数学オリンピックの問題に関する研究Ⅱ

5年C組　古宮　昌典
指導教員　川口　慎二

１．要約

サイエンス研究会数学班5年生は数学オリンピックの問題について研究している。今回は、数学オリンピックの組合せ論、数論、関数方程式の問題に関して、一般化および考察を行うことを目標とした。

キーワード　　数学オリンピック、一般化、条件を変える

２．研究の背景と目的

数学オリンピックの問題は、難解であるとともに、数学的な美しさも併せもっている。しかし、数学オリンピックの予選問題などは、答えだけを求めるものであり、数学的な広がりをもっていない場合が多い。昨年度は、主に幾何の問題において考察を行った。今回は、組合せ論、数論、関数方程式の問題について考察を行った。

３．研究内容

３－１．日本数学オリンピック予選の問題

次の問題は参考文献[1]において「組合せ」に分類されている、いわゆる「ノンジャンル」の問題である。

<u>例題１</u>

ある数学書がある。二郎君は、この本を一日に2ページずつ読み、三郎君は、この本を一日に3ページずつ読む。ただし二人とも、このページ数に満たなくても、章が終わったら、その日の勉強は終了する。この本は10章からなり、全部で120ページある。この本を読むのに二郎君がかかる日数と三郎君がかかる日数の差として考えられる値のうち最小のものを求めよ。

[日本数学オリンピック 2006 予選]

この問題の一般化として、以下の問題について考えた。解法は例題1とほぼ同じである。

<u>問題１</u>

a,m,n は正の整数で、n は $a(a+1)$ の倍数であり、$n \geqq a^2m$ を満たしている。

m 章からなり、全部で n ページある数学書がある。この本を、A君は1日に a ページ読み、B君は1日に $(a+1)$ ページ読む。ただし二人とも、このページ数に満たなくても、章が終わったら、その日の勉強は終了する。このとき、A君が読むのにかかる日数とB君が読むのにかかる日数の差として考えられる値のうち最小のものを求めよ。

（解答）

第1章を p_1 ページ、第2章を p_2 ページ、

…、第m章をp_mページとする。ここで、pページの章を二人が読むのにかかる日数の差を$f\left(p\right)$とし、

$$g\left(p\right)=f\left(p\right)-\frac{1}{a(a+1)}p$$

とする。このとき、

$$\sum_{i=1}^{m}f\left(p_i\right)=\frac{1}{a(a+1)}\sum_{i=1}^{m}p_i+\sum_{i=1}^{m}g\left(p_i\right)$$

となるので、$\sum_{i=1}^{m}g\left(p_i\right)$の最小値を求めればよい。ここで、$q$ページの章について、$q=ka(a+1)+r$，$0\leqq r<a(a+1)$とおくと、

$$\begin{aligned}g\left(q\right)&=\left\lceil\frac{ka(a+1)+r}{a}\right\rceil-\left\lceil\frac{ka(a+1)+r}{a+1}\right\rceil\\&\qquad-\frac{ka(a+1)+r}{a(a+1)}\\&=k(a+1)+\left\lceil\frac{r}{a}\right\rceil-ka-\left\lceil\frac{r}{a+1}\right\rceil\\&\qquad-k-\frac{r}{a(a+1)}\\&=\left\lceil\frac{r}{a}\right\rceil-\left\lceil\frac{r}{a+1}\right\rceil-\frac{r}{a(a+1)}\end{aligned}$$

となる。$r=sa$，$0\leqq s<a+1$とかけるときを考えると、

$$\begin{aligned}g\left(q\right)&=\left\lceil\frac{sa}{a}\right\rceil-\left\lceil\frac{sa}{a+1}\right\rceil-\frac{sa}{a(a+1)}\\&=s-\left\lceil\frac{s(a+1)-s}{a+1}\right\rceil-\frac{s}{a+1}\\&=s-\left\lceil s-\frac{s}{a+1}\right\rceil-\frac{s}{a+1}\\&=s-s-\frac{s}{a+1}\\&\geqq-\frac{a}{a+1}\end{aligned}$$

が成り立つ。$r=ta+u$，$1\leqq u<a$とかけるときは、

$$\left\lceil\frac{r}{a}\right\rceil=\left\lceil\frac{ta+u}{a}\right\rceil=t+1$$

$$\left\lceil\frac{r}{a+1}\right\rceil=\left\lceil\frac{ta+u}{a+1}\right\rceil\leqq\left\lceil\frac{t(a+1)}{a+1}\right\rceil=t$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned}g\left(q\right)&\geqq(t+1)-t-\frac{r}{a(a+1)}\\&\geqq1-\frac{a(a+1)-1}{a(a+1)}\\&=\frac{1}{a(a+1)}>-\frac{a}{a+1}\end{aligned}$$

となる。よって、$g\left(q\right)$は$r=a^2$のとき、最小値$-\frac{a}{a+1}$をとる。ゆえに、

$$\sum_{i=1}^{m}g\left(p_i\right)\geqq-\frac{ma}{a+1}$$

を得るので、

$$\sum_{i=1}^{m}f\left(p_i\right)\geqq\frac{n}{a(a+1)}-\frac{ma}{a+1}=\frac{n-ma^2}{a(a+1)}$$

ゆえに、

$$\sum_{i=1}^{m}f\left(p_i\right)\geqq\left\lceil\frac{n-ma^2}{a(a+1)}\right\rceil$$

が成り立つ。いま、nは$a(a+1)$の倍数なので、$n=la(a+1)$とおくと、

$$\begin{aligned}\left\lceil\frac{n-ma^2}{a(a+1)}\right\rceil&=\left\lceil\frac{la(a+1)-ma^2}{a(a+1)}\right\rceil\\&=\left\lceil l-\frac{ma}{a+1}\right\rceil\\&=l-\left\lfloor\frac{ma}{a+1}\right\rfloor\quad\cdots①\end{aligned}$$

となる。

いま、$p_1=p_2=\cdots=p_{m-1}=a^2$，

$p_m = n-(m-1)a^2$ なる数学書が最小値をとることを示す。

$$f\left(a^2\right)=\left\lceil\frac{a^2}{a}\right\rceil-\left\lceil\frac{a^2}{a+1}\right\rceil=0$$

より、

$$\sum_{i=1}^{m} f(p_i)=f(p_m)$$

となる。よって、

$$f\left(p_m\right)=\left\lceil\frac{n-(m-1)a^2}{a}\right\rceil-\left\lceil\frac{n-(m-1)a^2}{a+1}\right\rceil$$

$$=l(a+1)-(m-1)a-\left\lceil la-\frac{(m-1)a^2}{a+1}\right\rceil$$

$$=l(a+1)-(m-1)a-\left(la-\left\lfloor\frac{(m-1)a^2}{a+1}\right\rfloor\right)$$

$$=l-(m-1)a+\left\lfloor(m-1)a-\frac{(m-1)a}{a+1}\right\rfloor$$

$$=l-(m-1)a+(m-1)a+\left\lfloor-\frac{(m-1)a}{a+1}\right\rfloor$$

$$=l+\left\lfloor-\frac{(m-1)a}{a+1}\right\rfloor \quad \cdots ②$$

①と②が等しいことを示す。$m-1$ が $a+1$ の倍数か否かで場合分けをする。

（ｉ）$m-1$ が $a+1$ の倍数であるとき

$m-1=c(a+1)$ とかける。

①において、

$$l-\left\lfloor\frac{ma}{a+1}\right\rfloor=l-\left\lfloor\frac{\{c(a+1)+1\}a}{a+1}\right\rfloor$$

$$=l-\left\lfloor ca+\frac{a}{a+1}\right\rfloor$$

$$=l-ca$$

一方、②において、

$$l-\left\lfloor-\frac{(m-1)a}{a+1}\right\rfloor=l+\left\lfloor-\frac{c(a+1)a}{a+1}\right\rfloor$$

$$=l-ca$$

よって、①と②は等しい。

（ⅱ）$m-1$ が $a+1$ の倍数でないとき

$m-1=d(a+1)+e \quad (1\leqq e<a+1)$ とかける。

①において、

$$l-\left\lfloor\frac{ma}{a+1}\right\rfloor=l-\left\lfloor\frac{\{d(a+1)+e+1\}a}{a+1}\right\rfloor$$

$$=l-\left\lfloor da+\frac{ea}{a+1}+\frac{a}{a+1}\right\rfloor$$

$$=l-da-\left\lfloor\frac{ea}{a+1}+\frac{a}{a+1}\right\rfloor$$

ここで、$e\neq 0$ より、$\dfrac{ea}{a+1}-\left\lfloor\dfrac{ea}{a+1}\right\rfloor\geqq\dfrac{1}{a+1}$

であるから、$\left\lfloor\dfrac{ea}{a+1}+\dfrac{a}{a+1}\right\rfloor=\left\lfloor\dfrac{ea}{a+1}\right\rfloor+1$ が成り立つ。ゆえに、

$$l-\left\lfloor\frac{ma}{a+1}\right\rfloor=l-da-1-\left\lfloor\frac{ea}{a+1}\right\rfloor$$

一方、②において、

$$l+\left\lfloor-\frac{(m-1)a}{a+1}\right\rfloor=l+\left\lfloor-\frac{\{d(a+1)+e\}a}{a+1}\right\rfloor$$

$$=l+\left\lfloor-da-\frac{ea}{a+1}\right\rfloor$$

$$=l-da+\left\lfloor-\frac{ea}{a+1}\right\rfloor$$

ここで、$e\neq 0$ より、

$\left\lfloor-\dfrac{ea}{a+1}\right\rfloor=-1-\left\lfloor\dfrac{ea}{a+1}\right\rfloor$ が成り立つので、

$$l+\left\lfloor-\frac{(m-1)a}{a+1}\right\rfloor=l-da-1-\left\lfloor\frac{ea}{a+1}\right\rfloor$$

よって、①と②は等しい。

（ｉ),（ⅱ)より、①と②は等しいことが示さ

れた。

したがって、最小値は$\left\lceil \dfrac{n-ma^2}{a(a+1)} \right\rceil$である。

(終)

この問題について、さらに条件を緩めると、最小値を評価することはできるが、どの場合に最小値をとるかはわからなかった。

３－２．日本数学オリンピック本選の問題

次の問題について一般化および考察を行った。

<u>例題２</u>

kを正の整数、mを奇数とする。このとき、n^n-mが2^kで割りきれるような正の整数nが存在することを示せ。

[日本数学オリンピック本選 2010]

この問題について、一般化した次の定理が成り立つことがわかった。証明方法は例題２とほとんど同じである。

<u>定理２</u>

k,mを正の整数、pを素数とする。このとき、$n^n-\left(pm+1\right)$がp^kで割り切れるような正の整数nが存在する。

（証明）

kに関する数学的帰納法で示す。

$k=1$のとき、$n=1$とすれば、

$$1^1-\left(pm+1\right)=-pm$$

は$p^1=p$で割り切れる。

$k=t$のとき、ある正の整数n_0が存在して、${n_0}^{n_0}-\left(pm+1\right)$が$p^t$で割り切れると仮定する。このとき、$n_0$は$p$の倍数でない。

$k=t+1$のとき、

$${n_0}^{n_0}\equiv pm+1 \pmod{p^{t+1}}$$

であればn_0が条件を満たす。そうでないとき、pの倍数でない正の整数lが存在し、

$${n_0}^{n_0}\equiv lp^t+pm+1 \pmod{p^{t+1}}$$

が成り立つ。

ここで、n_0とpは互いに素であるから、オイラーの定理より、

$${n_0}^{\varphi\left(p^{t+1}\right)}\equiv 1 \pmod{p^{t+1}}$$

が成り立つ。

$$\varphi\left(p^{t+1}\right)=p^{t+1}-p^t=p^t\left(p-1\right)$$

なので、

$${n_0}^{p^t(p-1)}\equiv 1 \pmod{p^{t+1}}$$

ゆえに、

$${n_0}^{p^tl(p-1)}=\left({n_0}^{p^t(p-1)}\right)^l\equiv 1 \pmod{p^{t+1}}$$

が成り立つ。ここで、$n=n_0+p^tl\left(p-1\right)$とおくと、$\bmod\ p^{t+1}$において、

$$n^n=n^{n_0+p^tl(p-1)}$$

$$=n^{n_0}\cdot n^{p^t l(p-1)}\equiv n^{n_0}$$

$$=\left(n_0+p^t l\left(p-1\right)\right)^{n_0}$$

$$=\sum_{i=0}^{n_0} {}_{n_0}C_i\left\{l\left(p-1\right)\right\}^i p^{ti}n_0^{n_0-i}$$

i≧2において、$p^{ti}\equiv 0$であるから、

$$n^n\equiv {}_{n_0}C_1\cdot l\left(p-1\right)p^t n_0^{n_0-1}+n_0^{n_0}$$

$$=p^t l\left(p-1\right)n_0^{n_0}+n_0^{n_0}$$

$$\equiv p^t l\left(p-1\right)n_0^{n_0}+lp^t+pm+1$$

$$=p^t\left\{l\left(p-1\right)n_0^{n_0}+l\right\}+pm+1$$

ここで、

$$n_0^{n_0}\equiv pm+1\pmod{p^{t+1}}$$

より、

$$n_0^{n_0}\equiv 1\pmod{p}$$

であるから、

$$l\left(p-1\right)n_0^{n_0}+l\equiv l\left(p-1\right)+l\equiv 0\pmod{p}$$

が成り立つ。ゆえに、

$$p^t\left\{l\left(p-1\right)n_0^{n_0}+l\right\}\equiv 0\pmod{p^{t+1}}$$

が成り立つので、

$$n^n\equiv p^t\left\{l\left(p-1\right)n_0^{n_0}+l\right\}+pm+1$$

$$\equiv pm+1\pmod{p^{t+1}}$$

したがって、$n^n-\left(pm+1\right)$はp^{t+1}で割り切れる。

よって$k=t+1$について題意が示されたので、数学的帰納法より任意の正の整数kについて題意が示された。（終）

また、例題２の主張を用いると、以下の定理が得られた。

<u>定理２</u>

３以上の整数kについて、以下が成り立つ。

$$1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot\left(2^k-3\right)\left(2^k-1\right)\equiv 1\pmod{2^k}$$

（証明）

mod 2^kで考える。奇数aについて、オイラーの定理より、

$$a^{2^{k-1}}\equiv 1$$

が成り立つので、

$$a^{2^k}=\left(a^{2^{k-1}}\right)^2\equiv 1$$

を得る。よって、

$$\left(a+2^k\right)^{a+2^k}\equiv a^{a+2^k}=a^a\cdot a^{2^k}\equiv a^a$$

が成り立つ。ここで、例題２より、a^aを2^kで割った余りは2^k以下の任意の奇数をとりえるので、$1^1,\ 3^3,\ 5^5,\ \cdots,\ \left(2^k-1\right)^{2^k-1}$を$2^k$で割った余りの集合は$\left\{1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 2^k-1\right\}$に等しいことがわかる。また、

$$a^a\cdot\left(2^k-a\right)^{2^k-a}\equiv a^a\cdot\left(-a\right)^{2^k-a}$$

$$=-a^{2^k}\equiv -1$$

が成り立つので、k≧3より、

$$1^1\cdot 3^3\cdot 5^5\cdots\cdots\left(2^k-1\right)^{2^k-1}\equiv(-1)^{2^{k-2}}=1$$

を得る。ゆえに、

$$1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots\left(2^k-3\right)\cdot\left(2^k-1\right)$$

$$\equiv 1^1\cdot 3^3\cdot 5^5\cdots\cdots\left(2^k-1\right)^{2^k-1}$$

$$\equiv 1$$

となる。(終)

３－３．国際数学オリンピックの問題

以下の関数方程式の問題について、条件式を変更することで、改題を作成し、解法がどう変わるのか調べた。

例題３

実数に対して定義され実数を値にとる関数 f であって、任意の実数 x,y に対して、

$$f([x]y)=f(x)[f(y)]$$

が成り立つようなものをすべて求めよ。ただし、$[z]$ は z を超えない最大の整数を表すものとする。[国際数学オリンピック 2010]

（解答）

$f([x]y)=f(x)[f(y)]\cdots(*)$ とする。

まず、(*)に $x=0$ を代入して、

$$f(0)=f(0)[f(y)].$$

ゆえに、$f(0)=0$ または $[f(y)]=1$ が成り立つ。

（ｉ）$f(0)=0$ のとき

(*)に $x=y=1$ を代入して、

$$f(1)=f(1)[f(1)].$$

ゆえに、$f(1)=0$ または $[f(1)]=1$

(A) $f(1)=0$ のとき

(*)に $x=1$ を代入して、

$$f(y)=f(1)[f(y)]=0$$

が成り立つ。逆に、任意の実数 y について $f(y)=0$ が成り立つとき、条件を満たす。

(B) $[f(1)]=1$ のとき

(*)に $y=1$ を代入して、

$$f([x])=f(x)[f(1)]=f(x).$$

ここで、$x>1$ のとき、$0<\dfrac{1}{[x]}<1$ が成り立つ。すると、(*)に $y=\dfrac{1}{[x]}$ を代入し、

$$f(1)=f(x)\left[f\left(\frac{1}{[x]}\right)\right]$$

$$=f(x)\left[f\left(\left[\frac{1}{[x]}\right]\right)\right]$$

$$=f(x)[f(0)]$$

$$=f(x)\cdot 0=0$$

を得るが、これは $[f(1)]=1$ に反する。よ

って条件を満たす関数は存在しない。

（ⅱ）$\left[f(y)\right]=1$のとき

(*)より、

$$f([x]y)=f(x).$$

これに$y=0$を代入して、

$$f(x)=f(0).$$

よって、$f(x)=C$（Cは$1\leqq C<2$を満たす定数)とかける。逆に、この関数は条件を満たす。

以上より、求める関数は

$$f(x)=C$$

（Cは定数で、$C=0$または$1\leqq C<2$）
となる。(終)

改題１

実数に対して定義され実数を値にとる関数fであって、任意の実数$x,\ y$に対して、

$$f([x]y)=f(x)+\left[f(y)\right]$$

が成り立つようなものをすべて求めよ。

（解答）

条件式に$x=y=0$を代入して、

$$f(0)=f(0)+\left[f(0)\right],$$

$$\left[f(0)\right]=0.$$

また、条件式に$y=0$を代入して、

$$f(0)=f(x)+\left[f(0)\right]=f(x)$$

を得る。よって、

$$f(x)=C\text{（}C\text{は定数で、}0\leqq C<1\text{）}$$

とかける。逆に、この関数は条件式を満たす。よって求める関数は、

$$f(x)=C\text{（}C\text{は定数で、}0\leqq C<1\text{）}$$

である。(終)

改題２

実数に対して定義され実数を値にとる関数fであって、任意の実数$x,\ y$に対して、

$$f([x]+y)=f(x)\left[f(y)\right]$$

が成り立つようなものをすべて求めよ。

（解答）

条件式に$x=y=0$を代入して、

$$f(0)=f(0)\left[f(0)\right]$$

ゆえに、$f(0)=0$または$\left[f(0)\right]=1$が成り立つ。

（ⅰ）$f(0)=0$のとき

条件式に$x=0$を代入して、

$$f(y)=f(0)\left[f(y)\right]=0$$

となる。実際、定数関数$f(x)=0$は条件を満たす。

（ⅱ）$\left[f(0)\right]=1$のとき

$f(0)=\alpha,\ f(1)=k$とおく。まず、条件式に$y=0$を代入して、

$$f([x])=f(x)\left[f(0)\right]=f(x)$$

を得る。また、条件式に$x=0$を代入して、

$$f(y)=\alpha\left[f(y)\right]$$

$$\left[f(y)\right]=\frac{f(y)}{\alpha}$$

を得る。次に、条件式に $x=\alpha$ を代入し、得られた式を用いることで、以下を得る。

$$f\left([\alpha]+y\right)=f(\alpha)\left[f(y)\right]$$

$$f(y+1)=f\left([\alpha]\right)\cdot\frac{f(y)}{\alpha}$$

$$f(y+1)=\frac{f(1)}{\alpha}\cdot f(y)$$

$$f(y+1)=\frac{k}{\alpha}\cdot f(y)$$

$f(1)=k$ より、整数 n について以下が成り立つ。

$$f(n)=k\cdot\left(\frac{k}{\alpha}\right)^{n-1}$$

いま、条件式に $x=0, y=1$ を代入して、

$$k=\alpha[k]$$

$$\frac{k}{\alpha}=[k]$$

が成り立つので、

$$f(n)=k\cdot\left(\frac{k}{\alpha}\right)^{n-1}=k\cdot[k]^{n-1}$$

となる。ここで、条件式に $x=1,\ y=n$ (n は整数)を代入して、

$$f(n+1)=k\left[f(n)\right]$$

$$k\cdot[k]^n=k\cdot\left[k\cdot[k]^{n-1}\right]$$

$$[k]^n=\left[k\cdot[k]^{n-1}\right]$$

ここで、

$$C=[k],\varepsilon=k-[k]$$

とおくと、

$$C^n=\left[(C+\varepsilon)C^{n-1}\right]$$

$$C^n=\left[C^n+\varepsilon\cdot C^{n-1}\right]$$

ここで、$\varepsilon>0$ かつ $|C|\geqq 2$ と仮定すると、十分大きな整数 N が存在し、$\varepsilon\cdot C^{N-1}\geqq 1$ となるようにできる。このとき、

$$C^N=\left[C^N+\varepsilon\cdot C^{N-1}\right]\geqq C^N+1$$

となって矛盾が生じる。また、$\varepsilon>0$ かつ $C=-1$ のとき、n を偶数とすると、$C^n=1$ だが、$C^n+\varepsilon\cdot C^{n-1}<1$ より矛盾する。ゆえに、$\varepsilon=0$ または $C=0$ または $C=1$ のときを考えればよい。

(Ⅰ) $\varepsilon=0$ のとき

$k=C$ であるから、整数 n について、

$$f(n)=k\cdot[k]^{n-1}=C^n$$

となる。また、任意の実数 x に対して、

$$f\left([x]\right)=f(x)$$

が成り立つので、任意の実数 x について、

$$f(x)=C^{[x]}$$

が成り立つ。逆に、C を定数(C は整数)とし、

$$f(x)=C^{[x]}$$

とするとき、条件式の左辺は、

$$f\left([x]+y\right)=C^{[[x]+y]}=C^{[x]+[y]}$$

右辺は

$$f(x)\left[f(y)\right]=C^{[x]}\cdot\left[C^{[y]}\right]=C^{[x]+[y]}$$

となるので、(左辺)=(右辺)を満たす。

（Ⅱ）$C=0$ のとき

整数 n について、

$$f(n)=k\cdot[k]^{n-1}=0$$

となる。また、任意の実数 x に対して、

$$f([x])=f(x)$$

が成り立つので、任意の実数 x について、

$$f(x)=0$$

が成り立つ。逆に、定数関数 $f(x)=0$ は条件式を満たす。

(Ⅲ) $C=1$ のとき

$\dfrac{k}{\alpha}=[k]=C$ より、$k=\alpha$ である。よって整数 n について、

$$f(n)=k\cdot[k]^{n-1}=\alpha$$

となる。また、任意の実数 x に対して、

$$f([x])=f(x)$$

が成り立つので、任意の実数 x について、

$$f(x)=\alpha$$

が成り立つ。逆に、

$f(x)=\alpha$（α は $1\leqq\alpha<2$ である定数)

とするとき、条件式において、

(左辺) $=f([x]+y)=\alpha$

(右辺) $=f(x)[f(y)]=\alpha\cdot[\alpha]=\alpha$

より、(左辺)＝(右辺)を満たす。

（Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ)より、求める関数は、

$$f(x)=\alpha$$

（α は定数で、$\alpha=0$ または $1\leqq\alpha<2$）

または

$f(x)=C^{[x]}$（C は整数)

である。（終)

<u>改題３</u>

実数に対して定義され実数を値にとる関数 f であって、任意の実数 $x,\ y$ に対して、

$$f([x]+y)=f(x)+[f(y)]$$

が成り立つようなものをすべて求めよ。

（解答）

$$f([x]+y)=f(x)+[f(y)] \quad \cdots(\#)$$

とする。また、$f(0)=a$ とおく。

(#)に $x=y=0$ を代入して、

$$f(0)=f(0)+[f(0)].$$

ゆえに、$[a]=0$ が成り立つ。(#)に $x=0$ を代入して、

$$f(y)=a+[f(y)]$$

$$[f(y)]=f(y)-a \quad \cdots①$$

を得る。また、(#)に $y=0$ を代入して、

$$f([x])=f(x)+[f(0)]=f(x) \quad \cdots②$$

いま、整数 n について、$-[n]=[-n]=-n$ が

成り立つ。(#)に $x=n,\ y=-[n]$ を代入し、

①, ②を用いることで以下を得る。

$$f([n]-[n])=f(n)+[f(-[n])]$$

$$a=f(n)+f([-n])-a$$

$$f(n)+f(-n)=2a \quad \cdots ③$$

また、整数でない実数 p について、

$-[p]=[-p]+1$ が成り立つので、(#)に

$x=p,\ y=-[p]+z$ を代入して、

$$f([p]-[p]+z)=f(p)+[f(-[p]+z)]$$

$$f(z)=f(p)+f([-p]+z+1)-a$$

ここで、(#)と①より、

$$f([-p]+z+1)=f(-p)+[f(z+1)]$$

$$=f(-p)+f(z+1)-a$$

が成り立つので

$$f(z)=f(p)+f([-p]+z+1)-a$$

$$=f(p)+f(-p)+f(z+1)-2a$$

$\cdots ④$

を得る。また、(#)に $x=a$ を代入して、

$$f([a]+y)=f(a)+[f(y)]$$

$$f(y)=f(a)+f(y)-a$$

$$f(a)=a \quad \cdots ⑤$$

を得る。

$x=f(z)$ を代入して、

$$f([f(z)]+y)=f(f(z))+[f(y)].$$

①より、

$$f(f(z)-a+y)=f(f(z))+f(y)-a.$$

$y=f(-z)$ を代入して、

$$f(-a)=f(f(z))+f(-f(z))-a.$$

⑤より、

$$f(-a)=f(f(z))+f(-f(z))-f(a)$$

$\cdots ⑥$

が成り立つ。

（ｉ）ある実数 t が存在して、$f(t)$ が整数となるとき。

$f(t)=m$（m は整数)とおく。③より、

$f(m)+f(-m)=2a$ であるから、⑥より、

$$f(-a)=f(f(t))+f(-f(t))-f(a)=a$$

となる。

（I）$a\neq 0$ のとき

$a\neq 0$ のとき、a は整数ではないから、④において $p=a$ を代入して、

$$f(z)=f(a)+f(-a)+f(z+1)-2a$$

$$=a+a+f(z+1)-2a$$

$$=f(z+1)$$

を得る。$f(0)=a$ より、任意の整数 n について $f(n)=a$ が成り立つ。ここで、(#)に $y=n$ を代入すると、

$$f([x]+n)=f(x)+[f(n)]$$

$$=f(x)+[a]$$

$$=f(x)$$

いま、$[x]+n$ は整数であるから、

$$f([x]+n)=a$$

ゆえに、任意の実数 x について

$$f(x)=a$$

が成り立つ。しかし、これはある実数 t に対して $f(t)$ が整数となることに反する。よって、条件を満たす関数は存在しない。

(II) $a=0$ のとき

整数 n について、③より、

$$f(n)+f(-n)=2a=0 \quad \cdots⑦$$

となる。また、整数ではない p において、④より、

$$f(z)=f(p)+f(-p)+f(z+1)-2a$$

$$=f(p)+f(-p)+f(z+1) \quad \cdots⑧$$

が成り立つ。ここで⑧に $z=-\frac{1}{2},\ p=\frac{1}{2}$ を代入して、

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right).$$

ゆえに

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=0.$$

⑧について、$p=\frac{1}{2}$ より、

$$f(z)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(-\frac{1}{2}\right)+f(z+1)$$

$$=f(z+1)+f\left(-\frac{1}{2}\right).$$

ゆえに、

$$f(z+1)-f(z)=-f\left(-\frac{1}{2}\right).$$

ここで、②, ⑦より、

$$-f\left(-\frac{1}{2}\right)=-f(-1)=f(1)$$

であるから、

$$f(z+1)-f(z)=f(1).$$

ここで、$f(1)=C$ とおくと、

$$f(z+1)-f(z)=C$$

であり、$f(0)=a=0$ であるから、整数 n について、

$$f(n)=nC$$

が成り立つ。また、②より、任意の実数 x に対して、

$$f(x)=[x]C$$

が成り立つ。よって、(#)より、

$$[[x]+y]C=[x]C+[[y]C].$$

任意の実数x, yに対して

$$\left[[x]+y\right]=[x]+[y]$$

が成り立つので、

$$[x]C+[y]C=[x]C+\left[[y]C\right],$$

$$[y]C=\left[[y]C\right]$$

を得る。よって、$[y]C$は整数であるから、Cは整数である。逆に、Cを定数(Cは整数)とし、

$$f(x)=C[x]$$

とするとき、(#)において、

$$(\text{左辺})=f\left([x]+y\right)$$

$$=C\left[[x]+y\right]$$

$$=C\left([x]+[y]\right)$$

$$(\text{右辺})=f(x)+\left[f(y)\right]$$

$$=C[x]+\left[C[y]\right]$$

$$=C\left([x]+[y]\right)$$

より、等式を満たす。

(ⅱ) すべての実数tに対して$f(t)$が整数ではないとき

④, ⑥より、

$$f(-a)=f\left(f(t)\right)+f\left(-f(t)\right)-f(a)$$

$$=f(z)-f(z+1)+2a-a$$

$$=f(z)-f(z+1)+a \quad \cdots ⑨$$

⑨に$z=0$を代入して、

$$f(-a)=a-f(1)+a=2a-f(1) \quad \cdots ⑩$$

⑩を⑨へ代入して、

$$2a-f(1)=f(z)-f(z+1)+a,$$

$$f(z+1)-f(z)=f(1)-a \quad \cdots ⑪$$

$f(1)=D$とおく。(#)に$y=1$を代入すると、②, ⑪より、

$$f\left([x]+1\right)=f(x)+\left[f(1)\right]$$

$$f\left([x]\right)+f(1)-a=f(x)+[D]$$

$$f(x)+D-a=f(x)+[D]$$

$$D-a=[D]$$

⑪より、

$$f(z+1)-f(z)=D-a=[D]$$

$f(0)=a$より、整数nについて、

$$f(n)=[D]n+a$$

とかける。ただし、すべての実数tに対して$f(t)$が整数ではないことから、$0<a<1$である。よって②より、任意の実数xに対して、

$$f(x)=[D][x]+a$$

とかける。逆に、a, Eを定数

$(0<a<1, E$ は整数)として、

$$f(x)=E[x]+a$$

とするとき、(#)において、

$$(\text{左辺})=f([x]+y)$$

$$=E[[x]+y]+a$$

$$=E([x]+[y])+a$$

$$(\text{右辺})=f(x)+[f(y)]$$

$$=E[x]+a+[E[y]+a]$$

$$=E([x]+[y])+a$$

より、等式を満たす。

(ⅰ), (ⅱ)より、求める関数は、

$$f(x)=A[x]+a$$

$(a, A$ は定数で、$0\leqq a<1, A$ は整数)である。

(終)

３－４．海外の数学オリンピックの問題

次の問題も関数方程式であるが、与えられている式が不等式である。

<u>例題４</u>

実数で定義され、実数の値をとる関数fであって、任意の実数x, yに対して次の式を満たすようなものをすべて求めよ。

$$f(x+y)+y\leqq f(f(f(x)))$$

[Benelux Mathematical Olympiad 2013]

（解答）

条件式に $y=0$ を代入して、

$$f(x)\leqq f(f(f(x))) \quad \cdots①$$

また、条件式に $y=f(f(x))-x$ を代入して、

$$f(f(f(x)))+f(f(x))-x\leqq f(f(f(x)))$$

$$f(f(x))\leqq x \quad \cdots②$$

②に $x=f(z)$ を代入して、

$$f(f(f(z)))\leqq f(z).$$

①より、

$$f(f(f(z)))=f(z) \quad \cdots③$$

条件式より、

$$f(x+y)+y\leqq f(f(f(x)))=f(x)$$

$$\cdots④$$

④に $x=0$ を代入して、

$$f(y)+y\leqq f(0) \quad \cdots⑤$$

また、④に $y=-x$ を代入して、

$$f(0)-x\leqq f(x),$$

$$f(0)\leqq f(x)+x \quad \cdots⑥$$

⑤, ⑥より、

$$f(x)+x=f(0).$$

$f(0)=C$ とおくと、

$$f(x)=-x+C.$$

逆に、C を定数として、$f(x)=-x+C$ とするとき、条件式において、

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= f(x+y)+y \\
&= -(x+y)+C+y \\
&= -x+C \\
(\text{右辺}) &= f\left(f\left(f(x)\right)\right) \\
&= f\left(f(-x+C)\right) \\
&= f\left(-(-x+C)+C\right) \\
&= f(x) \\
&= -x+C
\end{aligned}
$$

より、不等式を満たす。

よって求める関数は、

$$f(x)=-x+C \quad (C\text{ は定数})$$

である。（終）

この問題に関しても改題を作成した。

<u>改題</u>

実数で定義され、実数の値をとる関数 f であって、任意の実数 $x,\ y$ に対して次の式を満たすようなものをすべて求めよ。

$$f(x+y)\cdot y \leqq f\left(f\left(f(x)\right)\right)$$

（解答）

$f(x+y)\cdot y \leqq f\left(f\left(f(x)\right)\right)$ …(**)とする。(**)に $y=0$ を代入して、

$$0 \leq f\left(f\left(f(x)\right)\right) \quad \cdots ①$$

ここで、以下の 2 つの命題が成り立つ。

<u>命題 1</u>

ある実数 t に対して、

$$f\left(f\left(f(t)\right)\right)=0$$

が成り立つ。

（命題 1 の証明）

背理法で示す。いま、任意の実数 x に対して、

$$0 < f\left(f\left(f(x)\right)\right)$$

が成り立つと仮定する。(**)に

$y=f\left(f(x)\right)-x$ を代入して、

$$f\left(f\left(f(x)\right)\right)\left(f\left(f(x)\right)-x\right) \leqq f\left(f\left(f(x)\right)\right)$$

仮定より、両辺を $f\left(f\left(f(x)\right)\right)$ で割ることができるので、

$$f\left(f(x)\right)-x \leqq 1,$$

$$f\left(f(x)\right) \leqq x+1.$$

よって、

$$f\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right) \leqq f\left(f(x)\right)+1 \leqq x+2$$

が成り立つ。ここで、$x \leqq -2$ とすれば、

$$f\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right) \leqq 0$$

が成り立つ。しかし、これは仮定に反する。

よって、ある実数 t に対して、

$$f\left(f\left(f\left(t\right)\right)\right) \leqq 0$$

となる。よって、①より、

$$f\left(f\left(f(t)\right)\right) = 0$$

が成り立つ。（終）

<u>命題２</u>

　$f\left(0\right) \le 0$ が成り立つ。

（命題２の証明）

　背理法で示す。$f\left(0\right) > 0$ が成り立つと仮定する。(**)に $y = -x$ を代入して、

$$f\left(0\right)\cdot\left(-x\right) \leqq f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right)$$

いま、$f\left(0\right) > 0$ より、$z < 0$ に対して、

$$0 < f\left(0\right)\cdot\left(-z\right) \leqq f\left(f\left(f\left(z\right)\right)\right)$$

が成り立つ。ここで、(**)に $x = z,$ $y = f\left(f\left(z\right)\right) - z$ を代入して、

$$f\left(f\left(f\left(z\right)\right)\right)\left(f\left(f\left(z\right)\right) - z\right) \leqq f\left(f\left(f\left(z\right)\right)\right)$$

$0 < f\left(f\left(f\left(z\right)\right)\right)$ より、

$$f\left(f\left(z\right)\right) \leqq z + 1$$

を得る。ここで、$z < -2$ とすると、

$$f\left(f\left(z\right)\right) < -1$$

となるので、

$$f\left(f\left(f\left(f\left(z\right)\right)\right)\right) \leqq f\left(f\left(z\right)\right) + 1 < 0$$

を得る。しかし、これは①に反する。よって $f\left(0\right) \leqq 0$ が成り立つ。（終）

（解答のつづき）

　命題１より、ある実数 t に対して、$f\left(f\left(f\left(t\right)\right)\right) = 0$ となるので、①より、

$$f\left(0\right) = f\left(f\left(f\left(f\left(t\right)\right)\right)\right) \ge 0$$

が成り立つ。よって命題２より、

$$f\left(0\right) = 0$$

を得る。(**)に $x = 0$ を代入して、

$$f\left(y\right)\cdot y \le f\left(f\left(f\left(0\right)\right)\right) = 0$$

を得る。よって、$f\left(0\right) = 0$ と合わせて、

$$\begin{cases} y \ge 0 \text{ のとき } f\left(y\right) \leqq 0 \\ y \le 0 \text{ のとき } f\left(y\right) \geqq 0 \end{cases} \quad \cdots②$$

が成り立つ。よって、$w > 0$ に対して、

$$f\left(w\right) \leqq 0,\ f\left(f\left(w\right)\right) \geqq 0,\ f\left(f\left(f\left(w\right)\right)\right) \leqq 0$$

が成り立つ。一方、①より、

$$f\left(f\left(f\left(w\right)\right)\right) \geqq 0$$

であるから、

$$f\left(f\left(f\left(w\right)\right)\right) = 0$$

を得る。いま、任意の $w > 0$ に対して、

$$p > 0,\ q < 0,\ p + q = w$$

を満たす実数 p, q が存在する。(**)に $x = p,\ y = q$ を代入して、

$$f(w)\cdot q \leqq f(f(f(p)))$$

②より、$f(w)\leqq 0,\ f(f(f(p)))=0$ であるから、

$$0\leqq f(w)\cdot q \leqq f(f(f(p)))\leqq 0$$

ゆえに、

$$f(w)\cdot q = 0$$

$q<0$ より、

$$f(w)=0 \quad \cdots ③$$

を得る。よって、②より $z<0$ について、

$$f(z)\geqq 0$$

が成り立つので、

$$f(f(z))=0,\ f(f(f(z)))=0$$

が成り立つ。いま、$z<0$ に対して、

$$i<0,\ j>0,\ i+j=z$$

を満たす実数 $i,\ j$ が存在する。(**)に $x=i,\ y=j$ を代入して、

$$f(z)\cdot j \leqq f(f(f(i)))$$

いま、②より、$f(z)\geqq 0,\ f(f(f(i)))=0$ であるから、

$$0\leqq f(z)\cdot j \leqq f(f(f(i)))=0$$

ゆえに、

$$f(z)\cdot j = 0$$

$j>0$ より、

$$f(z)=0 \quad \cdots ④$$

を得る。$f(0)=0$ と合わせて、任意の実数 x に対して、

$$f(x)=0$$

が成り立つ。よって求める関数は、

$$f(x)=0$$

である。実際、この関数は(**)を満たす。

(終)

4．今後の課題

今回は、組合せ論、数論、関数方程式の問題について考えたが、あまり深いところまで考察できなかった。今後は一般化だけでなく、問題間のつながりを調べ、そこから新たな議論ができればよいと考えている。

5．参考文献

[1]「数学オリンピック 2006~2010」数学オリンピック財団監修、日本評論社

[2]「5th Benelux Mathematical Olympiad」http://www.bxmo.org/problems/bxmo-problems-2013-en.pdf