正五角形と黄金比Ⅲ

5年C組　古宮　昌典
指導教員　川口　慎二

１．要約

サイエンス研究会数学班5年生は図形の性質について研究している。今回は、前回の研究([1]参照)で得られた結果を発展させ、新たに発見した図形の性質を証明することを目標とした。

キーワード　正五角形、黄金比、正多角形、外接円、１点で交わる

２．研究の背景と目的

正多角形と円は、その対称性の高さなどから、「美しい」とよく言われる。前回の研究([1]参照)において、円と正多角形を用いて考案した図形の性質を考えた。今回は、正多角形の対称性を活かして新たに発見した図形の性質を考察することと、前回の研究で得られた結果の一般化について考えた。

３．研究内容

３－１．正五角形と黄金比

■黄金比

黄金比とは、$1:\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$のことであり、$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$をϕで表すことが多い。黄金比は、人が最も美しいと感じる比であるといわれている。また、ϕは、$\phi^2=\phi+1,\ \dfrac{1}{\phi}=\phi-1$という不思議な性質をもっている。正五角形の１辺と対角線の長さの比は黄金比であることは広く知られている。

■$\sin 18^\circ$

XY＝XZ, ∠X＝36°である二等辺三角形XYZを考える。正五角形の１辺と対角線の長さの比は黄金比であることから、XYとYZの長さの比は黄金比である。XからYZに垂線を下ろすことで、$\sin 18^\circ=\dfrac{1}{2\phi}$が得られる。

前回の研究では、半径Rの円に内接する正多角形について、各頂点を中心とする半径Rの円をかいた図形について考察したが、さらに作図を加えることで、新たな性質が得られた。

<u>定理１</u>

点Oを中心とする円Γに内接する正五角形$A_1A_2A_3A_4A_5$において、線分A_2A_4とA_3A_5の交点をB_1，線分A_3A_5とA_4A_1の交点をB_2，線分A_4A_1とA_5A_2の交点をB_3，線分A_5A_2とA_1A_3の交点をB_4，線分A_1A_3とA_2A_4の交点をB_5とする。また、$\triangle B_1A_3A_4$の外接円をΣ_1，$\triangle B_2A_4A_5$の外

接円をΣ_2，$\triangle B_3A_5A_1$の外接円をΣ_3，$\triangle B_4A_1A_2$の外接円をΣ_4，$\triangle B_5A_2A_3$の外接円をΣ_5とし、$1\leqq i\leqq 5$に対して、Σ_iの中心をC_iする。さらに、Σ_iと直線B_iC_iの交点のうちB_iでないほうをD_iとする。

このとき、$1\leqq i\leqq 5$について、以下の 3 つが成り立つ。

(1) C_iはΓ上に存在する。

(2) Σ_iの半径とΓの半径の比は黄金比である。

(3) Γの半径とOD_iの長さの比は黄金比である。

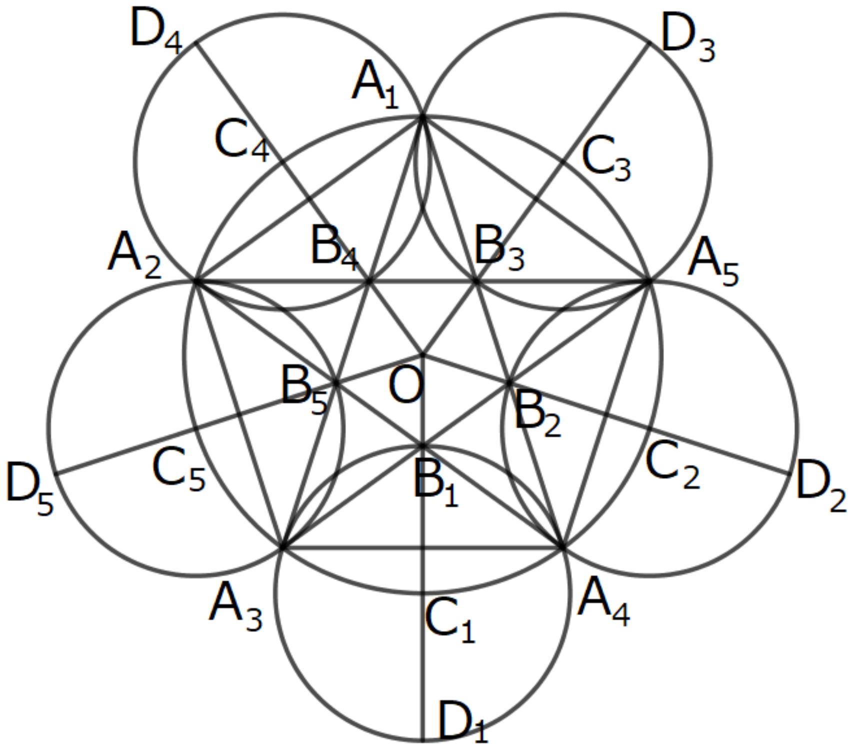

図 1

（証明）

(1) $\triangle B_1A_3A_4$は$B_1A_3 = B_1A_4$の二等辺三角形、$\triangle A_1A_3A_4$は$A_1A_3 = A_1A_4$の二等辺三角形であり、C_1は$\triangle B_1A_3A_4$の外心であるから、B_1とA_1とC_1はいずれも辺A_3A_4の垂直二等分線上にあるので、これらの点は同一直線上にある。ここで、C_1は$\triangle B_1A_3A_4$の外心であるから、

$$\angle B_1C_1A_4 = 2\angle B_1A_3A_4 = 72°,$$

$\angle A_1C_1A_4 = 72°$を得る。一方、弧A_4A_1に対する円周角は 72° であるから、円周角の定理の逆より、C_1はΓ上に存在する。C_2からC_5についても同様である。 (Q. E. D.)

(2) 明らかにΣ_i ($1\leqq i\leqq 5$) の半径はすべて等しいので、Σ_1についてだけ考えればよい。Γの半径をrとする。また、O からA_3A_5へおろした垂線の足を H とする。直

角三角形$\mathrm{OA_3H}$において、$\angle\mathrm{OA_3H}=18°$, $\mathrm{OA_3}=r$であるから、$\mathrm{OH}=r\sin 18°$,また、直角三角形$\mathrm{OB_1H}$において、
$\angle\mathrm{OB_1H}=54°$であるから、

$$\sin 54° = \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OB_1}} = \frac{r\sin 18°}{\mathrm{OB_1}},$$

$$\mathrm{OB_1} = \frac{r\sin 18°}{\sin 54°}$$

ここで、

$$\sin(90°-2\theta) = \cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$$

であるから、

$$\sin 54° = 1-2\sin^2 18° = 1-\frac{1}{2\phi^2}$$

を得る。ゆえに、

$$\mathrm{OB_1} = \frac{r\sin 18°}{\sin 54°} = \frac{r\cdot\frac{1}{2\varphi}}{1-\frac{1}{2\varphi^2}} = \frac{r}{2\varphi-\frac{1}{\varphi}}$$

ϕの性質$\phi^2=\phi+1,\ \dfrac{1}{\phi}=\phi-1$を用いることにより、

$$\mathrm{OB_1} = \frac{r}{2\varphi-\frac{1}{\varphi}} = \frac{r}{2\varphi-(\varphi-1)}$$

$$= \frac{r}{\varphi+1} = \frac{r}{\varphi^2}$$

を得る。(1)より、$\mathrm{C_1B_1}=r-\mathrm{OB_1}$であるから、

$$\mathrm{C_1B_1} = r-\frac{r}{\varphi^2} = r\left(1-\frac{1}{\varphi^2}\right)$$

$$= r\cdot\frac{\varphi^2-1}{\varphi^2} = r\cdot\frac{(\varphi-1)(\varphi+1)}{\varphi^2}$$

再び、ϕの性質を用いることで、

$$\mathrm{C_1B_1} = r\cdot\frac{\frac{1}{\varphi}\cdot\varphi^2}{\varphi^2} = \mathrm{r}\cdot\frac{1}{\phi}$$

を得る。したがって、Σ_1の半径とΓの半径の比は、

$$r\times\frac{1}{\varphi} : r = 1 : \varphi$$

より、黄金比である。(Q. E. D.)

(3) 明らかに$\mathrm{OD_i}$ ($1\leqq i\leqq 5$)の長さはすべて等しいので、$\mathrm{D_1}$についてだけ考えればよい。Γの半径をrとすると、(2)より、

$$\mathrm{C_1B_1} = r\cdot\frac{1}{\varphi}$$

である。また、

$$\mathrm{OD_1} = \mathrm{OC_1}+\mathrm{C_1D_1} = r+\mathrm{C_1B_1}$$

であるから、

$$\mathrm{OD_1} = r+\frac{r}{\varphi} = \frac{r(\varphi+1)}{\varphi} = \frac{r\varphi^2}{\varphi} = r\varphi$$

したがって、Γの半径と$\mathrm{OD_1}$の長さの比は黄金比となる。(Q. E. D.)

また、次の定理が得られた。

<u>定理２</u>

定理１の図形において、△$\mathrm{A_1B_3B_4}$の外接円をω_1，△$\mathrm{A_2B_4B_5}$の外接円をω_2，△$\mathrm{A_3B_5B_1}$の外接円をω_3，△$\mathrm{A_4B_1B_2}$の外接円をω_4，△$\mathrm{A_5B_2B_3}$の外接円をω_5とし、$1\leqq i\leqq 5$に対して、ω_iの中心を$\mathrm{E_i}$とする。また、$\mathrm{A_i}$を中心とし、Γの半径を半径とする円を$\mathrm{O_i}$とし、$\mathrm{O_3}$と$\mathrm{O_4}$の交点を$\mathrm{D_1}'$，$\mathrm{O_4}$と$\mathrm{O_5}$の交点を$\mathrm{D_2}'$，$\mathrm{O_5}$と$\mathrm{O_1}$の交点を$\mathrm{D_3}'$，$\mathrm{O_1}$と$\mathrm{O_2}$の交点を$\mathrm{D_4}'$，$\mathrm{O_2}$と$\mathrm{O_3}$の交点を$\mathrm{D_5}'$とする。このとき、$1\leqq i\leqq 5, 1\leqq j\leqq 5$について、以下の２つが成り立つ。

(1) ω_iの半径とΣ_jの半径の比は黄金比である。

(2) Γの半径と$\mathrm{OD_i}'$の長さの比は黄金比である。

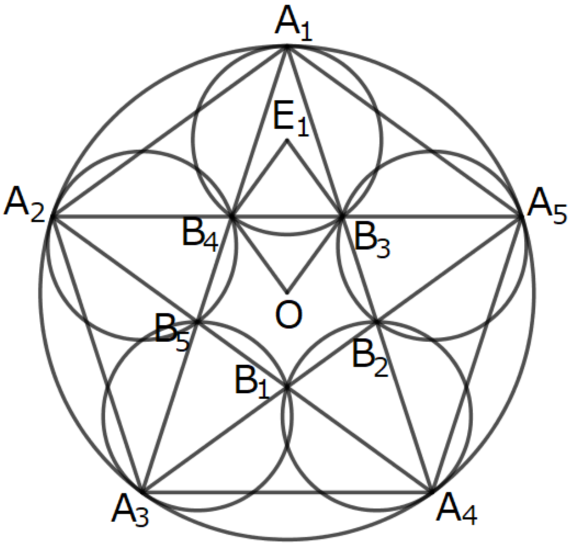

図２

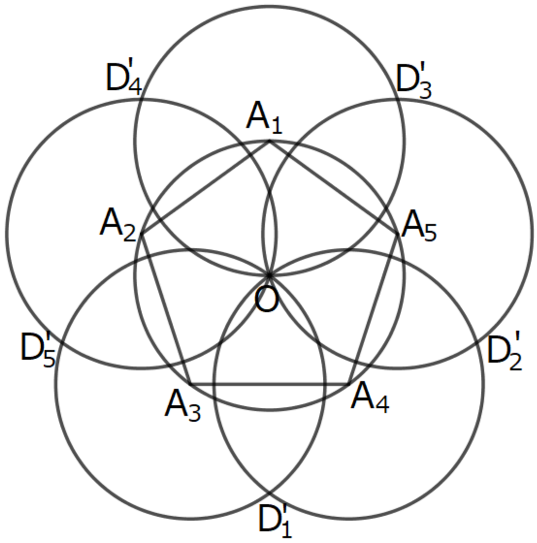

図３

（証明）

(1) 図２を参照。

ω_1 の半径と Σ_1 の半径の比を調べれば十分である。Γ の半径を r とする。定理１(2)より、Σ_1 の半径は $r\cdot\dfrac{1}{\varphi}$ である。E_1 は ω_1 の中心であるから、円周角の定理より、

$$\angle B_3E_1B_4 = 2\cdot 36° = 72°$$

である。△$E_1B_3B_4$ と△OB_3B_4 は、頂角 72° の二等辺三角形で、底辺が B_3B_4 であるから、△$E_1B_3B_4 \equiv$△OB_3B_4 を得る。ゆえに、ω_1 の半径は

$$E_1B_3 = OB_3 = \frac{r}{\varphi^2}$$

である。ゆえに、ω_1 の半径と Σ_1 の半径の比は、

$$\frac{r}{\varphi^2} : \frac{r}{\varphi} = 1 : \varphi$$

より、黄金比である。 (Q. E. D.)

(2) 図３を参照。

Γ の半径と OD_1' の長さの比を調べれば十分である。O_3，O_4，Γ の半径は等しいので、$OA_4 = A_4D_1' = D_1'A_3 = A_3O$ ゆえに、四角形 $OA_4D_1'A_3$ はひし形である。よって、△A_4OD_1' は $A_4O = A_4D_1'$ であり、頂角 108° の二等辺三角形である。これは、△$A_4A_5A_3$ と相似であり、正五角形の１辺と対角線の長さの比は黄金比であるから、A_4O と OD_1' の長さの比も黄金比である。

(Q. E. D.)

定理２の図形についてさらに考察する。

<u>定理３</u>

定理２の図形について、Σ_3 と Σ_4 の交点のうち A_1 と異なるものを E_1'，Σ_4 と Σ_5 の交点のうち A_2 と異なるものを E_2'，Σ_5 と Σ_1 の交点のうち A_3 と異なるものを E_3'，Σ_1 と Σ_2 の交点のうち A_4 と異なるものを E_4'，Σ_2 と Σ_3 の交点のうち A_5 と異なるものを E_5' とする。また、O_5 と O_2 の交点を E_1''，O_1 と O_3 の交点を E_2''，O_2 と O_4 の交点を E_3''，O_3 と O_5 の交点を E_4''，O_4 と

O_1 の交点を E_5'' とする。このとき、
$1 \leqq i \leqq 5,\ 1 \leqq j \leqq 5$ について、以下の 3 つが成り立つ。

(1) $D_i' = D_i$ である。

(2) O_{i+1} と Σ_i（ただし $O_6 = O_1$ とする），

O_j と Σ_{j+1}（ただし $\Sigma_6 = \Sigma_1$ とする）

は外接する。

(3) $E_i = E_i' = E_i''$ である。

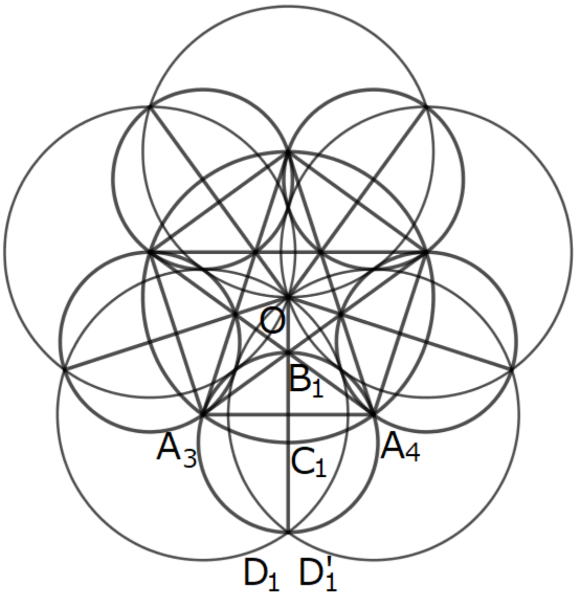

図 4

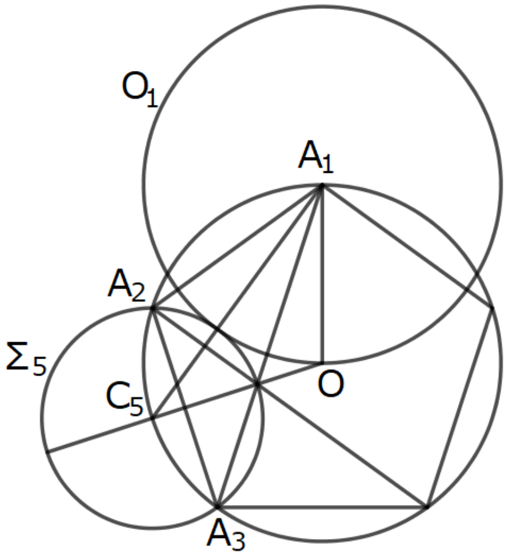

図 5

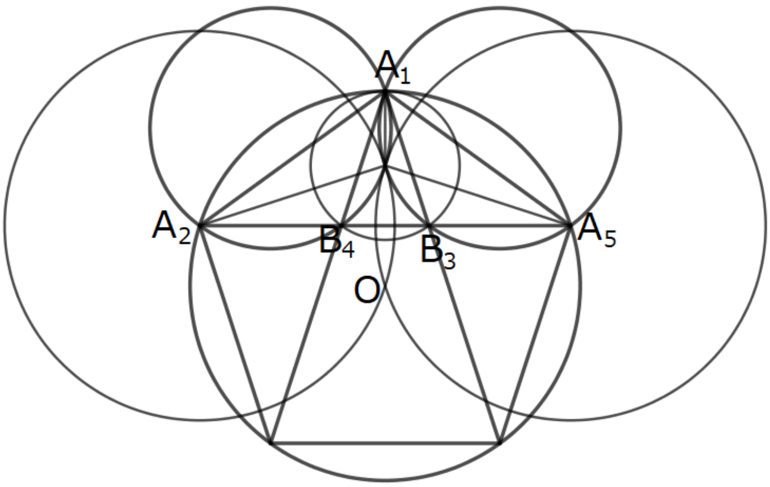

図 6

（証明）

(1) 図４を参照。

D_1' と D_1 の場合を考えれば十分である。B_1，C_1，D_1 は同一直線上にあり、B_1，C_1 は線分 A_3A_4 の垂直二等分線上にあることから、D_1 は線分 A_3A_4 の垂直二等分線上にある。また、四角形 $OA_4D_1'A_3$ はひし形であるから、D_1' も線分 A_3A_4 の垂直二等分線上にある。ゆえに、３点 O，D_1，D_1' は同一直線上にある。定理１(3)と定理２(2)より、$OD_1 = OD_1'$ であるから、$D_1 = D_1'$ である。

(Q. E. D.)

（２）図５を参照。

O_1 と Σ_5 について考える。Γ の半径を r とする。定理１(2)より、Σ_5 の半径は $\dfrac{r}{\varphi}$ である。また、O_1 の半径は r である。

ここで、$\angle A_1OC_5 = 72° + 36° = 108°$ であり、$OA_1 = OC_5$ であるから、OA_1 と A_1C_5 の長さの比は正五角形の一辺と対角線の比に等しい。ゆえに、$A_1C_5 = r\phi$ となる。すると、

$$\frac{r}{\phi} + r = r\left(\frac{1}{\phi} + 1\right) = r\left(\phi - 1 + 1\right) = r\phi$$

より、Σ_5 の半径と O_1 の半径の和は中心間の距離に等しいので、Σ_5 と O_1 は外接する。

(Q. E. D.)

(3) 図６を参照。

$\triangle E_1B_3B_4 \equiv \triangle OB_3B_4$ より、点 E_1 と点 O は線分 A_2A_5 に関して対称であるから、

$$\angle A_2E_1A_5 = \angle A_2OA_5 = 144°$$

また、対称性より $\angle A_1E_1A_5 = \angle A_1E_1A_2$ なので、

$$\angle A_1E_1A_5 = \frac{1}{2}(360° - 144°) = 108°$$

一方、$\angle A_1B_3A_5 = 180° - 36° \times 2 = 108°$ であるから、

$$\angle A_1E_1A_5 = \angle A_1B_3A_5$$

よって、円周角の定理より、点 E_1 は Σ_3 上にある。同様にして、点 E_1 は Σ_4 上にもある。いま、明らかに $E_1 \neq A_1$ であるから、$E_1 = E_1'$ が成り立つ。

O_2 と O_5 はそれぞれ点 A_2，点 A_5 を中心とする円であるから、図形 $O_2 \cup O_5$ は線分 A_2A_5 を軸として対称である。よって、点 E_1'' と点 O は線分 A_2A_5 を軸として対称なので、これは点 E_1 と等しい。

以上より、$E_1 = E_1' = E_1''$ が示された。

(Q. E. D.)

定理３(2), (3)は一般の正多角形では成り立たない。図７は七角形の場合である。

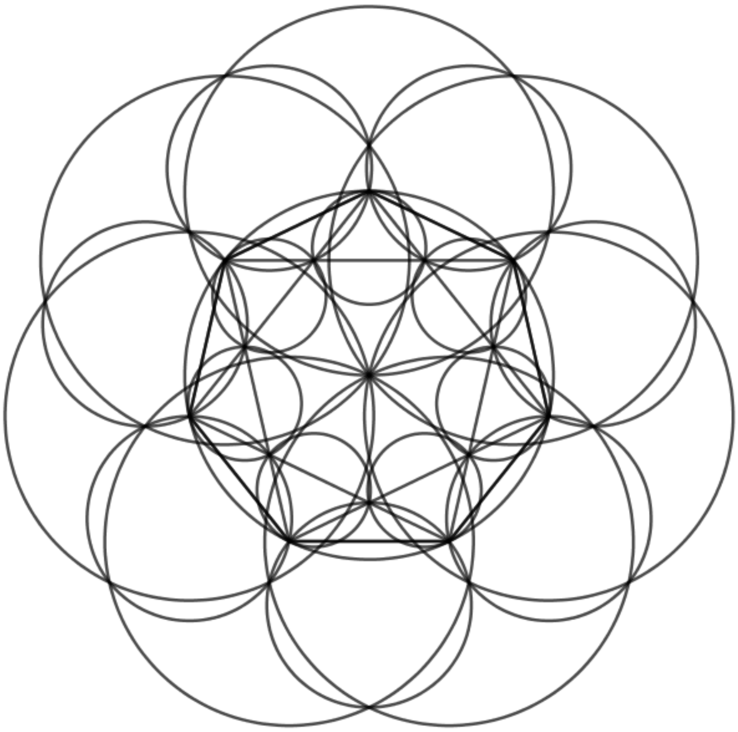

図７

３－４．五角形と円

五角形について、前回の研究の発展として、以下が成り立つことがわかった。

<u>定理４</u>

半径r,中心Oの円に内接する五角形$P_1P_2P_3P_4P_5$について、頂点P_1，P_2，P_3，P_4，P_5を中心とする、半径rの円をそれぞれ$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$とする。また、$\Gamma_3$と$\Gamma_4$の交点を$Q_1$，$\Gamma_4$と$\Gamma_5$の交点を$Q_2$，$\Gamma_5$と$\Gamma_1$の交点を$Q_3$，$\Gamma_1$と$\Gamma_2$の交点を$Q_4$，$\Gamma_2$と$\Gamma_3$の交点を$Q_5$とし（いずれもOとは異なる)、$\Gamma_5$と$\Gamma_2$の交点を$R_1$，$\Gamma_1$と$\Gamma_3$の交点を$R_2$，$\Gamma_2$と$\Gamma_4$の交点を$R_3$，$\Gamma_3$と$\Gamma_5$の交点を$R_4$，$\Gamma_4$と$\Gamma_1$の交点を$R_5$とする。そして、線分$R_3R_4$の中点を$S_1$，線分$R_4R_5$の中点を$S_2$，線分$R_5R_1$の中点を$S_3$，線分$R_1R_2$の中点を$S_4$，線分$R_2R_3$の中点を$S_5$として、線分$Q_2Q_5$の中点を$T_1$，線分$Q_1Q_3$の中点を$T_2$，線分$Q_2Q_4$の中点を$T_3$，線分$Q_3Q_5$の中点を$T_4$，線分$Q_4Q_1$の中点を$T_5$とする。このとき、$1 \leqq i \leqq 5$について、以下の２つが成り立つ。

(1) $S_i = T_i$ が成り立つ。

(2) 五角形$P_1P_2P_3P_4P_5$と五角形$S_1S_2S_3S_4S_5$は相似であり、相似比は２：１である。

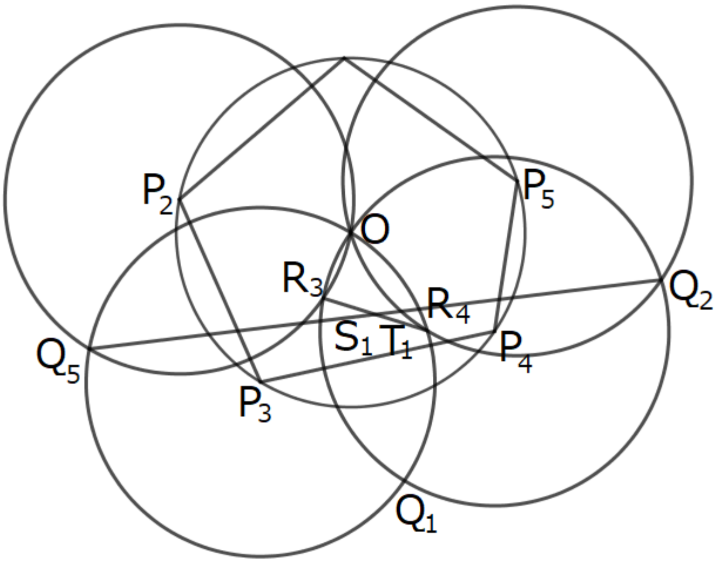

図８

（証明）

(1) 図８を参照。

$S_1 = T_1$ を示す。他も同様である。

四角形 $OP_2Q_5P_3$ はひし形であるから、

$$\overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} = \overrightarrow{OQ_5}$$

が成り立つ。同様にして、

$$\overrightarrow{OP_4} + \overrightarrow{OP_5} = \overrightarrow{OQ_2}$$

が成り立つので、

$$\overrightarrow{OT_1} = \frac{\overrightarrow{OQ_5} + \overrightarrow{OQ_2}}{2} = \frac{\overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} + \overrightarrow{OP_4} + \overrightarrow{OP_5}}{2} \quad \cdots①$$

を得る。

四角形 $OP_2R_3P_4$ はひし形であるから、

$$\overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_4} = \overrightarrow{OR_3}$$

同様にして、

$$\overrightarrow{OP_3} + \overrightarrow{OP_5} = \overrightarrow{OR_4}$$

が成り立つので、

$$\overrightarrow{OS_1} = \frac{\overrightarrow{OR_3} + \overrightarrow{OR_4}}{2} = \frac{\overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} + \overrightarrow{OP_4} + \overrightarrow{OP_5}}{2} \quad \cdots②$$

を得る。

①，②より、$S_1 = T_1$ である。よって示された。（Q. E. D.）

(2) 先ほどの議論から、$1 \leqq i \leqq 5$ に対して、

$$\overrightarrow{OS_i} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{1 \leqq k \leqq 5 \\ k \neq i}} \overrightarrow{OP_k}$$

が成り立つ。

ここで、点 X を

$$\overrightarrow{OX} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{5} \overrightarrow{OP_k}$$

を満たす点とする。

このとき、線分 XP_i を 1 : 3 に外分する点を S_i' とすると、

$$\overrightarrow{OS_i}' = \frac{-3\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OP_i}}{1-3}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leqq k \leqq 5 \\ k \neq i}} \overrightarrow{\mathrm{OP_k}} = \overrightarrow{\mathrm{OS_i}}$$

となり、$\overrightarrow{\mathrm{OS_i}}' = \overrightarrow{\mathrm{OS_i}}$ が成り立つ。ゆえに、

五角形 $\mathrm{S_1S_2S_3S_4S_5}$ は X を相似の中心として五角形 $\mathrm{P_1P_2P_3P_4P_5}$ と相似であり、相似比は 1：2 となる。（Q. E. D.）

定理４(2)は一般の多角形では成り立たない。なぜなら、$(2n+1)$ 角形においては、

$$\overrightarrow{\mathrm{OS_1}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}_n} + \overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+2}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+3}}}{2}$$

が成り立つので、$\overrightarrow{\mathrm{OS_1}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leqq k \leqq 2n+1 \\ k \neq 1}} \overrightarrow{\mathrm{OP}_k}$ が成り立つためには $2n+1=5$ が成り立つことが必要だからである。

４．今後の課題

今回は、特に五角形について円と組み合わせた図形について考察を行うことができた。今後は、一般の多角形について考えることや、今回のように「ある多角形でしか成り立たない性質」に着目して研究を進めていきたい。また、考案した図形を反転幾何にも応用させていきたい。

５．参考文献

[1]「正五角形と黄金比Ⅱ」、古宮昌典、奈良女子大学附属中等教育学校平成 26 年度 SSH 生徒研究論文集、p.55－64

６．謝辞

今回の研究にあたりご指導くださった顧問の川口先生、ありがとうございました。