathrm{ATB} = \angle \mathrm{ACB}$が成り立つので、△ABTと△AJCは相似である。よって、

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AJ} = \mathrm{AT} : \mathrm{AC}$$

$$\mathrm{AJ} = \frac{\mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC}}{\mathrm{AT}} = \frac{\mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC}}{2R}$$

を得る。また、$\mathrm{AJ} \,//\, \mathrm{IS}$であるから、△AJKと△ISKは相似なので、

$$\mathrm{AK} : \mathrm{IK} = \mathrm{AJ} : \mathrm{IS}$$

$$\mathrm{AK} : \mathrm{IK} = \frac{\mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC}}{2R} : r$$

$$\mathrm{IK} \cdot \frac{\mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC}}{2R} = r \cdot \mathrm{AK}$$

$$\frac{\mathrm{IK} \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC}}{\mathrm{AK}} = 2Rr \quad \cdots ③$$

が成り立つ。また、$\angle BAM = \angle KAC$, $\angle AMB = \angle ACK$ より、$\triangle ABM$ と $\triangle AKC$ は相似なので、

$$AB : AK = BM : KC$$

$$BM = \frac{AB \cdot KC}{AK}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \angle IBM &= \angle IBC + \angle CBM \\ &= \angle ABI + \angle CAM \\ &= \angle ABI + \angle BAI \\ &= \angle BIM \end{aligned}$$

より、$BM = IM$ が成り立つので、

$$IM = \frac{AB \cdot CK}{AK} \quad \cdots ④$$

また、線分 CI は$\angle ACK$ の二等分線であるから、

$$AC : CK = AI : IK$$

$$\frac{AC \cdot IK}{CK} = AI \quad \cdots ⑤$$

ゆえに、③,④,⑤より、

$$\begin{aligned} AI \cdot IM &= \frac{AC \cdot IK}{CK} \cdot \frac{AB \cdot CK}{AK} \\ &= \frac{IK \cdot AB \cdot AC}{AK} \\ &= 2Rr \end{aligned}$$

よって、示された。(Q. E. D.)

４．考察

幾何の定理の証明では、初等幾何的な解法は発想が求められることがしばしばあるが、簡潔に示すことができることが多い。また、計算による解法は発想を必要としないので、証明しやすいが、計算量が膨大となる場合もある。また、計算量は座標の設定などで変わってくる。

４．今後の課題

今回は幾何の定理について別証明を行ったが、他の分野の定理についても別証明を考えていきたい。また、別証明から新しい定理を導出することも考えたい。

５．参考文献

[1] web サイト「高校数学の美しい物語」
https://mathtrain.jp/euler

６．謝辞

今回の研究にあたり、ご指導くださいました顧問の川口先生ありがとうございました。