n 次方程式の解の範囲について

5 年 C 組　古宮　昌典
指導教員　川口　慎二

１．要約

サイエンス研究会数学班 5 年生は代数方程式について研究している。今回は、n 次方程式における解の存在範囲をよい精度で与える公式を作ることを目標とし、その目標のために不等式について学習した。

キーワード　　n 次方程式、解、絶対値、不等式評価

２．研究の背景と目的

私は今年度 11 月に行われた ISSS に参加し、ベトナム国家大学ハノイ校自然科学大学附属英才高校(HSGS)で数学の授業を受けた。そのとき、n 次方程式における解についての議論があった。そこで、その議論をより深めていくことで、さらに n 次方程式の解についての詳しい結果が得られると考え、本稿にまとめることにした。

３．研究内容

HSGS で受けた授業で以下の定理を知った。

<u>定理１</u>

複素数変数 x に関する n 次方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

について、$\displaystyle \max_{0 \leqq i \leqq n-1} \left| \frac{a_i}{a_n} \right| = M$ とするとき、

$$|x| < M + 1$$

が成り立つ。

（証明）

方程式を以下のように変形する。

$$x^n = -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} x^i$$

両辺の絶対値をとり、三角不等式を用いることで以下を得る。

$$|x|^n \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{a_i}{a_n} \right| |x|^i$$

ここで、$\displaystyle M = \max_{0 \leqq i \leqq n-1} \left| \frac{a_i}{a_n} \right|$ より以下を得る。

$$|x|^n \leqq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{a_i}{a_n} \right| |x|^i \leqq \sum_{i=0}^{n-1} M\,|x|^i$$

$$= \frac{M\left(|x|^x - 1\right)}{|x| - 1} < \frac{M\,|x|^n}{|x| - 1}$$

両辺を $|x|^n > 0$ で割って、$\displaystyle 1 < \frac{M}{|x| - 1}$.

ここで、$|x|>1$のとき、$|x|-1>0$であるから、$|x|-1<M$.

よって、$|x|<M+1$を得る。（Q. E. D.）

実際に、6 次方程式

$$x^6-21x^5+7x^4-3x^3+2x^2-17x+10=0$$

について、この定理 1 を用いると、$|x|<22$ となる。実際の解は$|x|<20.67$なので、精度はよい。しかし、6 次方程式

$$x^6-x^5+7x^4-3x^3+2x^2-17x+10=0$$

について、定理 1 からは$|x|<18$が得られるが、実際は$|x|<2.67$であり、精度が悪い。このように、係数によっては精度が悪くなる。特に、M が高い次数の係数である場合には精度はよいが、低い次数の係数である場合は精度が悪くなるのではないかと考えた。

定理２

複素数変数 x に関する n 次方程式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

について、$\max\limits_{0\leqq i\leqq n-2}\left|\frac{a_i}{a_n}\right|=M$ とするとき、

$$|x|\leqq\max\left(\frac{1+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|+\sqrt{\left(1-\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)^2+4M}}{2},\ 1\right)$$

が成り立つ。

（証明）

$|x|>1$のとき、方程式を以下のように変形できる。

$$|x|^n\leqq\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right||x|^{n-1}+\sum_{i=0}^{n-2}\left|\frac{a_i}{a_n}\right||x|^i$$

$$\leqq\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right||x|^{n-1}+\sum_{i=0}^{n-2}M|x|^i$$

$$\leqq\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right||x|^{n-1}+M\cdot\frac{|x|^{n-1}-1}{|x|-1}$$

$$<\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right||x|^{n-1}+M\cdot\frac{|x|^{n-1}}{|x|-1}$$

両辺を$|x|^{n-1}>0$で割り、整理すると、

$$|x|^2-\left(1+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)|x|+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|-M<0.$$

これを$|x|$について解くと、

$$|x|<\frac{1+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|+\sqrt{\left(1-\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)^2+4M}}{2}$$

を得る。ここで、

$$\frac{1+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|+\sqrt{\left(1-\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)^2+4M}}{2}<1$$

のときは$|x|>1$に矛盾するため、$|x|\leqq1$となる。ゆえに、

$$|x| \leqq \max\left(\frac{1+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|+\sqrt{\left(1-\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)^2+4M}}{2}, 1 \right)$$

となる。（Q. E. D.）

定理２において、特に$|a_{n-1}|=|a_n|$のとき、

$\left|\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right|=1$であるから、$|x|<1+\sqrt{M}$が成り立つ。

実際に、６次方程式

$x^6-x^5+7x^4-3x^3+2x^2-17x+10=0$

について定理２を用いると、$|x|<5.13$が得られ、定理１よりも精度の良い結果となる。

しかし、$\left|\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right|=M$である場合、$|x|<1+M$

となり、定理１と同じ値となる。$\left|\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right|=M$の場合を除けば、定理２は定理１よりもよい精度の値を与える(ただし、$M \geqq 1$)。

<u>定理３</u>

複素数変数xに関するn次方程式

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

について、

$$M_1 = \max_{0 \leqq i \leqq n-2} \left|\frac{a_i}{a_n}\right| = \left|\frac{a_{m_1}}{a_n}\right|,$$

$$M_2 = \max_{0 \leqq i \leqq n-2, i \neq m_1} \left|\frac{a_i}{a_n}\right| = \left|\frac{a_{m_2}}{a_n}\right|,$$

$G=\dfrac{M_1+M_2}{2}$とする。$m_2>m_1$を満たすとき、

$$|x| < \max\left(\frac{1+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|+\sqrt{\left(1-\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)^2+4G}}{2},\ 1 \right)$$

が成り立つ。

（証明）

方程式を変形して、次を得る。

$$|x|^n \leqq \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right||x|^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2}\left|\frac{a_i}{a_n}\right||x|^i$$

ここで、$0 \leqq i \leqq n-2, i \neq m_1$において、

$$G-\left|\frac{a_i}{a_n}\right| \geqq 0$$

が成り立つ。よって、$|x|>1$のとき、

$$\sum_{i=0}^{n-2} G|x|^i - \sum_{i=0}^{n-2}\left|\frac{a_i}{a_n}\right||x|^i$$

$$\geqq \sum_{i=m_1,m_2}\left(\frac{M_1+M_2}{2}-\left|\frac{a_i}{a_n}\right|\right)|x|^i$$

$$\geqq \frac{-M_1+M_2}{2}|x|^{m_1} + \frac{M_1-M_2}{2}|x|^{m_2}$$

$$\geqq \frac{M_1-M_2}{2}\left(|x|^{m_2}-|x|^{m_1}\right) \geqq 0$$

ゆえに、

$$\sum_{i=0}^{n-2}\left|\frac{a_i}{a_n}\right||x|^i \leq \sum_{i=0}^{n-2} G|x|^i$$

を得る。ここで、

$$|x|^n \leqq \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right||x|^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} G|x|^i$$

$$= \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right||x|^{n-1} + G \cdot \frac{|x|^{n-1}-1}{|x|-1}$$

$$< \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right||x|^{n-1} + G \cdot \frac{|x|^{n-1}}{|x|-1}$$

両辺を $|x|^{n-1} > 0$ で割り、$|x|$ について解くと、

$$|x| < \frac{1+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| + \sqrt{\left(1-\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)^2 + 4G}}{2}$$

を得る。ここで、

$$\frac{1+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| + \sqrt{\left(1-\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)^2 + 4G}}{2} < 1$$

のときは $|x| > 1$ に矛盾するため、$|x| \leqq 1$ となる。ゆえに、

$$|x| \leq \max\left(\frac{1+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| + \sqrt{\left(1-\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)^2 + 4G}}{2}, 1\right)$$

である。 (Q. E. D.)

実際に、6 次方程式

$$x^6 - x^5 + 7x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 20x + 5 = 0$$

について定理３を用いると、$|x| < 5$ が得られる。定理２から得られる値は $|x| < 5.47$ なので、精度が上がっている(実際の解は $|x| < 2.48$)。また、M_1 と M_2 の差が大きいほど、有用である。しかし、$m_1 > m_2$ であるときは定理を適用させることができない。

定理４

複素数変数 x に関する n 次方程式

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

について、$\left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right|, \cdots, \left|\frac{a_1}{a_n}\right|, \left|\frac{a_0}{a_n}\right|$ を大きい順に並べたものを $S_{n-2}, \cdots, S_1, S_0$ とする。また、$K = \max_{0 \leqq i \leqq n-3} \frac{S_i}{S_{i+1}}$ とし、

$$A = \frac{K + \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| + \sqrt{\left(K - \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)^2 + 4S_{n-2}}}{2}$$

とするとき、$|x| \leqq \max(A, 1)$ が成り立つ。

（証明）

まず、以下の補題が成り立つ(参考文献[2]を参照したが、証明は自分で行った)。

補題１（並べ替え不等式）

$$p_1 \leqq p_2 \leqq \cdots \leqq p_{n-1} \leqq p_n,$$
$$q_1 \leqq q_2 \leqq \cdots \leqq q_{n-1} \leqq q_n$$

なる実数 p_i, q_i において、和

$$T(i_1, i_2, \cdots, i_n) = p_1 q_{i_1} + \cdots + p_n q_{i_n}$$

を考えるとき、このうちで最大のものは $T(1, 2, \cdots, n)$ である。

（補題１の証明）

数学的帰納法で示す。

$n=2$ のとき、

$$T(1, 2)-T(2, 1)$$

$$= p_1q_1 + p_2q_2 - p_1q_2 - p_2q_1$$

$$= p_1(q_1 - q_2) + p_2(q_2 - q_1)$$

$$= (p_2 - p_1)(q_2 - q_1) \geqq 0$$

より、$T(1, 2) \geqq T(2, 1)$ を得るので、命題は成り立つ。

$n \leqq k$ のとき、任意の $T(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ において $T(1, 2, \cdots, n) \geqq T(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ が成り立つと仮定する。

このとき、$n=k+1$ において、

$$T(i_1, i_2, \cdots, i_{k+1})$$

$$= p_1q_{i_1} + \cdots + p_kq_{i_k} + p_{k+1}q_{i_{k+1}}$$

である。

ここで、$i_{k+1}=k+1$ のときは仮定より、

$$T(i_1, i_2, \cdots, i_{k+1})$$

$$= p_1q_{i_1} + \cdots + p_kq_{i_k} + p_{k+1}q_{k+1}$$

$$\leqq p_1q_1 + \cdots + p_kq_k + p_{k+1}q_{k+1}$$

$$= T(1, 2, \cdots, k+1)$$

となり、命題は成り立つ。

$i_{k+1} \neq k+1$ のとき、$i_j = k+1$ となる j をとる。

$j \geqq 2$ のとき、仮定より、

$$T(i_1, i_2, \cdots, i_j, \cdots, i_{k+1})$$

$$= p_1q_{i_1} + \cdots + p_jq_{i_j} + \cdots + p_{k+1}q_{i_{k+1}}$$

$$\leqq p_1q_1 + \cdots + p_{j-1}q_{j-1}$$

$$+ p_jq_{k+1} + p_{j+1}q_j + \cdots + p_{k+1}q_k$$

$$\leqq p_1q_1 + \cdots + p_{j-1}q_{j-1}$$

$$+ p_jq_j + p_{j+1}q_{j+1} + \cdots + p_{k+1}q_{k+1}$$

$$= T(1, 2, \cdots, k+1)$$

となり、命題は成り立つ。

$j=1$ のとき、仮定より、

$$T(i_1, i_2, \cdots, i_{k+1})$$

$$= p_1q_{k+1} + p_2q_{i_2} + \cdots + p_{k+1}q_{i_{k+1}}$$

$$\leqq p_1q_{k+1} + p_2q_1 + \cdots + p_kq_{k-1} + p_{k+1}q_k$$

$$\leqq p_1q_1 + \cdots + p_{k-1}q_{k-1} + p_kq_{k+1} + p_{k+1}q_k$$

$$\leqq p_1q_1 + \cdots + p_{k-1}q_{k-1} + p_kq_k + p_{k+1}q_{k+1}$$

$$= T(1, 2, \cdots, k+1)$$

となり、命題は成り立つ。

よって $n=k+1$ についても命題は成り立つので、示された。 (Q. E. D.)

（定理４の証明）

方程式を変形して、次を得る。

$$|x|^n \leqq \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right||x|^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2}\left|\frac{a_i}{a_n}\right||x|^i$$

ここで、$|x|>1$のとき、補題１より

$$\sum_{i=0}^{n-2}\left|\frac{a_i}{a_n}\right||x|^i \leqq \sum_{i=0}^{n-2} S_i |x|^i$$

が成り立つので、以下を得る。

$$|x|^n \leqq \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right||x|^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} S_i |x|^i .$$

ここで、

$$|x|^n \leqq \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right||x|^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} S_i |x|^i$$

$$= \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right||x|^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} S_{n-2} \cdot \frac{S_{n-3}}{S_{n-2}} \cdot \cdots \cdot \frac{S_i}{S_{i+1}} |x|^i$$

$$\leqq \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right||x|^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} S_{n-2} K^{n-2-i} |x|^i$$

$$= \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right||x|^{n-1} + S_{n-2} K^{n-2} \cdot \frac{\left(\frac{|x|}{K}\right)^{n-1} - 1}{\frac{|x|}{K} - 1}$$

$$< \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right||x|^{n-1} + S_{n-2} K^{n-2} \cdot \frac{\left(\frac{|x|}{K}\right)^{n-1}}{\frac{|x|}{K} - 1}$$

$$= \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right||x|^{n-1} + S_{n-2} K^{n-2} \cdot \frac{\left(\frac{|x|}{K}\right)^{n-1} \cdot K}{|x| - K}$$

$$= \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right||x|^{n-1} + S_{n-2} \cdot \frac{|x|^{n-1}}{|x| - K}$$

ゆえに、両辺を$|x|^{n-1}>0$で割って、

$$|x| < \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| + S_{n-2} \cdot \frac{1}{|x| - K}$$

$|x|>K$ のとき、$|x|-K>0$ であるから、

$$|x|\left(|x|-K\right) < \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\left(|x|-K\right) + S_{n-2}$$

整理して、

$$|x|^2 - \left(K + \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)|x| + K\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| - S_{n-2} < 0$$

を得る。これを$|x|$について解くと、

$$|x| < \frac{K + \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| + \sqrt{\left(K - \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)^2 + 4S_{n-2}}}{2} = A$$

を得る。

しかし、$A \leq 1$のときは、$|x|>1$に矛盾するので$|x| \leq 1$である。ゆえに、

$$|x| \leq \max(A, 1)$$

である。（Q. E. D.）

６次方程式
$x^6 - 2x^5 + 15x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 10x + 3 = 0$
について、この場合は定理３を用いることができないが、定理４を用いると$|x|<5.29$が得られる。定理２から得られるのは$|x|<5.41$なので、少し精度があがっている。

ちなみに、実際の解は$|x|<3.92$である。

しかし、$0 \leqq i < j \leqq n-2$ であって、$|a_i| = |a_j|$ なるものが存在する場合、$K=1$ となるので、定理２と同じ値になってしまう。

定理５

複素数変数 x に関する n 次方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

について、$\left|\dfrac{a_{n-2}}{a_n}\right|, \cdots, \left|\dfrac{a_1}{a_n}\right|, \left|\dfrac{a_0}{a_n}\right|$ を大きい順に並べたものを $S_{n-2}, \cdots, S_1, S_0$ とする。

また、$m = \min\limits_{0 \leqq i \leqq n-3} \dfrac{S_{n-2} - S_i}{n-2-i}$, $\left|\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right| = a$, $\sqrt{S_{n-2}} = b$ とする。このとき、

$$|x| < 1 + \frac{(a+b)^2(a+2b+1) - m}{a^2 + 2b^2 + 4ab + 2a + 2b}$$

が成り立つ。

（証明）

並べ替え不等式(補題１)を用いて方程式を変形し、以下を得る。

$$|x|^n \leqq \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| |x|^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} S_i |x|^i$$

ここで、任意の k に対して、

$$m \leqq \frac{S_{n-2} - S_k}{n-2-k}$$

なので、$m(n-k-2) \leqq S_{n-2} - S_k$ から、

$$S_k \leqq S_{n-2} - (n-k-2)m.$$

ゆえに、

$$|x|^n \leqq \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| |x|^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} S_i |x|^i$$

$$\leqq \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| |x|^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \left(S_{n-2} - (n-2-i)m\right) |x|^i$$

$$= \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| |x|^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} S_{n-2} |x|^i - \sum_{i=0}^{n-2} (n-2-i)m |x|^i$$

ここで、$\sum\limits_{i=0}^{n-2} (n-2-i)m|x|^i$ を計算すると、

$$\sum_{i=0}^{n-2} (n-2-i)m|x|^i = m \cdot \frac{|x|^{n-1} - (n-1)|x| + n - 2}{\left(|x|-1\right)^2}$$

となるので、

$$|x|^n \leqq \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| |x|^{n-1} + S_{n-2} \cdot \frac{|x|^{n-1} - 1}{|x|-1} + m \cdot \frac{|x|^{n-1} - (n-1)|x| + n - 2}{\left(|x|-1\right)^2}$$

$$< \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| |x|^{n-1} + S_{n-2} \cdot \frac{|x|^{n-1}}{|x|-1} + m \cdot \frac{|x|^{n-1}}{\left(|x|-1\right)^2}$$

両辺を $|x|^{n-1} > 0$ で割って整理すると、

$$\left(|x| - \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)\left(|x|-1\right)^2 - S_{n-2}\left(|x|-1\right) - m < 0$$

ここで、

$$f(x) = \left(|x| - \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)\left(|x|-1\right)^2$$

$$-S_{n-2}\left(|x|-1\right)-m$$

とすると、$f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称であるから、$x \geqq 0$ の範囲で考えればよい。このとき、

$$f'(x)$$

$$=3x^2-2\left(2+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)x+\left(1+2\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|-S_{n-2}\right)$$

となるので、

$$x=\frac{2+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\pm\sqrt{\left(2+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)^2-6\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|-3+3S_{n-2}}}{3}$$

$$=\frac{2+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\pm\sqrt{\left(1-\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)^2+3S_{n-2}}}{3}$$

のとき、$f'(x)=0$ となる。また、

$$\frac{2+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|-\sqrt{\left(1-\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)^2+3S_{n-2}}}{3}$$

$$\leq\frac{2+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|-\sqrt{\left(1-\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)^2}}{3}$$

$$=\frac{\left|2+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right|-\left|\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|-1\right|}{3}$$

$$\leq\frac{\left|2+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|-\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|+1\right|}{3}=1.$$

ここで、逆三角不等式 $|s|-|t|\leq|s-t|$ を用いている。

$$\frac{2+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|+\sqrt{\left(1-\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)^2+3S_{n-2}}}{3}$$

$$\geqq\frac{2+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|+\sqrt{\left(1-\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)^2}}{3}$$

$$=\frac{\left|2+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right|+\left|1-\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right|}{3}$$

$$\geqq\frac{\left|2+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|+1-\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right|}{3}=1$$

が成り立つ。よって、$f(x)$ のグラフは図 1 のようになる。

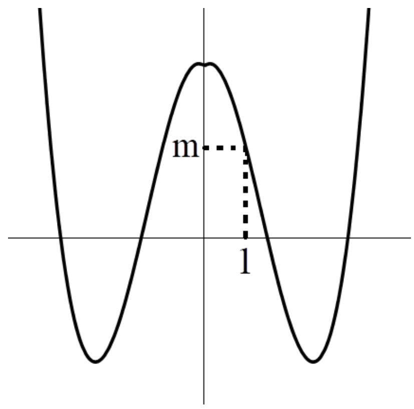

図 1

いま、

$$\frac{2+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|+\sqrt{\left(1-\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)^2+3S_{n-2}}}{3}$$

$$\leqq\frac{2+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|+\sqrt{\left(1-\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)^2}+\sqrt{3S_{n-2}}}{3}$$

$$=\frac{2+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|+\left|1-\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right|+\sqrt{3S_{n-2}}}{3}$$

$$\leqq\frac{2+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|+1+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|}{3}+\sqrt{\frac{S_{n-2}}{3}}$$

$$\leqq 1+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|+\sqrt{S_{n-2}}=1+a+b$$

が成り立つ。

よって、$f(x)$のグラフ上の点$\left(1+a+b,\ f(1+a+b)\right)$を通り$f(x)$に接する直線と$x$軸の交点の$x$座標を$d$とすると、$f(x)<0$をみたす$x$は$|x|<d$も満たす。

$c=1+a+b$とおく。$\left(c,\ f(c)\right)$を通り$f(x)$に接する直線の方程式は以下のようになる。

$$y=f'(c)(x-c)+f(c)$$

$y=0$を代入し、xについて解くと、

$$x=c-\frac{f(c)}{f'(c)}.$$

よって、

$$|x|<c-\frac{f(c)}{f'(c)}$$

が成り立つ。

$c=1+a+b$を代入し、計算すると、

$$|x|<1+\frac{(a+b)^2(a+2b+1)-m}{a^2+2b^2+4ab+2a+2b}$$

を得る。（Q. E. D.）

証明の後半部分について、ニュートン法を用いてグラフとx軸の交点を求めている。一般に、漸化式

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)}$$

を順に計算していくことでより精度の高い値が得られる。

定理５は、定理３が使えず、定理４で得られる値が定理２と同じになってしまう場合に有用な公式であると考えた。しかし、実際の方程式に適用させると、定理５は定理２と同程度かそれ以下の精度であることがわかった。

例えば、６次方程式

$$x^6-2x^5+15x^4+5x^3+5x^2+10x+3=0$$

について、定理５を用いると、$|x|<5.8$が得られる。しかし、定理２から得られる値は、$|x|<5.41$であり、定理５のほうが精度が悪い(実際の解は$|x|<3.92$)。

これは、ニュートン法の計算回数を増やすことで、ある程度精度をあげることができると考えられる。

<u>定理６</u>

複素数変数xに関するn次方程式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

について、$\left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right|,\cdots,\left|\frac{a_1}{a_n}\right|,\left|\frac{a_0}{a_n}\right|$を大きい順に並べたものを$S_{n-2},\cdots,S_1,S_0$とする。また、$T=\sqrt[n-2]{\frac{S_{n-3}}{S_{n-2}}}$とするとき、

$$|x|\leqq \max\left(\frac{T+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|+\sqrt{\left(T-\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)^2+4S_{n-2}}}{2},\ 1\right)$$

が成り立つ。

（証明）

方程式を変形し、並べ替え不等式を用いると、$|x|>1$ のとき、次を得る。

$$|x|^n \leqq \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right||x|^{n-1}+\sum_{i=0}^{n-2}S_i|x|^i$$

いま、$0 \leqq i \leqq n-2$ の整数 i について、

$$S_i \leqq S_{n-3}\cdot\left(\sqrt[n-2]{\frac{S_{n-2}}{S_{n-3}}}\right)^i$$

が成り立つ。ここで、

$$U=\sqrt[n-2]{\frac{S_{n-2}}{S_{n-3}}}=\frac{1}{T}$$

とおくと、

$$|x|^n \leqq \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right||x|^{n-1}+\sum_{i=0}^{n-2}S_{n-3}U^i|x|^i$$

$$\leqq \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right||x|^{n-1}+S_{n-3}\cdot\frac{\left(U|x|\right)^{n-1}-1}{U|x|-1}$$

$$< \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right||x|^{n-1}+S_{n-3}\cdot\frac{U^{n-1}|x|^{n-1}}{U|x|-1}$$

両辺を $|x|^{n-1}>0$ で割り、$|x|$ について解くと、

$$|x|<\frac{\frac{1}{U}+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|+\sqrt{\left(\frac{1}{U}-\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)^2+4S_{n-3}U^{n-2}}}{2}$$

を得る。いま、$U=\sqrt[n-2]{\frac{S_{n-2}}{S_{n-3}}}=\frac{1}{T}$ より、

$$|x|<\frac{T+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|+\sqrt{\left(T-\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)^2+4S_{n-2}}}{2}.$$

ここで、

$\frac{T+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|+\sqrt{\left(T-\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)^2+4S_{n-2}}}{2}\leq 1$ のとき、

$|x|>1$ に矛盾するので、$|x|\leq 1$.

ゆえに、

$$|x|\leq \max\left(\frac{T+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|+\sqrt{\left(T-\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)^2+4S_{n-2}}}{2},1\right)$$

である。（Q. E. D.）

この定理は S_{n-2} と S_{n-3} の差が大きいが、定理３が使えないとき、有用である。

６次方程式

$x^6-2x^5+17x^4+2x^3+2x^2+2x+2=0$

について、この場合、定理３が使えず、定理４で得られる値が定理２と同じになってしまう。定理６を用いると、$|x|<5.48$ が得られる。定理２から得られる値は $|x|<5.66$ なので、定理２よりも精度はよい(実際の解は $|x|<4.14$)。しかし、S_{n-2} と S_{n-3} の差が小さいときや n の値が大きいときは定理２で得られる値とほとんど等しくなる。

定理７

複素数変数 x に関する n 次方程式

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

について、

$$z = \frac{\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| + \sqrt{\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|^2 + 4\left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right| + 2n - 6}}{2}$$

とおくとき、

$$|x| < z + \frac{\sum_{i=0}^{n-3} \frac{n-2-i}{n-2}\left|\frac{a_i}{a_n}\right|^{\frac{n-2}{n-2-i}}}{z^{n-3}\left(\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| z + 2\left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right| + n - 3\right)}$$

が成り立つ。

（証明）

まず、以下の補題が成り立つ。

<u>補題２</u>（Young の不等式）

非負実数 p, q および $s+t=1$ なる正の実数 s,t について、以下が成り立つ。

$$pq \leq sp^{\frac{1}{s}} + tq^{\frac{1}{t}}$$

証明は参考文献[4]を参照されたい。

方程式を変形して、次を得る。

$$|x|^n \leqq \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right||x|^{n-1} + \left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right||x|^{n-2} + \sum_{i=0}^{n-3}\left|\frac{a_i}{a_n}\right||x|^i$$

ここで、$0 \leqq i \leqq n-3$ において、
$\dfrac{n-2-i}{n-2} + \dfrac{i}{n-2} = 1$ であるから、補題２より、次が成り立つ。

$$\left|\frac{a_i}{a_n}\right||x|^i \leqq \frac{n-2-i}{n-2}\left|\frac{a_i}{a_n}\right|^{\frac{n-2}{n-2-i}} + \frac{i}{n-2}\left(|x|^i\right)^{\frac{n-2}{i}}$$

$$= \frac{n-2-i}{n-2}\left|\frac{a_i}{a_n}\right|^{\frac{n-2}{n-2-i}} + \frac{i}{n-2}|x|^{n-2}$$

よって、

$$|x|^n \leqq \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right||x|^{n-1} + \left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right||x|^{n-2}$$

$$+\sum_{i=0}^{n-3}\left(\frac{n-2-i}{n-2}\left|\frac{a_i}{a_n}\right|^{\frac{n-2}{n-2-i}} + \frac{i}{n-2}|x|^{n-2}\right)$$

ここで、$\displaystyle\sum_{i=0}^{n-3}\frac{n-2-i}{n-2}\left|\frac{a_i}{a_n}\right|^{\frac{n-2}{n-2-i}} = r$ とおくと、

$$|x|^n \leqq \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right||x|^{n-1} + \left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right||x|^{n-2}$$

$$+\sum_{i=0}^{n-3}\frac{i}{n-2}|x|^{n-2} + r$$

$$= \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right||x|^{n-1} + \left(\left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right| + \frac{n-3}{2}\right)|x|^{n-2} + r$$

$\left|\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right| = A,\ \left|\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right| + \dfrac{n-2}{2} = B$ とおくと、

$$|x|^n \leq A|x|^{n-1} + B|x|^{n-2} + r\,.$$

ゆえに、

$$|x|^n - A|x|^{n-1} - B|x|^{n-2} - r \leqq 0\,.$$

ここで、

$$f(x) = |x|^n - A|x|^{n-1} - B|x|^{n-2} - r$$

とおくと、$f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称であるから、$x \geq 0$ の範囲で考えれば十分である。このとき、

$$f'(x) = nx^{n-1} - A(n-1)x^{n-2} - B(n-2)x^{n-3}$$

$$= x^{n-3}\left(nx^2 - A(n-1)x - B(n-2)\right)$$

より、$f'(x) = 0$ を解くと、

$$x = 0,\ \frac{(n-1)A \pm \sqrt{(n-1)^2 A^2 + 4n(n-2)B}}{2n}$$

が得られる。しかし、

$$\frac{(n-1)A - \sqrt{(n-1)^2 A^2 + 4n(n-2)B}}{2n} < 0$$

であるから、$f'(x) = 0$ となるのは、

$$x = 0,\ \frac{(n-1)A + \sqrt{(n-1)^2 A^2 + 4n(n-2)B}}{2n}$$

のときである。

よって、$f(x)$ のグラフは図２のようになる。

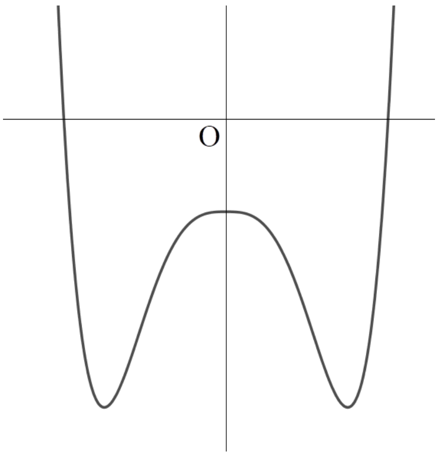

図２

いま、

$$z = \frac{A + \sqrt{A^2 + 4B}}{2}$$

$$> \frac{(n-1)A + \sqrt{(n-1)^2 A^2 + 4n(n-2)B}}{2n}$$

であり、$f(z) = -r < 0$ が成り立つ。よって、点 $(z, -r)$ を接点とする $f(x)$ のグラフの接線と x 軸の交点を $(D, 0)$ とすると、$f(x) \leqq 0$ を満たすすべての x は $|x| < D$ も満たす。

$(z, -r)$ を接点とする $f(x)$ のグラフの接線の傾きは、

$$f'(z) = z^{n-3}\left(n(z^2 - Az - B) + Az + 2B\right)$$

いま、z は２次方程式 $t^2 - At - B = 0$ の解となっているので、$z^2 - Az - B = 0$ が成り立つ。ゆえに、

$$f'(z) = z^{n-3}\left(n(z^2 - Az - B) + Az + 2B\right)$$

$$= z^{n-3}\left(Az + 2B\right)$$

よって、接線の方程式は、

$$y = z^{n-3}(Az + 2B)(x - z) - r$$

$y = 0$ を代入し、x について解くと、

$$x = z + \frac{r}{z^{n-3}(Az + 2B)}$$

したがって、

$$|x| < z + \frac{r}{z^{n-3}(Az + 2B)}$$

$$= z + \frac{\sum_{i=0}^{n-3} \frac{n-2-i}{n-2}\left|\frac{a_i}{a_n}\right|^{\frac{n-2}{n-2-i}}}{z^{n-3}\left(\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| z + 2\left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right| + n - 3\right)}$$

となる。（Q. E. D.）

６次方程式

$$x^6 - 9x^5 + 5x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 10x - 100 = 0$$

について、定理２では $|x| < 15.78$, 定理３で

は$|x|<13.43$, 定理４では$|x|<15.74$, 定理６では$|x|<15.64$が得られるが、定理７では$|x|<9.68$が得られる。実際の解は$|x|<8.35$であり、かなりよい精度である。

$\left|\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right|$がそれほど小さくなく、低い次数の係数が大きいとき、これまでの定理よりも精度のよい値が得られると考えられる。

しかし、$\left|\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right|$の値が小さいとき、精度が悪くなる場合がある。例えば、6次方程式
$x^6-x^5+2x^4+100x^3+7x^2+10x-3=0$
について、定理２からは$|x|<11$が得られるが、定理７からは$|x|<183162.1$が得られ、とても精度が悪い(実際の解は$|x|<4.89$)。

<u>定理８</u>

実数変数xに関するn次方程式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

について、$M=\max\limits_{0\leqq i\leqq n-2}\left|\dfrac{a_i}{a_n}\right|$とすると、

$$x\leqq\max\left(\frac{1-\frac{a_{n-1}}{a_n}+\sqrt{\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2+4M}}{2},\ 1\right)$$

が成り立つ。

（証明）

$x>1$とする。このとき、方程式を以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}x^n&=-\frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot x^{n-1}+\sum_{i=0}^{n-2}\left|\frac{a_i}{a_n}\right|x^i\\&\leqq-\frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot x^{n-1}+\sum_{i=0}^{n-2}Mx^i\\&=-\frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot x^{n-1}+M\cdot\frac{x^{n-1}-1}{x-1}\\&<-\frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot x^{n-1}+M\cdot\frac{x^{n-1}}{x-1}\end{aligned}$$

これをxについて解くと、

$$x<\frac{1-\frac{a_{n-1}}{a_n}+\sqrt{\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2+4M}}{2}$$

を得る。しかし、

$$\frac{1-\frac{a_{n-1}}{a_n}+\sqrt{\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2+4M}}{2}<1$$

のときは$x>1$に矛盾するので、$x\leqq1$となる。ゆえに、

$$x\leqq\max\left(\frac{1-\frac{a_{n-1}}{a_n}+\sqrt{\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2+4M}}{2},1\right)$$

が成り立つ。(Q. E. D.)

6次方程式
$x^6+10x^5+2x^4+100x^3+7x^2+10x-3=0$
について、定理２からは$|x|<16.47$が得られる。定理８を用いると$x<6.92$を得るので、実数解の範囲は$-16.47<x<6.92$であ

ることがわかる。実際の実数解は

$-10.69 < x < 0.2$

である。定理８は、$\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$ の値が大きいほど有用である。

<u>定理９</u>

複素数変数 x に関する n 次方程式

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

について、$|a_{n-2}| \leqq |a_{n-3}| \leqq \cdots \leqq |a_0|$ を満たすとする。また、$A = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-2}\left|\frac{a_i}{a_n}\right|$ とするとき、

$$|x| \leqq \max\left(\frac{1+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|+\sqrt{\left(1-\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)^2+4A}}{2},\ 1\right)$$

が成り立つ。

（証明）

まず、以下の補題が成り立つ。

<u>補題３</u>（Chebyshev の不等式）

$p_1 \leqq p_2 \leqq \cdots \leqq p_n,\ \ q_1 \leqq q_2 \leqq \cdots \leqq q_n$ なる実数 p_i, q_i について、以下の不等式が成り立つ。

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i q_{n+1-i} \leqq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q_i\right)$$

証明は参考文献[5]を参照されたい。

方程式を変形して次を得る。

$$|x|^n \leqq \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right||x|^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2}\left|\frac{a_i}{a_n}\right||x|^i$$

$|x|>1,\ \ |a_{n-2}| \leqq |a_{n-3}| \leqq \cdots \leqq |a_0|$ のとき題３より、

$$\sum_{i=0}^{n-2}\left|\frac{a_i}{a_n}\right||x|^i \leqq \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n-2}\left|\frac{a_i}{a_n}\right|\right)\left(\sum_{i=0}^{n-2}|x|^i\right)$$

$$= A\cdot\frac{|x|^{n-1}-1}{|x|-1}$$

$$< A\cdot\frac{|x|^{n-1}}{|x|-1}.$$

ゆえに、

$$|x|^n < \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right||x|^{n-1} + A\cdot\frac{|x|^{n-1}}{|x|-1}$$

両辺を $|x|^{n-1}$ で割り、$|x|$ について解くと、

$$|x| < \frac{1+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|+\sqrt{\left(1-\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)^2+4A}}{2}$$

を得る。ここで、

$$\frac{1+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|+\sqrt{\left(1-\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)^2+4A}}{2} \leqq 1$$

のときは、$|x| \leq 1$ となり、$|x|>1$ に矛盾するので、$|x| \leqq 1$ である。ゆえに、

$$|x| \leqq \max\left(\frac{1+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|+\sqrt{\left(1-\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)^2+4A}}{2},\ 1 \right)$$

となる。（Q. E. D.）

6次方程式

$x^6 - x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 10x - 100 = 0$

について、定理２からは$|x| < 11$を得るが、定理９からは$|x| < 5.97$が得られるので、定理２よりも精度がよい(実際の解は$|x| < 2.59$)。しかし、定理の適用には条件式を満たす必要があるため、実際に用いる場面は少ないと思われる。

定理９とよく似た状況において、以下の定理が成り立つことが知られている。

定理 10（掛谷の定理）

複素数変数xに関するn次方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

について、$a_n > a_{n-1} > \cdots > a_0 > 0$を満たすとき、$|x| < 1$である。

４．今後の課題

今回は、n次方程式の範囲についてある程度精度のよい公式を作ることに成功したが、具体的な解については考察できなかった。今後は具体的な方程式について考えることや、整数解、有理数解なども調べていきたい。

５．参考文献

[1] web サイト「高精度計算サイト」
http://keisan.casio.jp/exec/user/1401518475

[2]「獲得金メダル！国際数学オリンピック―メダリストが教える解き方と技」、小林一章　監修、朝倉書店

[3] 初歩的な不等式 I
http://izumi-math.jp/I_Yanagita/emath_ver1.1ps.pdf　p402‐p403

[4]web サイト「高校数学の美しい物語」
https://mathtrain.jp/young

[5] web サイト「高校数学の美しい物語」
https://mathtrain.jp/chebyshev

[6] 「掛谷の定理」の別証明
https://ci.nii.ac.jp/els/contentscinii_20180205003442.pdf?id=ART0000615568