

三角形の垂心とトロコイド

5年C組 古宮 昌典
指導教員 川口 慎二

1. 要約

サイエンス研究会数学班 5年生は図形の性質について研究している。今回は、ある条件下での三角形の垂心の軌跡に関する考察を行い、参考文献を用いてトロコイドについて学習した。

キーワード 円、垂心、トロコイド、一定の長さの線分

2. 研究の背景と目的

円に内接する三角形に対して、独自に考察した操作を施すことで、円の中に三角形を無限に作り出すことができる。そして、それらの垂心の軌跡を図形描画ソフトで描くと、トロコイド曲線との関係が見られた。今回は、その曲線を数式で表すことが目標である。

れる回数は p である。よって、 $p \geq 3$ のとき、葉数は図形的に見える葉の枚数と等しい。

また、ハイポトロコイドは以下の方程式で表される。ただし、 θ は媒介変数である。

$$x = (p - q) \cos \theta + r \cos \left(\frac{p - q}{q} \theta \right)$$
$$y = (p - q) \sin \theta - r \sin \left(\frac{p - q}{q} \theta \right)$$

3. 研究内容

3. 1 トロコイド

トロコイドにはいくつかの種類があるが、本稿では特にハイポトロコイドについて扱う。

定義

p と q は互いに素な正の整数で、 $p > q$ とする。半径 p の円 C_1 に半径 q の円 C_2 が内接しながら滑ることなく転がるときの、円 C_2 に固定した点 D の軌跡を葉数 p のハイポトロコイドと呼ぶ。

D がハイポトロコイドを描く間に C_2 は p 回転するので、 D が C_1 の中心から最も離

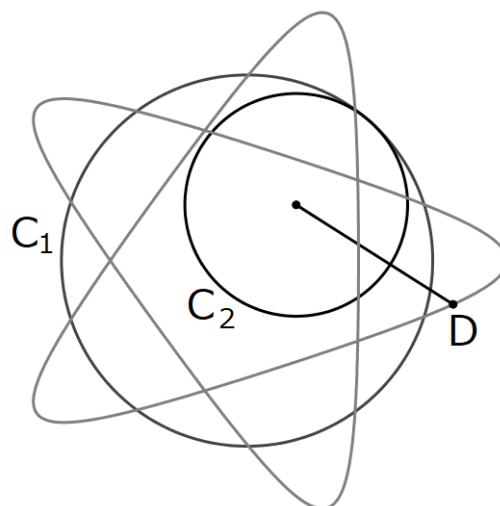


図1 ハイポトロコイドの例
($p = 5, q = 3, r = 5$)

3. 2 垂心の軌跡

昨年度の研究において、円に内接している $\triangle A_0B_0C_0$ に対して、各辺の垂直二等分線を引き、それぞれの円との交点を取り、新しく $\triangle A_1B_1C_1$ をつくる操作について考察した。 $\triangle A_1B_1C_1$ に対しても同様の操作を行い $\triangle A_2B_2C_2$ をつくる、これを繰り返して得られる $\triangle A_nB_nC_n$ は、操作を無限に繰り返すと、正三角形に近づくことを証明した。

今回は、上述の操作における「各辺の垂直二等分線」を「各頂点から対辺へ下した垂線」に代えて考察した。このとき、新しくできる三角形の垂心を H_1, H_2, H_3, \dots とする。辺 B_0C_0 を固定して、点 A_0 を円周上で動かしたときの垂心の軌跡を調べたところ、次のようになった。

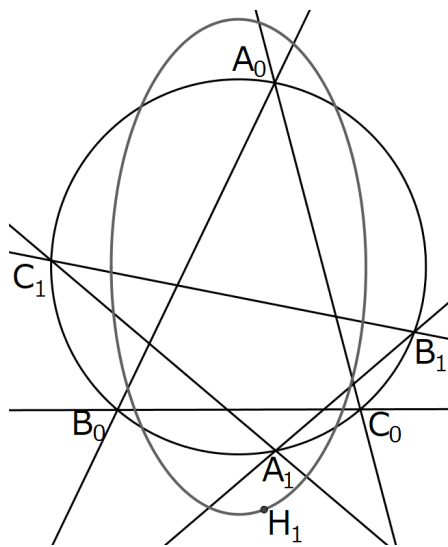


図3 H_1 の軌跡

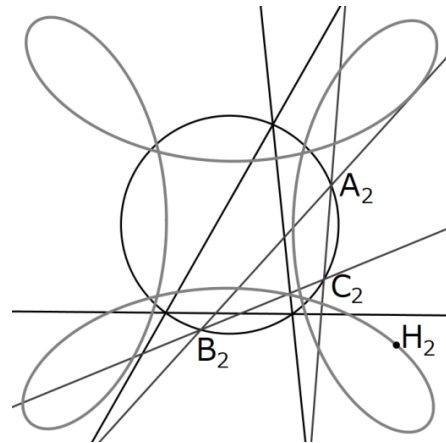


図4 H_2 の軌跡

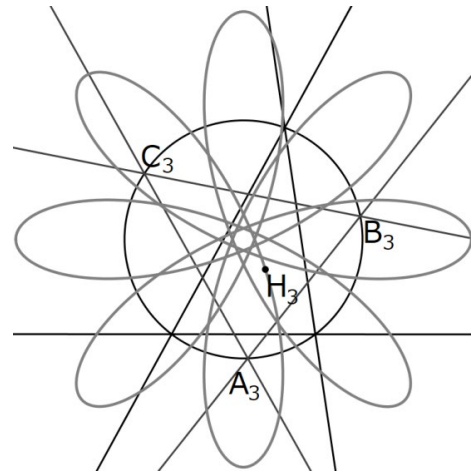


図5 H_3 の軌跡

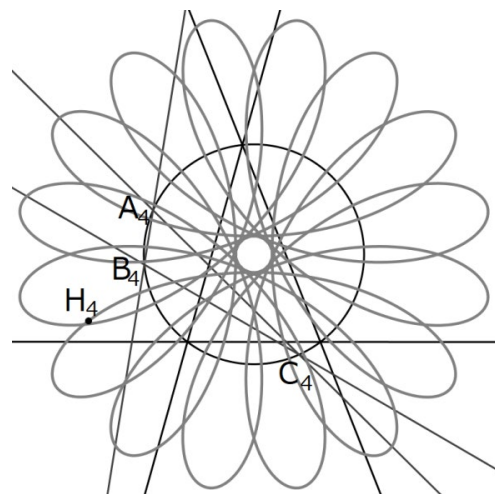


図6 H_4 の軌跡

これらの曲線がハイポトロコイドであると予想し、極座標を用いて証明した。

定理 1

点 O を中心とする円に内接する $\triangle A_0 B_0 C_0$ について、点 A_0 から直線 $B_0 C_0$ へ降ろした垂線と円の交点のうち、 A_0 でない方の点を A_1 、点 B_0 から直線 $C_0 A_0$ へ降ろした垂線と円の交点のうち、 B_0 でない方の点を B_1 、点 C_0 から直線 $A_0 B_0$ へ降ろした垂線と円の交点のうち、 C_0 でない方の点を C_1 とする。この操作で得られた $\triangle A_1 B_1 C_1$ の垂心を H_1 とする。そして、 $\triangle A_1 B_1 C_1$ においても同様の操作を繰り返すということを無限に繰り返すと、各三角形の垂心 H_1, H_2, H_3, \dots が得られる。
 辺 $B_0 C_0$ を固定し、点 A_0 を円周上で動かしたとき垂心 H_n (n は正の整数) の軌跡は葉数 2^n のハイポトロコイドを描く。

(証明)

点 O を通り $B_0 C_0$ に平行な直線と円の交点のうち、辺 $B_0 C_0$ の垂直二等分線に関して点 C_0 側であるのを X とする。また、 $\angle B_0 A_0 C_0 = a$ 、半直線 OX を始線としたときの動径 OA_n, OB_n, OC_n (n は非負整数) の表す角をそれぞれ $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ とする。ここで、辺 $B_0 C_0$ は固定しているため、 a は定数である。

点 A_1 は直線 OX に関して点 A_0 と対称な位置にあるので、 $\alpha_1 = -\alpha_0$ が成り立つ。

また、 $\angle A_0 B_0 C_1 = 90^\circ - a$ より、

$$\angle A_0 O B_1 = 180^\circ - 2a$$

であるから、

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_0 + (360^\circ - \angle A_0 O B_1) \\ &= \alpha_0 - 2a + 180^\circ \end{aligned}$$

を得る。同様にして

$$\gamma_1 = \alpha_0 - 2a + 180^\circ$$

となる。

$\beta_1 = \alpha_0 - 2a + 180^\circ \equiv \alpha_0 - 2a - 180^\circ \pmod{360^\circ}$ であるから、以下、 $\beta_1 = \alpha_0 - 2a - 180^\circ$ として計算する。

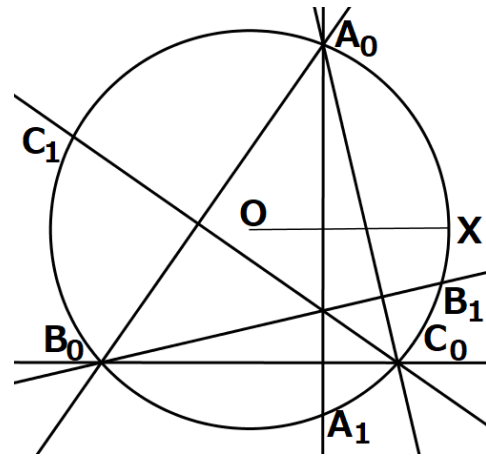


図 7

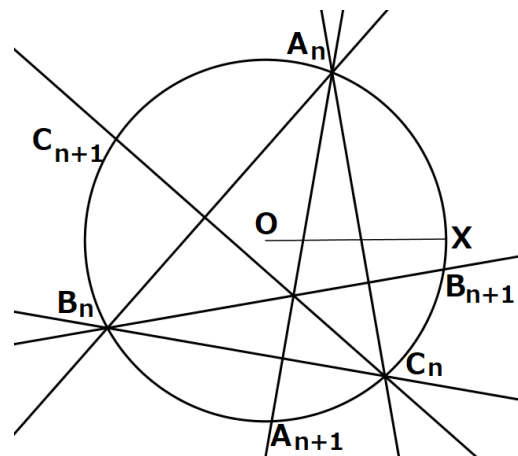


図 8

上図のように、 $\triangle A_n B_n C_n$ と点 A_{n+1} 、

B_{n+1}, C_{n+1} を考える。

いま、 $\angle A_n O B_n = \beta_n - \alpha_n$ とかけるので、

円周角の定理より

$$\angle A_n C_n B_n = \frac{1}{2}(\beta_n - \alpha_n)$$

である。ゆえに、

$$\angle A_{n+1} A_n C_n = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta_n + \frac{1}{2}\alpha_n$$

であるから、再び円周角の定理より

$$\angle A_{n+1} O C_n = 180^\circ - \beta_n + \alpha_n$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \angle X O A_{n+1} \\ &= \angle X O C_n - \angle A_{n+1} O C_{n+1} \\ &= \gamma_n - (180^\circ - \beta_n + \alpha_n) \\ &= -\alpha_n + \beta_n + \gamma_n - 180^\circ \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

を得る。同様にして、

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} &= \alpha_n - \beta_n + \gamma_n + 180^\circ, \\ \gamma_{n+1} &= \alpha_n + \beta_n - \gamma_n + 180^\circ \end{aligned}$$

を得る。ここで、

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} &= \alpha_n - \beta_n + \gamma_n + 180^\circ \\ &\equiv \alpha_n - \beta_n + \gamma_n - 180^\circ \\ \gamma_{n+1} &= \alpha_n + \beta_n - \gamma_n + 180^\circ \\ &\equiv \alpha_n + \beta_n - \gamma_n - 180^\circ \end{aligned} \quad (\text{mod } 360^\circ)$$

であるから、以下、

$$\beta_{n+1} = \alpha_n - \beta_n + \gamma_n - 180^\circ \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\gamma_{n+1} = \alpha_n + \beta_n - \gamma_n - 180^\circ \quad \dots \textcircled{3}$$

として計算する。

②+③より、 $\beta_{n+1} + \gamma_{n+1} = 2\alpha_n - 360^\circ$ なので、この式を①へ代入して、

$$\alpha_{n+1} = -\alpha_n + 2\alpha_{n-1} - 540^\circ$$

この漸化式を解くと、

$$\alpha_n = \frac{1 - (-2)^{n+1}}{3} \alpha_0 + 180^\circ(n-1)$$

$$+ 360^\circ \cdot \frac{1 - (-2)^{n-1}}{3}$$

が得られる。

$$\alpha_n = \frac{1 - (-2)^{n+1}}{3} \alpha_0 + 180^\circ(n-1)$$

$$+ 360^\circ \cdot \frac{1 - (-2)^{n-1}}{3}$$

$$\equiv \frac{1 - (-2)^{n+1}}{3} \alpha_0 + 180^\circ(n-1)$$

$$(\text{mod } 360^\circ)$$

であるから、以下、

$$\alpha_n = \frac{1 - (-2)^{n+1}}{3} \alpha_0 + 180^\circ(n-1) \quad \dots \textcircled{X}$$

として計算する。

$$\beta_n - \gamma_n = (-2)^n(-2a + 180^\circ) \quad \dots \textcircled{\#}$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す。

$n=1$ のとき、

$$\begin{aligned} \beta_1 - \gamma_1 &= (\alpha_0 + 2a - 180^\circ) - (\alpha_0 - 2a + 180^\circ) \\ &= 4\alpha_0 - 360^\circ \end{aligned}$$

より、成り立つ。

$n=k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$\beta_k - \gamma_k = (-2)^k(-2a + 180^\circ) \text{ が成り立つ。}$$

$n=k+1$ のとき、

$$\begin{aligned} \beta_{k+1} - \gamma_{k+1} &= (\alpha_k - \beta_k + \gamma_k - 180^\circ) \\ &\quad - (\alpha_k + \beta_k - \gamma_k + 180^\circ) \\ &= -2(\beta_k - \gamma_k) \\ &= (-2)^{k+1}(-2a + 180^\circ) \end{aligned}$$

よって、 $n=k+1$ でも成り立つので、示された。

(X)と(#)より、

$$\begin{aligned}\beta_n &= \alpha_{n-1} - (\beta_{n-1} - \gamma_{n-1}) - 180^\circ \\ &= 180^\circ(n-2) + \frac{1-(-2)^n}{3}\alpha_0 \\ &\quad - (-2)^{n-1}(-2a+180^\circ) - 180^\circ \\ &= \frac{1-(-2)^n}{3}\alpha_0 - (-2)^n a \\ &\quad + 180^\circ\{n-3+(-2)^{n-1}\} \dots(\text{Y})\end{aligned}$$

同様にして、

$$\begin{aligned}\gamma_n &= \frac{1-(-2)^n}{3}\alpha_0 + (-2)^n a \\ &\quad + 180^\circ\{n-3+(-2)^{n-1}\} \dots(\text{Z})\end{aligned}$$

が得られる。

n の偶奇で場合分けをする。

(i) n が奇数のとき

$$\begin{aligned}(\text{X})\text{において、} \\ 180^\circ(n-1) \equiv 0^\circ \pmod{360^\circ}\end{aligned}$$

である。また、(Y)と(Z)において、

$$180^\circ\{n-3+(-2)^{n-1}\} \equiv 0^\circ \pmod{360^\circ}$$

なので、 H_n の x 座標は、

$$\begin{aligned}\cos \alpha_n + \cos \beta_n + \cos \gamma_n \\ &= \cos\left(\frac{1-(-2)^{n+1}}{3}\alpha_0\right) \\ &\quad + \cos\left(\frac{1-(-2)^n}{3}\alpha_0 + (-2)^n a\right) \\ &\quad + \cos\left(\frac{1-(-2)^n}{3}\alpha_0 - (-2)^n a\right) \\ &= \cos\left(\frac{1-(-2)^{n+1}}{3}\alpha_0\right)\end{aligned}$$

$$+ 2 \cos((-2)^n a) \cos\left(\frac{1-(-2)^n}{3}\alpha_0\right)$$

とかける。

同様に、 y 座標は

$$\begin{aligned}\sin \alpha_n + \sin \beta_n + \sin \gamma_n \\ &= \sin\left(\frac{1-(-2)^{n+1}}{3}\alpha_0\right)\end{aligned}$$

$$+ 2 \cos((-2)^n a) \sin\left(\frac{1-(-2)^n}{3}\alpha_0\right)$$

とかける。

$$\text{ここで、}\frac{1-(-2)^{n+1}}{3}\alpha_0 = \theta \text{ とおくと } H_n$$

の座標は以下のように表される。

$$x = \cos \theta + 2 \cos(2^n a) \cos\left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta\right)$$

$$y = \sin \theta - 2 \cos(2^n a) \sin\left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta\right)$$

さらに、 $\cos(2^n a)$ の正負で場合分けをする。

(I) $\cos(2^n a) > 0$ のとき

$$x = \cos \theta + 2 \cos(2^n a) \cos\left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta\right)$$

$$y = \sin \theta - 2 \cos(2^n a) \sin\left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta\right)$$

である。これは、ハイポトロコイドの方程式において、

$$p = \frac{3 \cdot 2^n}{2^n + 1}, \quad q = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n + 1}, \quad r = 2 \cos(2^n a)$$

としたときの式であるから、この座標はトロコイドを描くことがわかる。

また、 $p:q = 2^n : \frac{1 - (-2)^{n+1}}{3}$ であり、

$\frac{1 - (-2)^{n+1}}{3}$ は 2 で割り切れないので、 2^n と

$\frac{1 - (-2)^{n+1}}{3}$ は互いに素である。ゆえに、こ

のトロコイドの葉の数は 2^n となる。

(II) $\cos(2^n a) < 0$ のとき

$$x = \cos \theta - (-2 \cos(2^n a)) \cos\left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta\right)$$

$$y = \sin \theta + (-2 \cos(2^n a)) \sin\left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta\right)$$

である。ここで、この座標を角度 t だけ回転させたときの x 座標は、以下のようになる。

$$x \cos t - y \sin t = \cos \theta \cos t - (-2 \cos(2^n a)) \cos\left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta\right) \cos t$$

$$- \sin \theta \sin t - (-2 \cos(2^n a)) \sin\left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta\right) \sin t$$

$$= \cos(\theta + t) + (-2 \cos(2^n a)) \cos\left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta - t + 180^\circ\right)$$

ここで、 $t = \frac{2^{n+1} - 1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ$ とすると、

$$\begin{aligned} \frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta - \frac{2^{n+1} - 1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ + 180^\circ &= \frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta + \frac{2^n + 1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ \\ &= \frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta + \frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \cdot \frac{2^n + 1}{3 \cdot 2^n} \cdot \frac{1 - 2^{n+1}}{-2^n - 1} \cdot 180^\circ \\ &= \frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \left(\theta + \frac{2^{n+1} - 1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ \right) \end{aligned}$$

と変形できるので、もとの座標を $\frac{2^{n+1} - 1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ$ だけ回転させたときの x 座標は

$$\cos\left(\theta + \frac{2^{n+1} - 1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ\right) + (-2 \cos(2^n a)) \cos\left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \left(\theta + \frac{2^{n+1} - 1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ\right)\right)$$

同様に計算することで、もとの座標を $\frac{2^{n+1}-1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ$ だけ回転させたときの y 座標は

$$\sin\left(\theta + \frac{2^{n+1}-1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ\right) - (-2 \cos(2^n a)) \sin\left(\frac{-2^n-1}{1-2^{n+1}} \left(\theta + \frac{2^{n+1}-1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ\right)\right)$$

となる。

ここで、 $\theta + \frac{2^{n+1}-1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ = u$ とおくと、
座標は

$$x = \cos u + (-2 \cos(2^n a)) \cos\left(\frac{-2^n-1}{1-2^{n+1}} u\right)$$

$$y = \sin u - (-2 \cos(2^n a)) \sin\left(\frac{-2^n-1}{1-2^{n+1}} u\right)$$

となり、これはトロコイドの式において

$$p = \frac{3 \cdot 2^n}{2^n + 1}, \quad q = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n + 1},$$

$$r = -2 \cos(2^n a)$$

としたときであるから、この軌跡はトロコイドを描くことがわかる。葉の数は (I) と同様である。

(ii) n が偶数のとき

n が偶数のときも (i) と同じように示すことができる。

(X)において、

$$180^\circ(n-1) \equiv 180^\circ \pmod{360^\circ}$$

である。また、(Y)と(Z)において、

$$180^\circ \{n-3+(-2)^{n-1}\} \equiv 180^\circ \pmod{360^\circ}$$

なので、 H_n の x 座標は、

$$\cos \alpha_n + \cos \beta_n + \cos \gamma_n$$

$$= \cos\left(\frac{1-(-2)^{n+1}}{3} \alpha_0 + 180^\circ\right)$$

$$+ \cos\left(\frac{1-(-2)^n}{3} \alpha_0 + (-2)^n a + 180^\circ\right)$$

$$+ \cos\left(\frac{1-(-2)^n}{3} \alpha_0 - (-2)^n a + 180^\circ\right)$$

$$= -\cos\left(\frac{1-(-2)^{n+1}}{3} \alpha_0\right)$$

$$-2 \cos((-2)^n a) \cos\left(\frac{1-(-2)^n}{3} \alpha_0\right)$$

とかける。同様に、 y 座標は

$$\sin \alpha_n + \sin \beta_n + \sin \gamma_n$$

$$= -\sin\left(\frac{1-(-2)^{n+1}}{3} \alpha_0\right)$$

$$-2 \cos((-2)^n a) \sin\left(\frac{1-(-2)^n}{3} \alpha_0\right)$$

とかける。

$$\text{ここで、} \frac{1-(-2)^{n+1}}{3} \alpha_0 = \theta \text{ とおくと } H_n$$

の座標は以下のように表される。

$$x = \cos \theta + 2 \cos(2^n a) \cos\left(\frac{-2^n-1}{1-2^{n+1}} \theta\right)$$

$$y = \sin \theta - 2 \cos(2^n a) \sin\left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta\right)$$

$r = 2 \cos(2^n a)$ としたときの式であるから、
この座標はトロコイドを描くことがわかる。

$\cos(2^n a)$ の正負で場合分けをする。

(II) $\cos(2^n a) < 0$ のとき

(I) $\cos(2^n a) > 0$ のとき

$$x = \cos \theta + 2 \cos(2^n a) \cos\left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta\right)$$

$$x = \cos \theta - (-2 \cos(2^n a)) \cos\left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta\right)$$

$$y = \sin \theta - 2 \cos(2^n a) \sin\left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta\right)$$

$$y = \sin \theta + (-2 \cos(2^n a)) \sin\left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta\right)$$

である。これは、ハイポトロコイドの方程

である。ここで、この座標を角度 t だけ回転させたときの x 座標は、

式において、 $p = \frac{3 \cdot 2^n}{2^n + 1}$, $q = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n + 1}$,

$$x \cos t - y \sin t = \cos \theta \cos t - (-2 \cos(2^n a)) \cos\left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta\right) \cos t$$

$$- \sin \theta \sin t - (-2 \cos(2^n a)) \sin\left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta\right) \sin t$$

$$= \cos(\theta + t) + (-2 \cos(2^n a)) \cos\left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta - t + 180^\circ\right)$$

ここで、 $t = \frac{2^{n+1} - 1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ$ とすると、

$$\begin{aligned} \frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta - \frac{2^{n+1} - 1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ + 180^\circ &= \frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta + \frac{2^n + 1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ \\ &= \frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta + \frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \cdot \frac{2^n + 1}{3 \cdot 2^n} \cdot \frac{1 - 2^{n+1}}{-2^n - 1} \cdot 180^\circ \\ &= \frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \left(\theta + \frac{2^{n+1} - 1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ \right) \end{aligned}$$

と変形できるので、もとの座標を $\frac{2^{n+1}-1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ$ だけ回転させたときの x 座標は

$$\cos\left(\theta + \frac{2^{n+1}-1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ\right) + (-2 \cos(2^n a)) \cos\left(\frac{-2^n-1}{1-2^{n+1}} \left(\theta + \frac{2^{n+1}-1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ\right)\right)$$

同様に計算することで、もとの座標を $\frac{2^{n+1}-1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ$ だけ回転させたときの y 座標は

$$\sin\left(\theta + \frac{2^{n+1}-1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ\right) - (-2 \cos(2^n a)) \sin\left(\frac{-2^n-1}{1-2^{n+1}} \left(\theta + \frac{2^{n+1}-1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ\right)\right)$$

となる。

ここで、 $\theta + \frac{2^{n+1}-1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ = u$ とおくと、
座標は

$$x = \cos u + (-2 \cos(2^n a)) \cos\left(\frac{-2^n-1}{1-2^{n+1}} u\right)$$

$$y = \sin u - (-2 \cos(2^n a)) \sin\left(\frac{-2^n-1}{1-2^{n+1}} u\right)$$

となり、これはトロコイドの式において

$$p = \frac{3 \cdot 2^n}{2^n + 1}, \quad q = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n + 1},$$

$$r = -2 \cos(2^n a)$$

としたときであるから、この軌跡はトロコイドを描くことがわかる。葉の数は (I) と同様である。

以上より、垂心 H_n 軌跡は葉の数 2^n のハイポトロコイドを描くことが示された。

(Q. E. D.)

ただちに、以下が示される。

系 1-1

定理 1 において、点 A_0 を動かしたときの

$\triangle A_n B_n C_n$ の重心 G_n の軌跡は葉数 2^n の

ハイポトロコイドである。

証明

オイラー線の関係から、重心は外心と垂心を $1:2$ に内分する点である。いま、外心 O は固定されている。ゆえに、重心 G_n の軌

跡は垂心 H_n の軌跡を $\frac{1}{3}$ に縮小した図形と

なる。よって、重心 G_n の軌跡は葉数 2^n の

ハイポトロコイドである。(Q. E. D.)

3-2. 幾何的な考察

計算によって、垂心の軌跡がハイポトロコイドとなることが示されたが、幾何的にはどのような構造になっているのかを調べた。

定理 2-1

定理 1 において、辺 $B_n C_n$ と線分 $A_n H_n$ の長さは A_0 の位置によらずそれぞれ一定である。

(証明)

辺 $B_n C_n$ の長さが一定であることを数学的帰納法で示す。

$n=0$ のとき、辺 $B_0 C_0$ は一定である。

$n=k$ のとき、辺 $B_k C_k$ が一定の長さであると仮定し、辺 $B_{k+1} C_{k+1}$ の長さが一定であることを示す。次図において、

$\angle C_k A_k B_k = a$ とおくと、 a は定数である。また、 H_k から辺 $C_k A_k$, $A_k B_k$ へ降ろした垂線の足をそれぞれ P , Q とする。

$$\begin{aligned} \angle B_{k+1} A_{k+1} A_k &= \angle B_{k+1} B_k A_k \\ &= 90^\circ - \angle P A_k B_k \\ &= 90^\circ - a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle A_k A_{k+1} C_{k+1} &= \angle A_k C_k C_{k+1} \\ &= 90^\circ - \angle Q A_k C_k \\ &= 90^\circ - a \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} \angle B_{k+1} A_{k+1} C_{k+1} &= \angle B_{k+1} A_{k+1} A_k + \angle A_k A_{k+1} C_{k+1} \\ &= 180^\circ - 2a \end{aligned}$$

となるので、辺 $B_{k+1} C_{k+1}$ の長さは一定である。 $\triangle A_k B_k C_k$ が鈍角三角形であるときも同様である。よって示された。

ここで、円の中心を O 、辺 $B_n C_n$ の中点を M とすると、辺 $B_n C_n$ の長さは一定なので、線分 OM の長さも一定である。いま、一般に、 $A_n H_n = 2OM$ が成り立つので、線分 $A_n H_n$ の長さも一定であることがわかる。

(Q. E. D.)

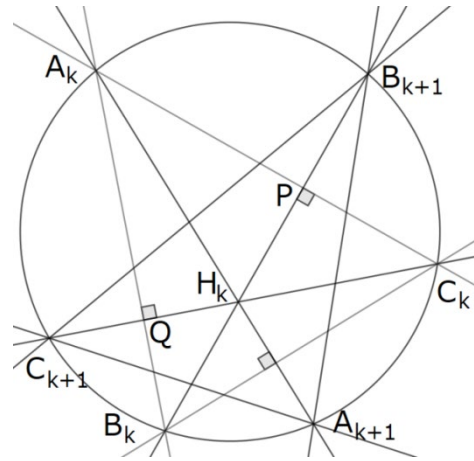


図 9

定理 2-2

定理 1 において、点 A_0 が円周上を回転するとき、点 A_n が θ だけ回転したとき、辺

$B_n C_n$ は逆向きに $\frac{-1+(-2)^n}{1-(-2)^{n+1}} \theta$ 回転する。

(証明)

定理 1 の証明において、

$$\alpha_n = \frac{1-(-2)^{n+1}}{3} \alpha_0 + 180^\circ(n-1)$$

$$\beta_n = \frac{1-(-2)^n}{3} \alpha_0 - (-2)^n a$$

$$+ 180^\circ \{n-3+(-2)^{n-1}\}$$

$$\gamma_n = \frac{1-(-2)^n}{3} \alpha_0 + (-2)^n a$$

$$+ 180^\circ \{n-3+(-2)^{n-1}\}$$

である。ここで、点 A_n 、辺 $B_n C_n$ の回転の方向はそれぞれ α_n 、 β_n の式における α_0 の係数の符号で決まる。

$$n \text{ が奇数のとき、} \frac{1-(-2)^{n+1}}{3} < 0$$

$\frac{1-(-2)^n}{3} > 0$. また、 n が偶数のとき、
 $\frac{1-(-2)^{n+1}}{3} > 0$, $\frac{1-(-2)^n}{3} < 0$ なので、 α_0
 の係数の符号は異なる。ゆえに、点 A_n と辺
 B_nC_n の回転の方向は逆である。よって、点
 A_0 が θ 回転すると、点 A_n が $\frac{1-(-2)^{n+1}}{3}\theta$
 回転し、辺 B_nC_n は逆向きに $-\frac{1-(-2)^n}{3}\theta$
 だけ回転するので、点 A_n が θ 回転するとき、
 辺 B_nC_n は逆向きに $\frac{-1+(-2)^n}{1-(-2)^{n+1}}\theta$ 回転する。
 (Q. E. D.)

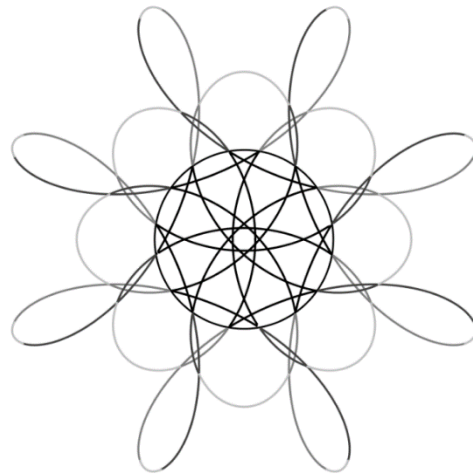


図10 $n=3$ のとき

この図形は以下のように葉数4のハイポトロコイドが4つ重なっている。

4. 今後の課題

今回は円に内接する三角形について、垂線を下す操作において、垂心の軌跡を求めたが、ほかにもさまざまな操作が考えられる。

予想1

定理1において、 $\triangle A_n B_n C_n$ の内心の軌跡を I_n^* , 傍心 $I_{A_n}, I_{B_n}, I_{C_n}$ の軌跡をそれぞれ

$I_{A_n}^*, I_{B_n}^*, I_{C_n}^*$ とすると、

$$I_n^* \cup I_{A_n}^* \cup I_{B_n}^* \cup I_{C_n}^*$$

は葉数 2^{n-1} のハイポトロコイドが4つ重なった図形である。

実際に描くと以下のようなになる。

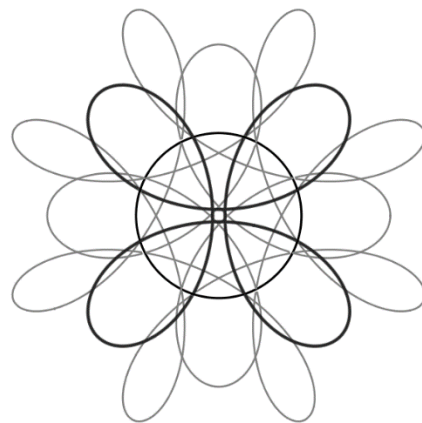


図11 ハイポトロコイド①

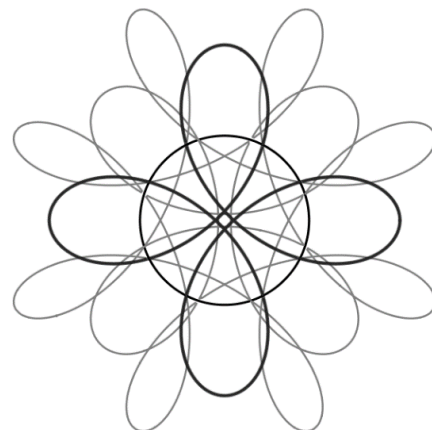


図12 ハイポトロコイド②

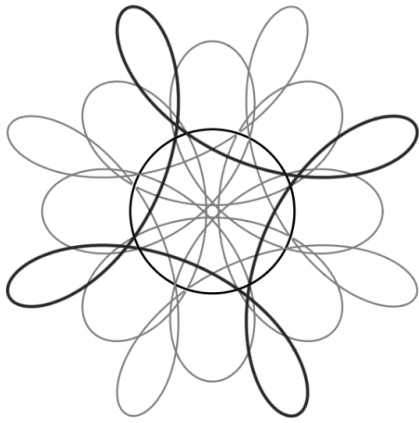


図 13 ハイポトロコイド③

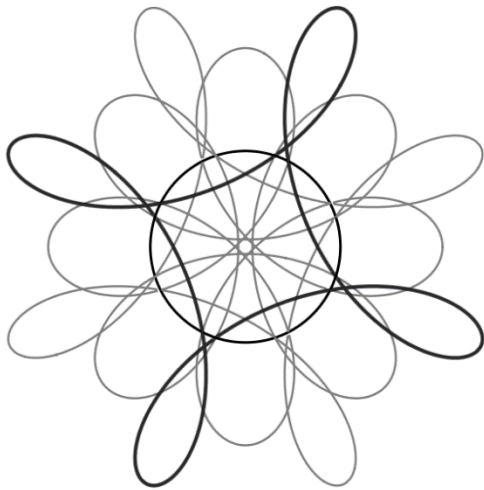


図 14 ハイポトロコイド④

予想 2

定理 1 において、 A_n, H_n をそれぞれ $A_n^{(0)}, H_n^{(0)}$ とかくことにする。辺 B_0C_0 に平行な始線 OX を引く。 $m \geq 1$ について、以下の 2 つの操作を加えることを考える。

操作 σ_+ : 点 X を通り直線 $A_0^{(0)}A_m^{(k)}$ に平行な

直線と円との交点を $A_m^{(k+1)}$ とする。

そして、三角形 $A_m^{(k+1)}B_mC_m$ の垂

心を $H_m^{(k+1)}$ とする。

操作 σ_- : 点 A_0 を通り直線 $A_0A_m^{(k)}$ に平行な

直線と円との交点を $A_m^{(k-1)}$ とする。

そして三角形 $A_m^{(k-1)}B_mC_m$ の垂心

を $H_m^{(k-1)}$ とする。

このとき、2 以上のすべて整数 i について、点 A_0 を円周上で動かしたときの点 $H_q^{(p)}$ の軌跡が葉数 i のハイポトロコイドとなるような整数 p, q が存在する。

例えば、垂心 $H_2^{(1)}, H_2^{(-1)}$ の軌跡はそれぞれ次のようになる。

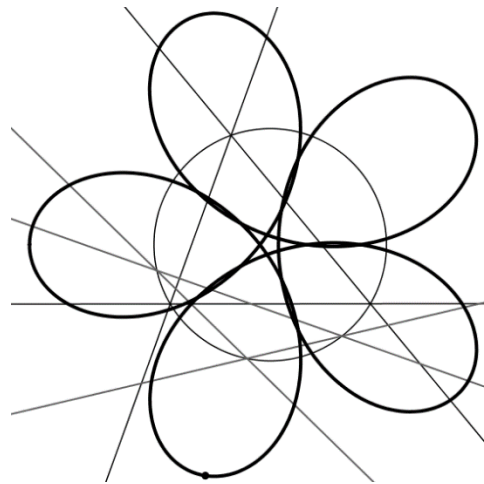


図 15 点 $H_2^{(1)}$ の軌跡

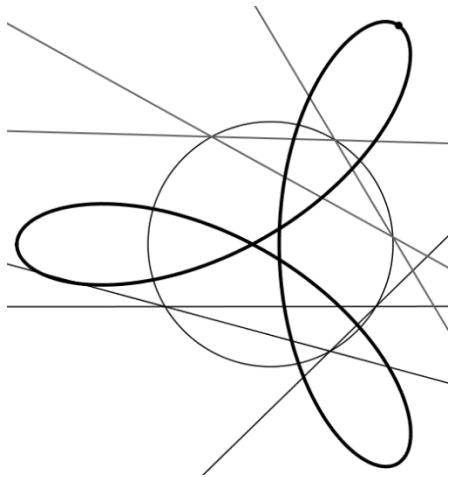


図 16 点 $H_2^{(-1)}$ の軌跡

このように、点 $H_2^{(1)}, H_2^{(-1)}$ の軌跡はそれぞれ 5 枚、3 枚であり、これは点 $H_2^{(0)}$ の軌跡の葉数 4 からそれぞれ +1, -1 したものであると考えられる。よって、操作 σ_+ で軌跡の葉数が 1 増え、操作 σ_- で軌跡の葉数が 1 減ると予想できるが、これは一般には成り立たない。

例えば、 $H_3^{(-2)}$ の軌跡の葉数は、予想からは 4 であるが、実際は 2 (楕円) である。

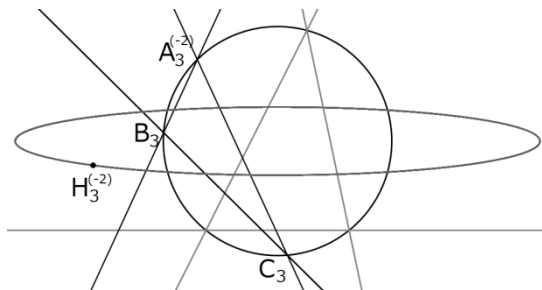


図 17

ほかにも、さまざまな操作が考えられる。

課題 1

点 O を中心とする円に内接する $\triangle D_0E_0F_0$ について、点 D_0 を通る中線と円の交点のうち、 D_0 でない方の点を D_1 、点 E_0 を通る中線と円の交点のうち、 E_0 でない方の点を E_1 、点 F_0 を通る中線と円の交点のうち、 F_0 でない方の点を F_1 とする。この操作で得られた $\triangle D_1E_1F_1$ の重心を G_1 とする。そ

して、 $\triangle D_1E_1F_1$ においても同様の操作を繰り返すということを無限に繰り返すと、各三角形の重心 G_1, G_2, G_3, \dots が得られる。

辺 E_0F_0 を固定し、点 D_0 を円周上で動かしたとき重心 G_n (n は正の整数) の軌跡はどうか。

実際に図を描くと以下のようなになる。

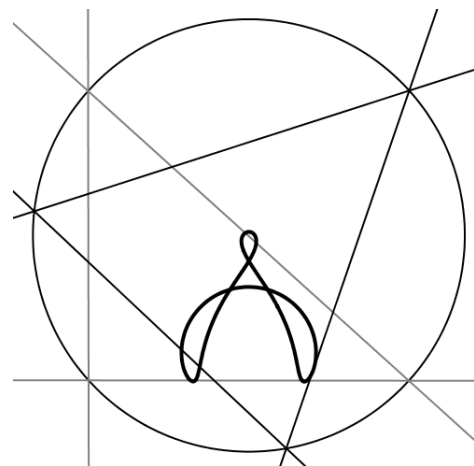


図 18 点 G_1 の軌跡

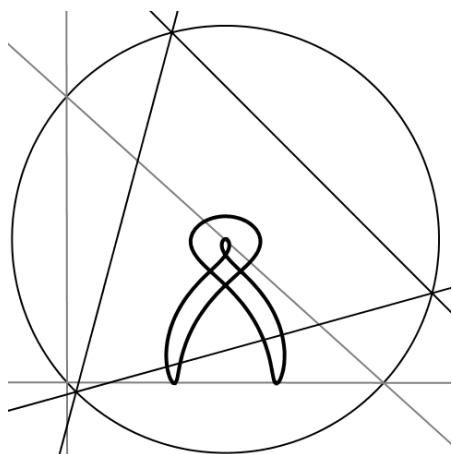


図 19 点 G_2 の軌跡

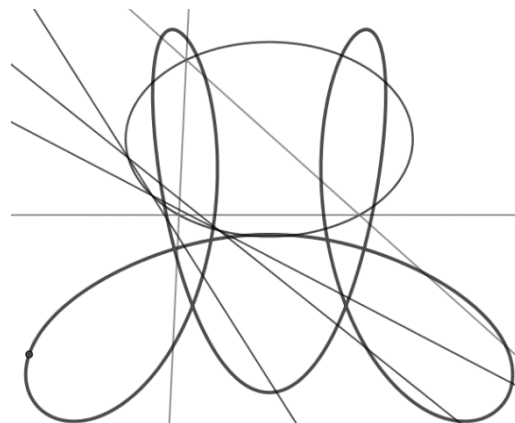


図 21 円を楕円に変えたときの H_2 の軌跡

また、操作を二等分線にし、内心の軌跡をとることも考えられる。

また、放物線 $y = x^2$ に変えると以下のようになる。

課題 2

定理 1 やその他の操作について、円を他の二次曲線に代えて操作を行うと軌跡はどうなるか。

例えば、定理 1 において、円を楕円 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ に変えると、軌跡は以下のようになる。

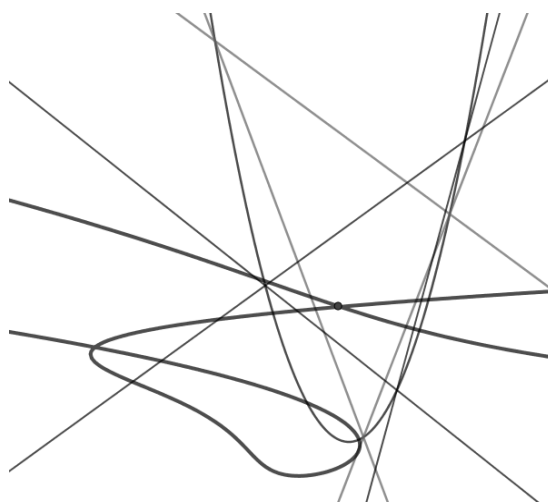


図 23 円を放物線に変えたときの H_1 の軌跡

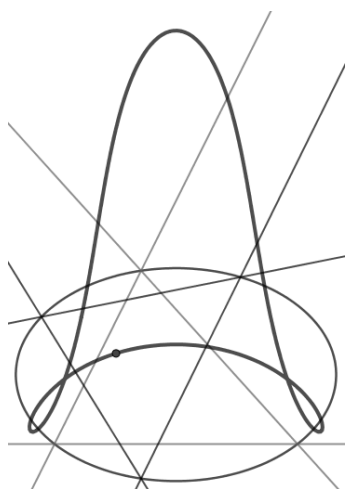


図 20 円を楕円に変えたときの H_1 の軌跡

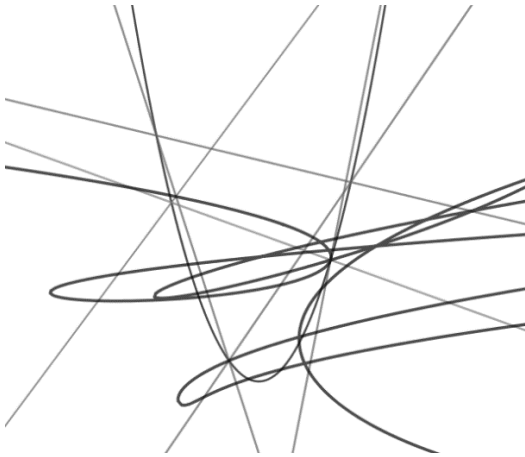


図 24 円を放物線に変えたときの
 H_2 の軌跡

特に、放物線に変えた場合の軌跡はとても複雑であることがわかる。

このように、「外接する曲線」、「操作」、「どの点の軌跡をとるか」という条件をそれぞれ変えていくことでいくつものパターンが考えられる。今後は特に上で挙げたような操作について考え、そこから五心のつながりなども見出していきたい。

5. 参考文献

- [1] webサイト「ハイポトロコイド (hypotrochoid)」
<http://www.phoenix-c.or.jp/~tokioka/hypotrochoid/hypotrochoid.html>

6. 謝辞

今回の研究にあたり、ご指導下さいました顧問の川口先生ありがとうございました。