自己回避歩行の経路の総数に関する考察

5年C組　古宮　昌典
指導教員　川口　慎二

１．要約

サイエンス研究会数学班5年生は離散数学について研究している。今回は、ある条件を満たす経路の総数を求めることに関して、様々なアプローチから調べていくことを目標とした。

キーワード　　不等式、通る点、通る辺、一意性

２．研究の背景と目的

参考文献[1]において、以下の問題について取り上げられていた。「$n \times n$ のマス目において、左上端の点から右下端の点まで、同じ辺、点を2度通らずに行く(最短経路でなくてもよい)方法は何通りあるか。」

私はこの問題に興味をもち、経路の総数を数え上げる方法についていくつかのアプローチを用いて考えることにした。

３．研究内容

参考文献[1]によれば、先ほど挙げた経路の総数の実際の値は、以下のようになっている。

n	経路の総数
1	2
2	12
3	184
4	8512
5	1262816
6	575780564
7	789360053252
8	3266598486981642
9	41044208702632496804

以下、たて n マス、横 k マスからできる $n \times k$ のマス目について、左上端の点から右下端の点まで同じ点、辺を2度通らずにいく経路(最短でなくてもよい)の総数を $P_{n \times k}$ と表すことにする。また、マス目について、図1のように頂点に名前をつける。

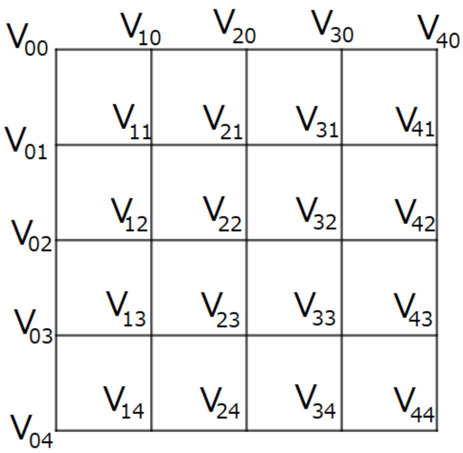

図１

３－１．通る点を定めるアプローチ

通る点を決めることで、求める経路の一部を数えることができる。

定理１

$$P_{n\times k} \geqq (n+1)^k + (k+1)^n - {}_{n+k}C_n$$ である。

（証明）

点の集合 $\left\{V_{1i_1}, V_{2i_2}, \cdots, V_{ki_k}\right\}$ (ただし、$1 \leqq m \leqq k$ について、$0 \leqq i_m \leqq n$ とする)を考える。図２，図３のように、これらの点を通る経路

$$V_{00} \to V_{0i_1} \to V_{1i_1} \to V_{1i_2} \to V_{2i_2} \to \cdots \to V_{ki_k} \to V_{kk}$$

を定めることができる。

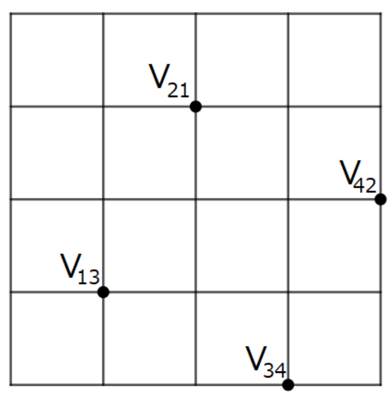

図２（点をとる）

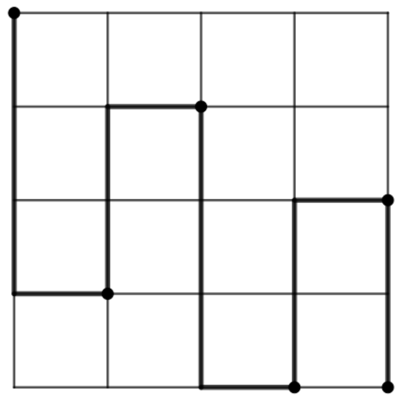

図３（経路を作る）

このようにして得られる経路の個数は、組 $\left(i_1, i_2, \cdots, i_n\right)$ の個数を数えればよいので、

$$\left(k+1\right)^n \text{ 通り } \cdots①$$

存在する。

同様に、点の集合 $\left\{V_{j_1 1}, V_{j_2 2}, \cdots, V_{j_n n}\right\}$ (ただし、$1 \leqq m \leqq n$ について、$0 \leqq j_m \leqq k$ とする)に対して１つの経路を対応させることができる。その経路は、

$$\left(n+1\right)^k \text{ 通り } \cdots②$$

存在する。

いま、①と②の和について、最短経路が 2 回数えられている。最短経路は、${}_{n+k}C_n$ 通り存在するので、

$$P_{n\times k} \geqq \left(n+1\right)^k + \left(k+1\right)^n - {}_{n+k}C_n$$

が成り立つ。（Q. E. D.）

定理１より、$n = k = 5$ とすることで

$$P_{5\times 5} \geqq 6^5 + 6^5 - {}_{10}C_5 = 15300$$

を得るが、実際の値 $P_{5\times 5} = 1262816$ よりもかなり小さい値となっていて、評価が甘い。

３－２．領域を分割するアプローチ

経路によって、マス目全体が 2 つの領域に分かれることを用いて、以下の定理を得た。

定理２

n, k を偶数とするとき、

$$P_{n\times k} \leqq 14^{\frac{n\times k}{4}} - 2^{n+k-2} \times 14^{\frac{(n-2)(k-2)}{4}} + 2$$

が成り立つ。

（証明）

左上端のマスをSとする。マス目全体が経路によっていくつかの領域に分けられると考える。ある経路について、線分$V_{00}V_{10}$を含むか線分$V_{00}V_{01}$を含むかのどちらかが成り立つ。線分$V_{00}V_{10}$を含む場合、Sを含む領域を黒色で塗り、線分$V_{00}V_{01}$を含む場合、Sを含む領域を灰色で塗ることにする。そして、経路によって分けられた領域について、隣り合う領域は異なる色で塗るものとする。いま、経路上の格子点について、明らかに3つ以上の線分とはつながっていないので、すべての領域を黒色、灰色の2色で塗り分けることができる。

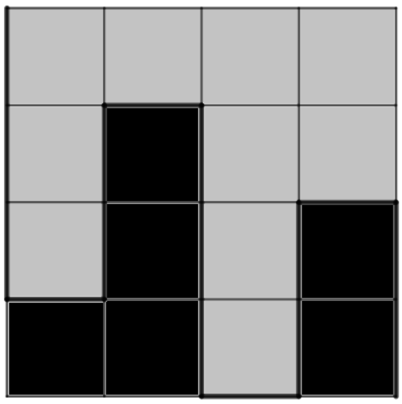

図4

また、色の塗り分けから経路を復元することを考えると、色の境界線が経路の一部となり、マス目の内部については、経路は1つに決まる。また、マス目の周上においても、Sの色によって、経路が1つに決まる。つまり、色の塗り分けから経路を復元するとき、それはただ1通りに決まる。よって、求める経路の総数は、各マス目に対して黒色か灰色を塗る塗り分け方よりも少ないので、

$$P_{n\times k} \leqq 2^{n\times k}$$

が成り立つ。

n, kは偶数であるから、マス目全体を$\dfrac{n\times k}{4}$個の2×2のマス目に分けることができる。いま、2×2のマス目について、図5のような塗り分けを考える。色の境界が経路となるが、経路は同じ点、辺を2度通らないので、明らかに図5の塗り分けはマス目全体の中に含まれない。

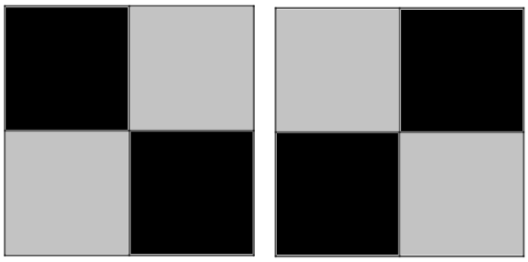

図5

よって、2×2のマス目1つについて、図5の塗り分けを除いた$2^4-2=14$（通り）があり得るので、

$$P_{n\times k} \leqq 14^{\frac{n\times k}{4}}$$

が成り立つ。

さらに、左端および下端のマスがすべて灰色で塗られている場合を考える。この塗り分けに対して経路が存在したとすると、Sの色の決め方より、その経路は線分$V_{00}V_{01}$を含む。よって、この経路は図6のように

$$V_{00} \to V_{01} \to V_{02} \to \cdots \to V_{0n} \to V_{1n} \to \cdots \to V_{kn}$$

となるので、長方形$V_{10}V_{1(n-1)}V_{k(n-1)}V_{k0}$の内部に黒色のマスは存在しない。

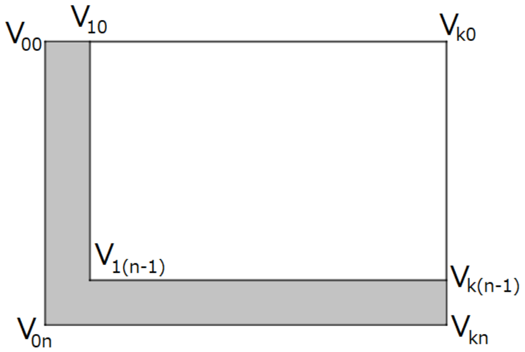

図６

逆に、左端および下端のマスがすべて灰色で塗られており、さらに長方形$V_{10}V_{1(n-1)}V_{k(n-1)}V_{k0}$の内部に少なくとも１つの黒色のマスがあるような塗り分け方を考える。左端および下端のマスに接しているマスについては、黒色または灰色の 2 通りが考えられるので、2^{n+k-3}通りである。それ以外のマスについては、2×2 のマス目に分けられており、1 つの 2×2 のマス目につき 14 通りの塗り方があるので、$14^{\frac{(n-2)(k-2)}{4}}$通りである。この中には、すべてのマスが灰色で塗られる場合が 1 通りあるので、$2^{n+k-3}\times14^{\frac{(n-2)(k-2)}{4}}-1$（通り）の塗り分けについては経路が存在しない。同様にして、上端および右端のマスが黒色で塗られている場合を考えると、さらに

$2^{n+k-3}\times14^{\frac{(n-2)(k-2)}{4}}-1$（通り）の塗り分けについて経路が存在しないことがわかるので、求める経路の総数について、

$$P_{n\times k}\leqq14^{\frac{n\times k}{4}}-2\left(2^{n+k-3}\times14^{\frac{(n-2)(k-2)}{4}}-1\right)$$

$$=14^{\frac{n\times k}{4}}-2^{n+k-2}\times14^{\frac{(n-2)(k-2)}{4}}+2$$

が成り立つ。（Q. E. D.）

定理２において、$n=k=4$とすると、

$$P_{4\times4}\leqq14^4-2^5\times14^1+2=37970$$

を得るが、実際の値$P_{4\times4}=8512$よりもかなり大きい値となっている。

しかし、定理２の評価はさらに改良することができる。例えば、経路によって作られる色の塗り分けには、図７のようなものは含まれない。

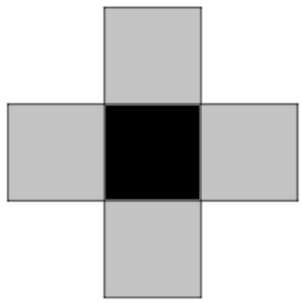

図７

また、図８のように、マス目全体が左下、中央、右上の 3 つの領域に分かれている場合も経路が存在しない。

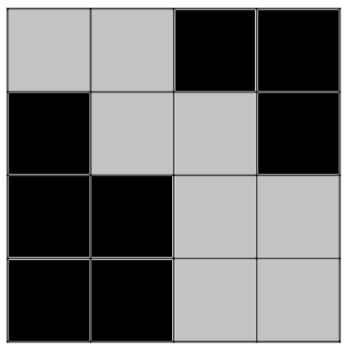

図８

３－３．通る辺を定めるアプローチ

条件を満たす経路について、通る辺に注目すると、以下が成り立つことがわかった。

<u>定理３</u>

条件を満たす経路 X について、X に含まれる線分で、$V_{00}V_{10}$ に平行なものすべての集合を X' とする。このとき、X' に対して、条件を満たす経路 X が一意に定まる。

（証明）

たて n マス、横 k マスのマス目について考える。$0 \leqq i \leqq k-1,\ 0 \leqq j \leqq n$ について、

$\overline{V_{(i-1)j}V_{ij}} \in X'$ かつ $\overline{V_{ij}V_{(i+1)j}} \notin X'$ を満たす

$\overline{V_{(i-1)j}V_{ij}}$ において、点 V_{ij} の次に通る点が１つに定まることを示せばよい。

すべての $0 \leqq m \leqq j-1$ に対して $V_{im} \notin X'$ または、すべての $j+1 \leqq l \leqq n$ に対して $V_{il} \notin X'$ が成り立つときは、明らかに、

$\overline{V_{i0}V_{in}}$ 上で点 V_{ij} に最も近い点 V_{ia} $(a \neq j)$ がただ１つ存在し、それが次に通る点である。

ある $0 \leqq m \leqq j-1$ で $V_{im} \in X'$ となるものが１つ以上存在し、かつ、ある $j+1 \leq l \leq n$ で $V_{il} \in X'$ となるものが１つ以上存在する場合を考える。

$$L = \left\{ \overline{V_{i0}V_{(i+1)0}}, \overline{V_{i1}V_{(i+1)1}}, \cdots, \overline{V_{in}V_{(i+1)n}} \right\}$$

$$M = \left\{ \overline{V_{i0}V_{(i+1)0}}, \overline{V_{i1}V_{(i+1)1}}, \cdots, \overline{V_{i(j-1)}V_{(i+1)(j-1)}} \right\}$$

$$N = \left\{ \overline{V_{i(j+1)}V_{(i+1)(j+1)}}, \cdots, \overline{V_{in}V_{(i+1)n}} \right\}$$

とおく。

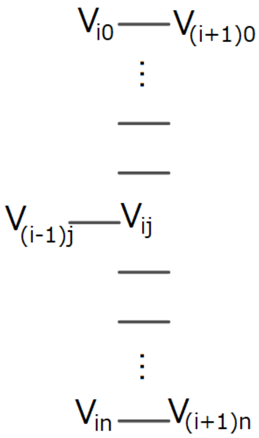

図９

点 V_{ij} の次に通る点としてあり得るものが複数存在したと仮定すると、それらはすべて $\overline{V_{i0}V_{in}}$ 上にあるため、高々2 つである。

１つは $\overline{V_{i0}V_{i(j-1)}}$ 上に存在し、もう １ つは $\overline{V_{i(j+1)}V_{in}}$ 上に存在して、どちらも X' に含まれる線分の端点のうち、V_{ij} に最も近い点として選べばよい。

点 V_{ij} の次に通る点が V_{ib} (ただし、$0 \leqq b \leqq j-1$) であったとする。いま、点 V_{ij} と点 V_{00} は１つの経路でつながっている。よって、点 V_{ib} から始めて、M のいずれの元も通らずに N のある元を通る経路は存在しない。ゆえに、点 V_{ij} を通ってから初めて L のある元を通るとき、それは M の元である。

それを $\overline{V_{is}V_{(i+1)s}}$ とすると、明らかに

$V_{is} \to V_{(i+1)s}$ の順で通る。そして、M の元のうち最後に通るものを $\overline{V_{id}V_{(i+1)d}}$ とすると、$V_{id} \to V_{(i+1)d}$ の順で通る。よって、点 V_{ij} を通ってから通る M の元の個数は奇数である。また、点 V_{ij} を通ってから初めて N の元を通るとき、それを $\overline{V_{it}V_{(i+1)t}}$ とすると、$V_{(i+1)t} \to V_{it}$ の順で通る。そして、N の元のうち最後に通るものを $\overline{V_{ie}V_{(i+1)e}}$ とすると、$V_{ie} \to V_{(i+1)e}$ の順で通る。よって、点 V_{ij} を通ってから通る N の元の個数は偶数である。

一方、点 V_{ij} の次に通る点が V_{ic} (ただし、$j+1 \leqq c \leqq n$)であったとすると、同様の議論より、点 V_{ij} を通ってから通る M の元の個数は偶数、N の元の個数は奇数となるが、これは矛盾である。よって、点 V_{ij} の次に通る点は 1 つに定まる。

以上より、条件を満たす経路が 1 つに定まることが示された。 (Q. E. D.)

定理 3 の証明について、V_{00} から V_{ij} へ移動するまでに L の元を通る回数は偶数となるので、$|X' \cap L|$ は奇数であることがわかる。つまり、マス目の各列には奇数本の、X' に含まれる線分が存在する。いま、マス目の各列から $V_{00}V_{10}$ に平行な線分を奇数本取り出すことを考える。

$$\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i {}_{n+1}C_i = 0,\ \sum_{i=0}^{n+1} {}_{n+1}C_i = 2^{n+1}$$

より、奇数本取り出す組合せは、2^n 通り存在する。よって、

$$P_{n\times k} \leq \left(2^n\right)^k = 2^{n\times k}$$

を得る。

また、定理 1 は、各列から 1 本の X' に含まれる線分を与えていると捉えることができる。

条件を満たす経路 X について、X に含まれる点だけを取り出したものを X' とするとき、一般に X' から X に戻すことはできない。例えば、図 10 の 2 つの経路について、通る点の集合はともに図 11 となり、一致するからである。

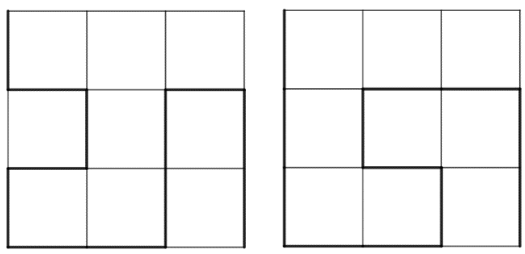

図 10

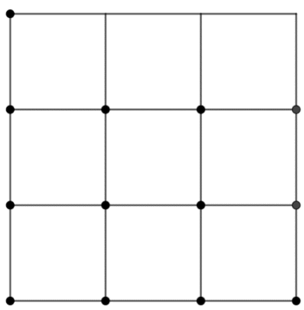

図 11

４．今後の課題

今回の研究では必要条件についての考察が主となってしまったが、今後は十分条件についても考えていきたい。また、経路と経路に関する演算を導入し、新たな議論をすることも考えている。

５．参考文献

[1]動画「『フカシギの数え方』おねえさんといっしょ！みんなで数えてみよう！」
https://www.youtube.com/watch?v=Q4gTV4r0zRs