グラフの最短経路とフェルマー点

5年C組　松川　賢太朗
指導教員　川口　慎二

１．要約

サイエンス研究会数学班5年生はグラフ理論について研究している。今回は、シュタイナー問題のフェルマー点について、最小全域木問題に関連する考察を行った。

キーワード　シュタイナー問題、フェルマー点、最小全域木問題

２．研究の背景と目的

グラフGの任意の2点u, vに対して、uとvを結ぶ辺がG内にあるとき、グラフGは**連結**であるという。連結グラフから適当な辺を取り除いていき、閉路をもたない木のことを**全域木**といい、グラフから辺を選び、選ばれた辺でグラフ全体を連結にする問題を**最小全域木問題**という。ただし、選ばれた辺の重みの総和を最小にすることが条件である。

３．研究内容

３－１．シュタイナー問題

平面上にn個の点が存在するとき、これらを線分で結び最短ネットワークを見つけるという問題を考える。ただしこのとき、任意の点を付け加えてもよい。このような問題は点を「都市」、線分を「経路」に見立てることで都市を結ぶ最短経路を考える問題となる。

点の個数に応じて、最短経路について考えることにする。

(1) $n=3$のとき

3点A, B, Cについて、PA＋PB＋PCが最小になる点Pを考える。△ABCの最大角を∠Aとする。

(ｉ) ∠A≦120°のとき

求める点Pは△ABCのフェルマー点である。つまり、フェルマー点から3点A, B, Cへ結んだ線分の和が最短経路となる。

△ABCの**フェルマー点**とは、3頂点A,B,Cからの距離の和を最小にする点Pのことをいう。ただし最大角の大きさが120°以下であることが存在の条件となることが知られている。フェルマー点Pは∠APB＝∠BPC＝∠CPA＝120°を満たす。

(ⅱ) ∠A＞120°のとき

2つの線分AB, ACをつないでできる折れ線が最短経路となる。

＜フェルマー点の作図方法＞

フェルマー点は、トリチェリの作図法を

用いることで作図することができる。△ABC のフェルマー点について考える（図 1 参照)。

①AC を一辺とする正三角形 ACD をかく。

②△ACD の外接円 O をかく。

③BD を結び､円 O との交点を P とする。この点 P がフェルマー点となる。

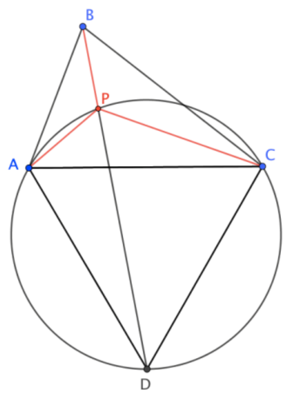

図 1

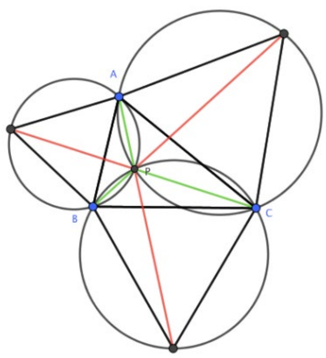

図 2

ここで､図 2 の点 P が△ABC のフェルマー点であることを示す。

（証明）

3 点 A, B, C において、△ABC の内部に点 P をとる。点 A と点 P を、C を中心にして反時計回りに 60°回転させた点をそれぞれ A', P'とする。△APC と△A'P'C において、2 辺挟角相等より△APC≡△A'P'C である。ゆえに、AP＝A'P', P'P＝CP より、

AP＋BP＋CP＝A'P'＋P'P＋PB≧A'B

となる。A'P'＋P'P＋PB が A'B と一致するとき最小値をとる。よって P は A'B 上にある。同様にして、P は DC 上にある。よって P は A'B と DC の交点である。

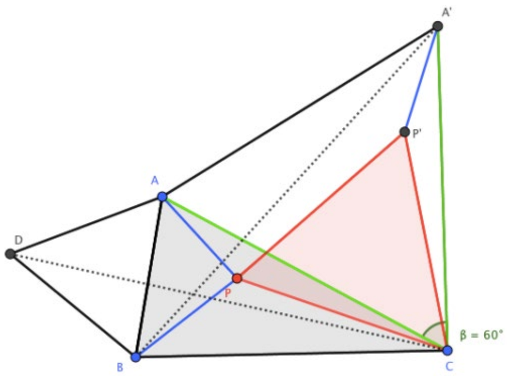

図 3

(2) $n=4$ のとき

正方形にトリチェリの作図を繰り返し用いると図 4 のようになる。

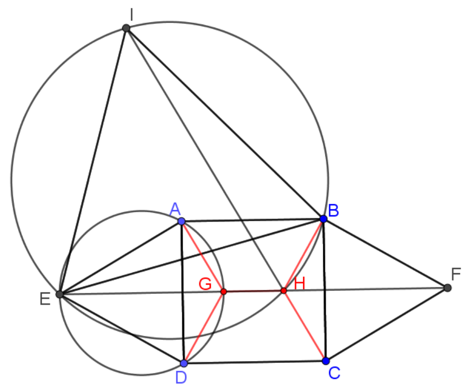

図 4

AG＋DG＋GH＋BH＋CH が最小となることを示す。これは図 3 の証明と同様に行った。

（証明）

AD, BC を一辺とする正三角形 ADE と

BCF をかく。点 G を、D を中心に反時計回りに 60°回転させた点を I とおく。また点 H を、B を中心に反時計回りに 60°回転させた点を J とおく。また△AGD と△EID において、DG＝IG, AD＝ED より、△AGD≡△EID なので、AG＝EI である。同様にして CH＝JF なので、これらより

$$\mathrm{AG}+\mathrm{DG}+\mathrm{GH}+\mathrm{BH}+\mathrm{CH}$$
$$=\mathrm{EI}+\mathrm{IG}+\mathrm{GH}+\mathrm{HJ}+\mathrm{JF}$$

となる。I, G, H, J が直線 EF 上にあるときが最小となる（図 5 参照）。

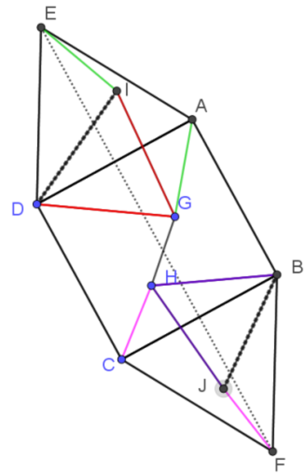

図 5

これにより、トリチェリの作図を繰り返し用いることでフェルマー点を作図できることがわかる。

(3)　$n=5$ のとき

トリチェリの作図を繰り返し用いて、図 6 のように作図した。

その結果、図 6 のように五角形 ABCDE の内部に F, G, H の 3 つのフェルマー点ができる。

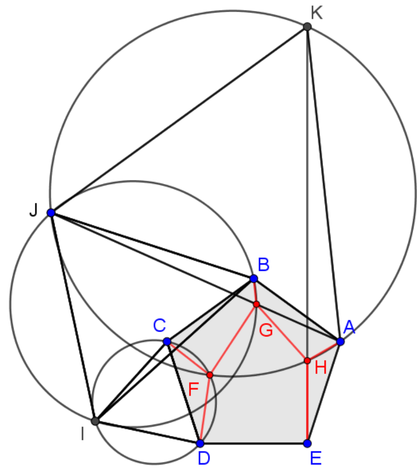

図 6

(4)　$n=6$ のとき

最短経路は正六角形 ABCDEF の辺をつないだ閉路になった。

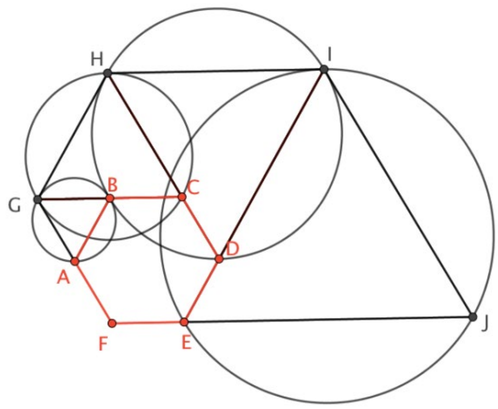

図 7

(5)　$n=7$ のとき

このとき、図 8 のように、フェルマー点が正七角形の外部に作成されてしまったため作図に失敗してしまったと思われる。

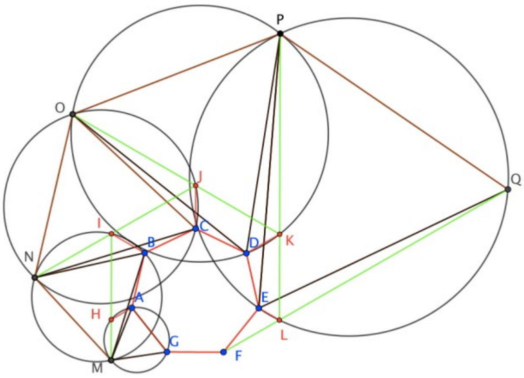

図 8

３－２．クラスカル法

最小全域木問題の解法には主に 2 つのアルゴリズムがあり、その 1 つが以下の**クラスカル法**である。

＜手順＞

グラフ内の辺のうち、重みが小さいものから順に注目し、その辺を加えても閉路ができない場合にはその辺を枝として加える。同じ重みの辺が複数本ある場合については、順番は任意である。

図 9 のような重み付きグラフに対して、手順にしたがって辺を選択していくと、図 10 のような木を得る。

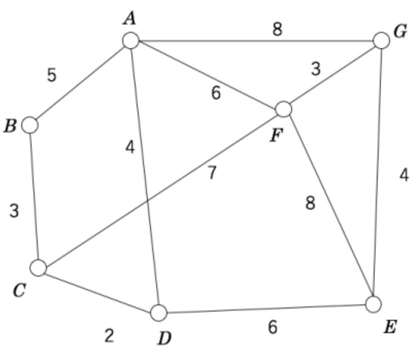

図 9

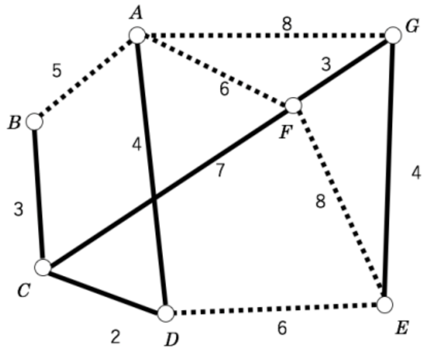

図 10

３－３．プリム法

次に、注目する頂点を 1 つ決め、そこをスタート地点とし、頂点を次々に取り込むことによって頂点を連結していく方法である**プリム法**を用いて考察する。

＜手順＞

頂点を 1 つ選ぶ（図 11 では A としている）。A に連結している 3 辺 AB, AD, AG に注目して重みが最も小さい辺を選ぶ。このとき、AD の重みが最も小さいため、これを A に連結させる。この操作を閉路ができないように繰り返す。

例えば図 11 において、頂点 B に到達したとき、B と A を連結させてしまえば、閉路 ABCD ができてしまい不適となる。この場合は､ひとつ前の頂点である C に戻って、まだ連結していない辺の中からまた重みが最も小さい辺を選んで連結していく。

今回はプリム法を利用して、日本地図の県庁所在地を結ぶ最小全域木を作成した。

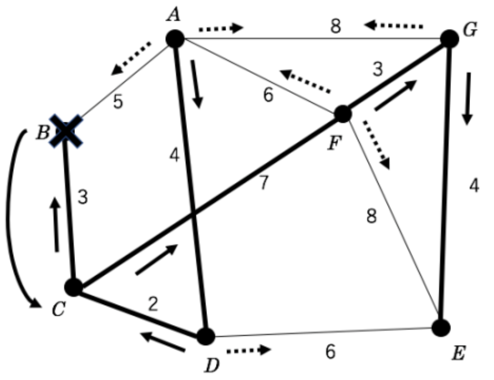

図 11

＜方法＞

図 12 のように地図の県庁所在地をグラフの頂点として設定し、隣接している県を辺（赤い辺で表示）で結んだ。このとき、重みはそれぞれの県庁所在地の距離を用い、海を渡る場合（青い辺で表示）は重みを 2 倍することにした。ただし、今回は地図の都合上、札幌と那覇は除外した。

＜結果＞

図 13 のように、A_7, A_{10}, A_{20}, A_{34}, A_{38}, A_{41} の 6 つの分岐点を確認できた。

県庁所在地同士の直線距離だけで重みを決めているため、精密なグラフは作成できていないのではないかと考えられる。分岐点ができる条件があるのではないかと予想している。

４．今後の課題

フェルマー点の作図に $n = 7$ のときに失敗してしまった。フェルマー点に関する考察を深め、第 2 フェルマー点についての考察などをあわせて行っていきたい。

日本地図にプリム法を用いて最小全域木を作成したものの、設定がまだ甘く直線距離での評価しか行っていないため精度が低いと思われる。条件をもう少し綿密に設定したい。

５．参考文献

[1] web サイト「高校数学の美しい物語」
https://mathtrain.jp

[2] web サイト「トリチェリの問題」
http://www004.upp.so-net.ne.jp/s_honma/reminder.htm

[3] 「グラフ理論入門―基本とアルゴリズム」， 宮崎修一，森山出版（2015）

６．謝辞

今回の研究にあたり、ご指導下さいました顧問の川口先生ありがとうございました。

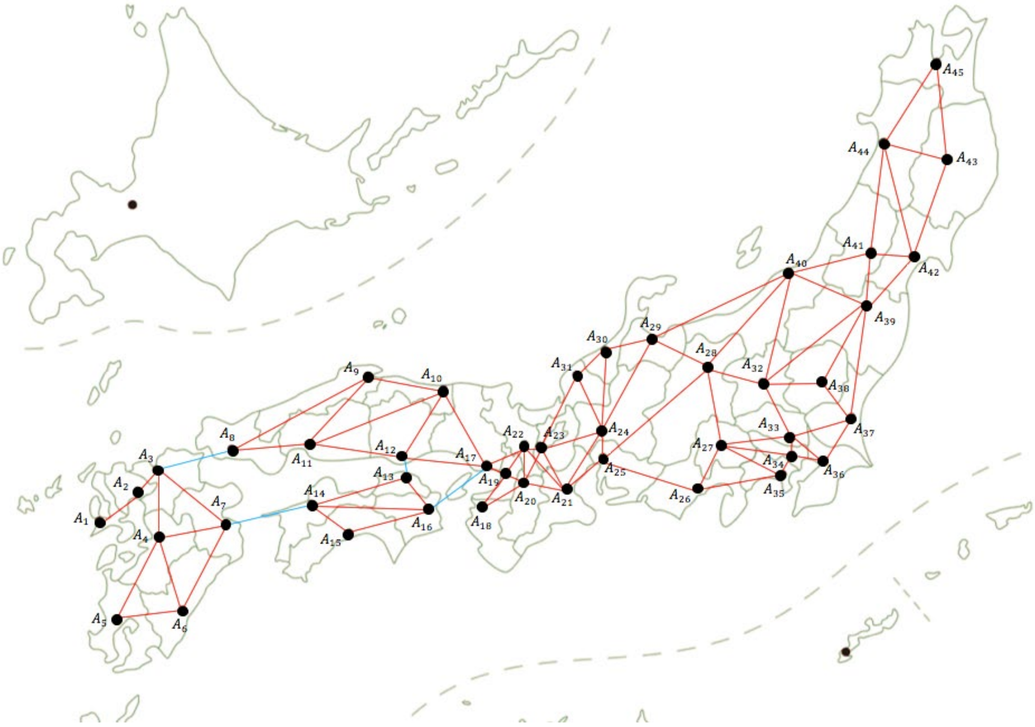
A_1
A_2
A_3
A_4
A_5
A_6
A_7
A_8
A_9
A_{10}
A_{11}
A_{12}
A_{13}
A_{14}
A_{15}
A_{16}
A_{17}
A_{18}
A_{19}
A_{20}
A_{21}
A_{22}
A_{23}
A_{24}
A_{25}
A_{26}
A_{27}
A_{28}
A_{29}
A_{30}
A_{31}
A_{32}
A_{33}
A_{34}
A_{35}
A_{36}
A_{37}
A_{38}
A_{39}
A_{40}
A_{41}
A_{42}
A_{43}
A_{44}
A_{45}

図 12

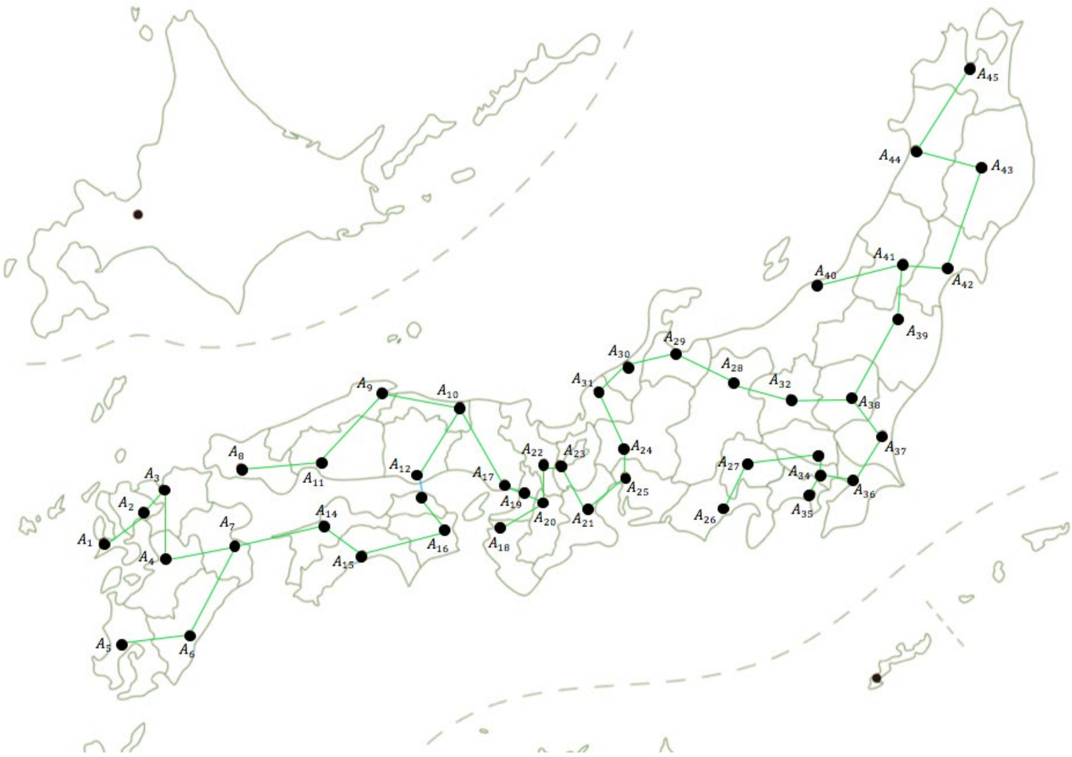
A_1
A_2
A_3
A_4
A_5
A_6
A_7
A_8
A_9
A_{10}
A_{11}
A_{12}
A_{14}
A_{15}
A_{16}
A_{17}
A_{18}
A_{19}
A_{20}
A_{21}
A_{22}
A_{23}
A_{24}
A_{25}
A_{26}
A_{27}
A_{28}
A_{29}
A_{30}
A_{31}
A_{32}
A_{34}
A_{35}
A_{36}
A_{37}
A_{38}
A_{39}
A_{40}
A_{41}
A_{42}
A_{43}
A_{44}
A_{45}

図 13