隣接4項間漸化式について

5年C組　大野　華子

指導教員　川口　慎二

１．要約

本校5年生は数列について研究している。今回は隣接4項間漸化式の一般化を目標とした。

キーワード　漸化式、特性方程式、一般項、隣接4項間漸化式

２．研究の背景と目的

私は、解析の授業で漸化式にはたくさんの種類があることを知った。そして、特に3項が隣接している漸化式である隣接3項間漸化式の解法の一般化に興味をもった。そこで、本稿では隣接4項間漸化式についての導出を行うことを目的とする。

３．研究内容

３－１．隣接３項間漸化式

隣接3項間漸化式は、一般的に次のように表される。

$$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$$

このとき、p, q は定数で0でない数として、a_1, a_2 の値がわかっているとき、解くことができる。例えば、以下の例題1および2のように求めることができる。

<u>例題1</u>

$$a_1=1,\ a_2=1,\ a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=0$$

（n≧1）によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

（解）　特性方程式 $t^2-7t+12=0$ を解くと、$t=3, 4$ とわかる。したがって漸化式は

$$a_{n+2}-3a_{n+1}=4(a_{n+1}-3a_n)$$

と変形できる。

よって、数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ は公比4の等比数列となるので、

$$a_{n+1}-3a_n=(-2)\times 4^{n-1}\quad\cdots(1)$$

同様に、この漸化式は、

$$a_{n+2}-4a_{n+1}=3(a_{n+1}-4a_n)$$

と変形できるので、数列 $\{a_{n+1}-4a_n\}$ は公比3の等比数列となり、

$$a_{n+1}-4a_n=-3^n\quad\cdots(2)$$

(1)－(2)より、$a_n=-2^{2n-1}+3^n.$

<u>例題2</u>

$$a_1=1,\ a_2=4,\ a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$$

（n≧1）によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

（解）　特性方程式 $t^2-6t+9=0$ を解くと、$t=3$ (重解)とわかる。したがって漸化式は

$$a_{n+2}-3a_{n+1}=3(a_{n+1}-3a_n)$$

と変形できる。$b_n=a_{n+1}-3a_n$ とおくと、$b_1=a_2-3a_1=1$ より、$b_{n+1}=3b_n$ となるので、数列 $\{b_n\}$ は初項 1，公比 3 の等比数列となる。よって、$b_n=3^{n-1}$ と表せる。つまり、

$$a_{n+1}-3a_n=3^{n-1}$$

となる。この漸化式の両辺を 3^{n+1} で割ると、

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{3a_n}{3^{n+1}}=\frac{3^{n-1}}{3^{n+1}}.$$

つまり、

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{9}$$

となる。このとき、$c_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと、

$$c_1=\frac{a_1}{3}=\frac{1}{3}$$

より、$c_{n+1}-c_n=\dfrac{1}{9}$ となるので、数列 $\{c_n\}$ は初項 $\dfrac{1}{3}$、公差 $\dfrac{1}{9}$ の等差数列となる。

　よって、

$$c_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}(n-1)=\frac{1}{9}n+\frac{2}{9}$$

となり、$c_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ より、

$$\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{9}n+\frac{2}{9}$$

となるので、

$$a_n=3^n\left(\frac{1}{9}n+\frac{2}{9}\right)=3^{n-2}\cdot n+2\cdot 3^{n-2}$$

となる。

　つまり、漸化式

$$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0\ (p,\, q\neq 0)$$

ではじめの 2 項 $a_1,\, a_2$ がわかっているとき、特性方程式 $t^2+pt+q=0$ 解を $\alpha,\, \beta$ とする。そして、この漸化式を

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \quad \cdots(3)$$

の形に変形する。そして、$\alpha\neq\beta$ のときは、(3)の形を 2 つ作りだして求める。一方、$\alpha=\beta$ のときは、(3)に代入して求めることができる。

２－２．隣接４項間漸化式

<u>例題 3</u>

$$a_1=1,\, a_2=2,\, a_3=5,$$
$$a_{n+3}-10a_{n+2}+31a_{n+1}-30a_n=0$$

によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

（解）　特性方程式 $t^3-10t^2+31t-30=0$ を解くと、$t=2, 3, 5$ とわかる。それぞれを順に $\alpha,\, \beta,\, \gamma$ とする。

　はじめに、$b_n=a_{n+1}-\alpha a_n$ とおいたとき、$b_n=a_{n+1}-2a_n$ より、与えられた漸化式は、

$$b_{n+2}-8b_{n+1}+15b_n=0$$

となる。このとき、$b_1=0,\, b_2=1$ とわかり、隣接 3 項間漸化式となる。ゆえに、

$$b_{n+2}-3b_{n+1}=5(b_{n+1}-3b_n)$$

と変形できる。よって、この漸化式は

$$b_{n+1}-3b_n=5^{n-1}. \qquad \cdots(4)$$

　同様にこの漸化式は、

$$b_{n+2}-5b_{n+1}=3(b_{n+1}-5b_n)$$

と変形できる。よって、この漸化式は

$$b_{n+1}-5b_n=3^{n-1} \quad \cdots(5)$$

となる。(4), (5)より、

$$b_n=\frac{5^{n-1}-3^{n-1}}{2}.$$

また、同様に $c_n=a_{n+1}-\beta a_n$ とおいたとき、$c_n=a_{n+1}-3a_n$ となり、

$$c_{n+2}-7c_{n+1}+10c_n=0$$

とできる。このとき、$c_1=c_2=-1$ とわかり、隣接3項間漸化式を得る。すると、

$$c_{n+2}-2c_{n+1}=5(c_{n+1}-2c_n)$$

と変形できる。よってこの漸化式は

$$c_{n+1}-2c_n=5^{n-1}. \quad \cdots(6)$$

同様にこの漸化式は

$$c_{n+2}-5c_{n+1}=2(c_{n+1}-5c_n)$$

と変形できる。よってこの漸化式は

$$c_{n+1}-5c_n=2^{n+1} \quad \cdots(7)$$

となる。(6), (7)より、

$$c_n=\frac{5^{n-1}-2^{n+1}}{3}.$$

よって、

$$a_{n+1}-2a_n=\frac{5^{n-1}-3^{n-1}}{2},$$

$$a_{n+1}-3a_n=\frac{5^{n-1}-2^{n+1}}{3}$$

とわかる。したがって、

$$a_n=\frac{5^{n-1}-3^n+2^{n+2}}{6}.$$

異なる視点で隣接4項間漸化式を考えてみる。

<u>例題4</u>

α, β, γ を3次方程式

$x^3+px^2+qx+r=0$（p, q, r は定数）

の3つの解とし、A, B, C を定数とする。このとき、$x_n=A\alpha^n+B\beta^n+C\gamma^n$（$n$=1, 2, 3, …)と定めれば、関係式

$$x_{n+3}+px_{n+2}+qx_{n+1}+rx_n=0$$

が成り立つことを証明せよ。

（解）　それぞれ以下のように表せる。

$$x_{n+3}=A\alpha^{n+3}+B\beta^{n+3}+C\gamma^{n+3}$$
$$px_{n+2}=p(A\alpha^{n+2}+B\beta^{n+2}+C\gamma^{n+2})$$
$$qx_{n+1}=p(A\alpha^{n+1}+B\beta^{n+1}+C\gamma^{n+1})$$
$$rx_n=r(A\alpha^n+B\beta^n+C\gamma^n).$$

これらを加えると、

$$\begin{aligned}
&x_{n+3}+px_{n+2}+qx_{n+1}+rx_n\\
&=(A\alpha^{n+3}+B\beta^{n+3}+C\gamma^{n+3})\\
&\quad+p(A\alpha^{n+2}+B\beta^{n+2}+C\gamma^{n+2})\\
&\quad+p(A\alpha^{n+1}+B\beta^{n+1}+C\gamma^{n+1})\\
&\quad+r(A\alpha^n+B\beta^n+C\gamma^n)\\
&=A\alpha^n(a^3+pa^2+qa+r)\\
&\quad+B\beta^n(\beta^3+p\beta^2+q\beta+r)\\
&\quad+C\gamma^n(\gamma^3+p\gamma^2+q\gamma+r)\\
&=A\alpha^n\times 0+B\beta^n\times 0+C\gamma^n\times 0\\
&=0.
\end{aligned}$$

例題4より、隣接4項間漸化式の一般項が求めることができる。

a_1, a_2, a_3 と解 α, β, γ を用いて A, B, C を求め、一般項を導出する。

$a_n=A\alpha^n+B\beta^n+C\gamma^n$ に n =1, 2, 3 を代入して、

$a_1 = A\alpha + B\beta + C\gamma \quad \cdots$(Ⅰ)

$a_2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 \quad \cdots$(Ⅱ)

$a_3 = A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 \quad \cdots$(Ⅲ)

{(Ⅰ)× α −(Ⅱ)}× β −{(Ⅰ)× α^2 −(Ⅲ)}を計算すると、

$$\alpha\beta a_1 - (\alpha + \beta)a_2 + a_3$$
$$= C(\alpha\beta\gamma - \beta\gamma^2 - \alpha\gamma^2 + \gamma^3)$$
$$= C\gamma(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)$$

より、

$$C = \frac{\alpha\beta a_1 - (\alpha + \beta)a_2 + a_3}{\gamma(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$$

を得る。この式の対称性を考えると、

$$A = \frac{\beta\gamma a_1 - (\beta + \gamma)a_2 + a_3}{\alpha(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}$$

$$B = \frac{\gamma\alpha a_1 - (\gamma + \alpha)a_2 + a_3}{\beta(\beta - \gamma)(\beta - \alpha)}$$

これらを代入すると、

$$a_n = \frac{\beta\gamma a_1 - (\beta + \gamma)a_2 + a_3}{\alpha(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}\alpha^n + \frac{\gamma\alpha a_1 - (\gamma + \alpha)a_2 + a_3}{\beta(\beta - \gamma)(\beta - \alpha)}\beta^n + \frac{\alpha\beta a_1 - (\alpha + \beta)a_2 + a_3}{\gamma(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}\gamma^n$$

となる。

このように、特性方程式が重解ではなく、異なる解をもつ場合については一般化することができた。

３．結論

教科書[2]に掲載された隣接 2 項間漸化式をもとに、隣接 3 項間の特性方程式の重解になる場合と重解にならない場合の解法および隣接 4 項間漸化式における特性方程式が重解でない場合の一般項が導出できた。

４．今後の課題

今回は隣接 4 項間までを考えた。隣接 4 項間漸化式において、特性方程式が重解でない場合は一般化ができた。しかし、重解の場合はまだわかっていない。よって、これからは隣接 4 項間漸化式において特性方程式が重解になる場合の解法および一般化を試みようと思う。また、隣接 2 項間漸化式では 1 次の特性方程式、隣接 3 項間漸化式では 2 次の特性方程式、隣接 4 項間漸化式では 3 次の特性方程式を解いたことから、n 項間漸化式では $(n-1)$ 次の特性方程式を解くことにより、一般項を導けるのではないかと予想できる。これらについて、研究を深めていきたい。

５．参考文献

[1] 「高校数学の美しい物語」
https://mathtrain.jp/

[2] 「数学 B」，東京書籍

[3] 「教科書 Finder」
http://text.yarukifinder.com/#

[4] 「中高数学研究」
http://xn--fiq353ajyhontfxcbv4e.com/

６．謝辞

研究をする過程でアドバイスを頂いた顧問の川口先生、サイエンス研究会数学班のみなさん、ありがとうございました。