

カプレカー変換に関する考察(4)

6年C組 市田 美玲
指導教員 川口 慎二

1. 要約

サイエンス研究会数学班 6年生は3年間カプレカー変換について学習し、今年度はSS課題研究という授業の取り組みとして研究を継続している。今回は、これまでの研究結果をまとめたので紹介する。

キーワード カプレカー変換、カプレカー定数、ソート、収束、循環

2. 研究の背景と目的

カプレカー変換とは自然数に対して、各桁の数字を並びかえて作ることのできる最大の数から最小の数を引く操作のことである。この変換を続けると1つの値に収束するか、複数の値で循環することが知られている。しかし、どのような場合に収束するのかあるいは循環が表れるのか、どのような値を経由して収束、循環にたどりつくのか、カプレカー定数はどのような値なのかについては明らかになっていない。そこで、今回はこれまで研究してきた2, 3, 4, 5, 6, 7桁における、収束、循環の過程とカプレカー定数についての考察をまとめた。なお、各桁におけるカプレカー変換や、カプレカー定数についての詳しい考察は、参考文献[1], [2], [3]にまとめている。

3. 研究内容

3-1. 基本事項

自然数において、各桁の数字を並びかえて作ることのできる最大の数から最小の数を引く操作を**カプレカー変換**という。以降、これを単に「変換」とよぶことにする。

ただし、ぞろ目は最初の変換で0になる

ので、除いて考える。また、 n 桁の変換を考える際に変換により1桁減ってしまったとしても、 n 桁とみなして考える。

また、各桁の数字を並びかえて、最大の数にする操作をソートといい、1回の変換によって、値が変化しない自然数のことを**カプレカー定数**という。

3-2. 2~7桁のカプレカー変換

■2桁のカプレカー変換

すべての2桁の自然数は変換を繰り返すと、 $81 \rightarrow 63 \rightarrow 27 \rightarrow 45 \rightarrow 9 \rightarrow \dots$ と循環する。この循環に入るまでに最大2回の変換が必要である。

また、循環の過程は図1の樹形図のように表される。ある自然数を1回変換すると、樹形図中のいずれかの数になる。さらに、その数を変換すると線につながれている右側の数になる。例えば、「 $81-63$ 」は81を1回変換すると、63に変換されることを表している。

なお、2桁のカプレカー定数は存在しない。

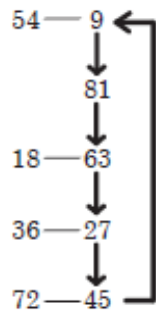


図1 2桁の数の変換

■3桁のカプレカー変換

すべての3桁の自然数は変換を繰り返すと、495に収束し、最大6回の変換が必要である。収束の過程は次のように表される。

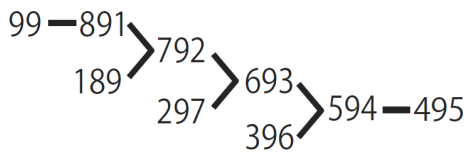


図2 3桁の数の変換

なお、3桁のカプレカー定数は495である。495は変換を行っても495のまま変わらないので、数の右側に線がない表記になっている。

■4桁のカプレカー変換

すべての4桁の自然数は変換を繰り返すと、6174に収束し、最大7回の変換が必要である。なお、4桁のカプレカー定数は6174である。収束の過程は、図3ように表される。

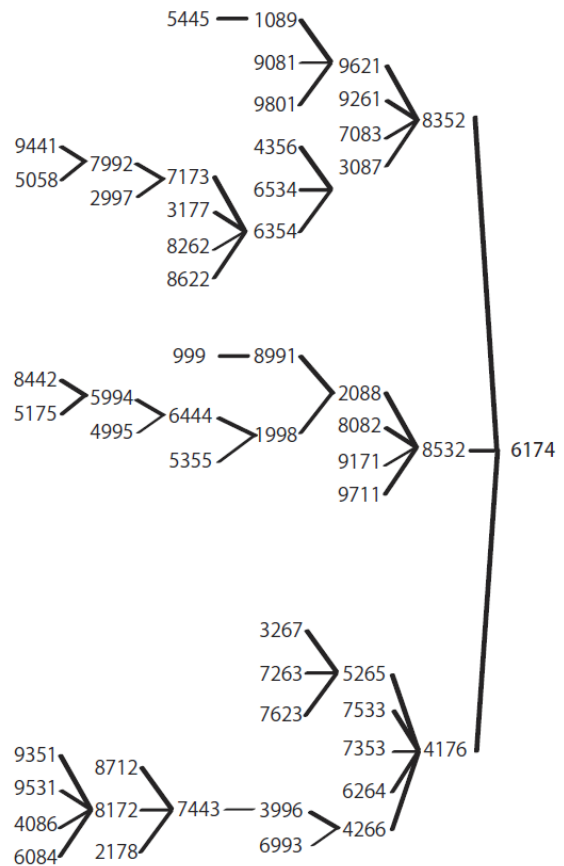


図3 4桁の数の変換

■5桁のカプレカー変換

すべての5桁の自然数は変換を繰り返すと、次の3パターンのいずれかで循環する。

- ①74943→62964→71973→83952→…
- ②75933→63954→61974→82962→…
- ③59994→53955→…

①, ②は最大で6回の変換を行うと循環に入り、③は最大で2回の変換を行うと循環に入る。なお、5桁のカプレカー定数は存在しない。循環の過程は、図4のように表される。

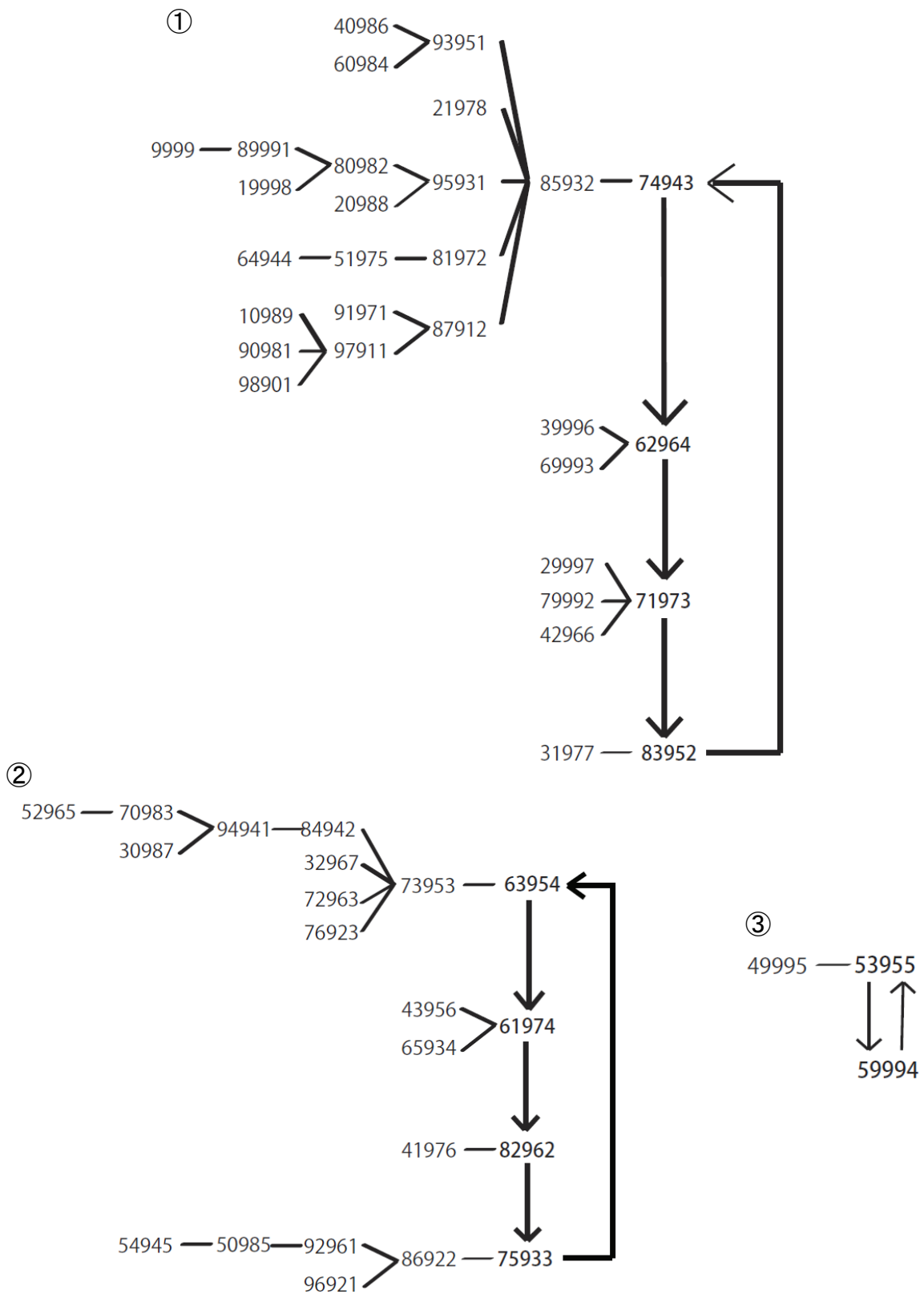


図4 5桁の数の変換

■ 6桁のカプレカー変換

6桁の自然数は変換を繰り返すと、次の3パターンいずれかで循環または収束する。

$$\begin{aligned} \textcircled{1} & 420876 \rightarrow 851742 \rightarrow 750843 \rightarrow 840852 \\ & \rightarrow 860832 \rightarrow 862632 \rightarrow 642654 \\ & \rightarrow 420876 \dots \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} 631764$$

$$\textcircled{3} 549945$$

さらに①は最大で13回の変換で循環に入り、②は最大で4回、③は最大で1回の変換で収束する。なお、6桁のカプレカー定数は、631764と549945である。循環または収束の過程は、図5のように表される。

■ 7桁のカプレカー変換

7桁の自然数は変換を繰り返すと、

$$\begin{aligned} 8649432 & \rightarrow 7519743 \rightarrow 8429652 \\ & \rightarrow 7619773 \rightarrow 8439552 \rightarrow 750843 \\ & \rightarrow 9529641 \rightarrow 8719722 \end{aligned}$$

と循環し、最大で13回の変換が必要である。なお、7桁のカプレカー定数は存在しない。循環の過程は、図6のように表される。

3—3. カプレカー定数について

次のパターンで表される数はカプレカー定数である。

$$\textcircled{1} 55 \dots 549 \dots 94 \dots 45$$

$$\textcircled{2} 63 \dots 3176 \dots 64$$

9...9のように…の両端が同じ数のとき、…の間にある数はすべて両端の数(ここでは9)であることを表わしている。

①について、4, 5, 9は同じ個数であり、 $3k$ 桁のとき成立する(これ以降、 k は自然数である)。

②について、3...3と6...6の3, 6は

同じ個数であり、 $2k+2$ 桁のとき成立する。

この法則を用いると、7桁より大きな桁数のカプレカー定数を予想することができる。たとえば、8桁のカプレカー定数は

$$76664331 - 13346667 = 63317664$$

より、63317664である。

$3k$ 桁、 $2k+2$ 桁のカプレカー定数が存在するので、 $3k$ 桁、 $2k+2$ 桁ではこれらのカプレカー定数に収束する数が存在する。

この詳細については、参考文献[3]を参照されたい。また、参考文献[4]によると、31桁までの整数において、カプレカー定数は14パターンに分類された257個存在することがわかっている。各パターンには、ただ1つの種になるカプレカー定数があり、それに特定の桁だけ数字を加えることによって、他のカプレカー定数が生成される。

3—4. 循環と収束について

変換を続けると、2桁と5桁と7桁の自然数は循環、3桁と4桁の自然数は収束、6桁の自然数は循環も収束もあり得るということがわかった。

カプレカー変換は、何回操作を行っても桁数が変わらないので、発散することはない、循環または収束のどちらかに辿り着く。さらに、収束するということは、変換を繰り返してカプレカー定数に変換されると、何回変換を行っても値が変わらないということである。

したがって、収束が起こるためには、その桁数でカプレカー定数が存在する必要がある。また、桁数が大きくなるにつれ、その桁数がとり得る変換後の値も増える。カプレカー定数が存在するとしても、その桁数のすべての数がカプレカー定数に収束す

るとは限らない。たとえば、6桁では、変換後にとり得る値が219通りあり、そのすべての値が2つのカプレカー定数に辿り着くわけではない。

よって、桁数が大きくなるにつれて、循環も収束もあり得る可能性が高いと予想できる。また、桁数が大きくなるにつれて、2桁や7桁のようにすべての数が1種類の循環に入るわけではなく、5桁のように複数の循環のパターンが存在する可能性も高い。

参考文献[4]によると、2桁から31桁において、循環や収束のパターンが1つしかない、つまり、その桁のすべての数が同じ結果に辿り着くのは、2, 3, 4, 7桁のみである。8桁以上は、複数の循環のパターンをもち、カプレカー定数も1つ以上存在することがわかっている。

4. 今後の課題

今回、2, 3, 4, 5, 6, 7桁のカプレカー変換とカプレカー定数についての考察についてまとめた。しかし、以前から考察したいと考えていた収束、循環の過程の値の規則性については、手掛かりが見つからず、考察できなかった。また、桁数が大きくなるにつれて、変換を繰り返した結果や過程の値が複雑になる。今回は、SS課題研究の授業時間を7桁の樹形図を完成させるのに費やしたため、十分な考察ができなかったということも反省点である。

5. 参考文献

[1] 「カプレカー変換に関する考察」, 市田美玲, 2013年度奈良女子大学附属中等教育学校サイエンス研究会生徒研究論文集

[2] 「カプレカー変換に関する考察(2)」, 市田美玲, 2014年度奈良女子大学附属中等教育学校サイエンス研究会生徒研究論文集

[3] 「カプレカー変換に関する考察(3)」, 市田美玲, 2015年度奈良女子大学附属中等教育学校サイエンス研究会生徒研究論文集

[4] 「高次桁のカプレカ変換1」, 平田郁美, <http://www.kyoai.ac.jp/college/ronshu/no-05/hirata.pdf>

6. 謝辞

今回の研究にあたりご指導くださった顧問の川口先生、ありがとうございます。長い期間、研究が進まないときも見守ってくださいました。また、研究を行ってきた6年間を通して、卒業されたサイエンス研究会の先輩、後輩の方々にもご協力いただきました。ありがとうございます。

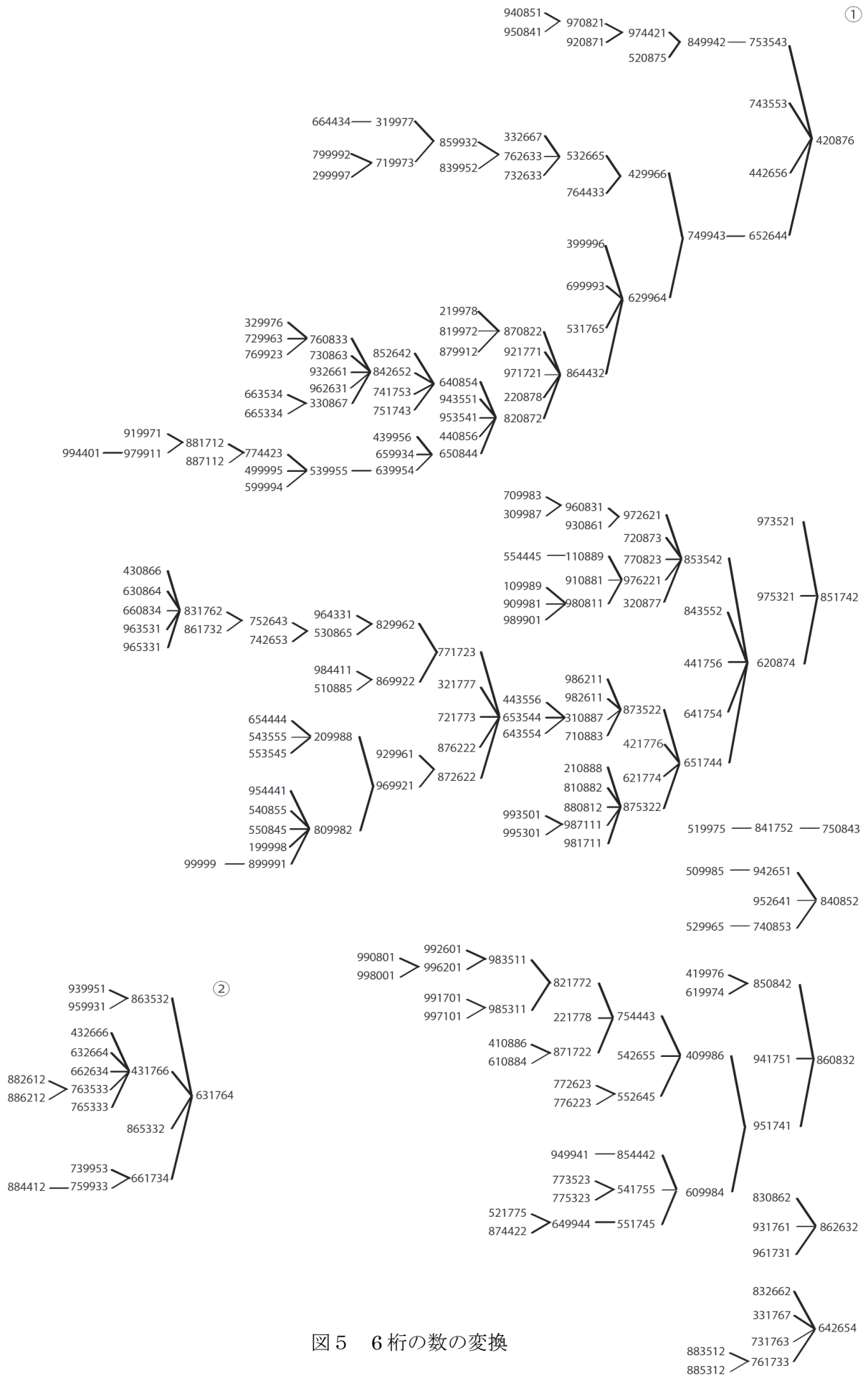


図5 6桁の数の変換

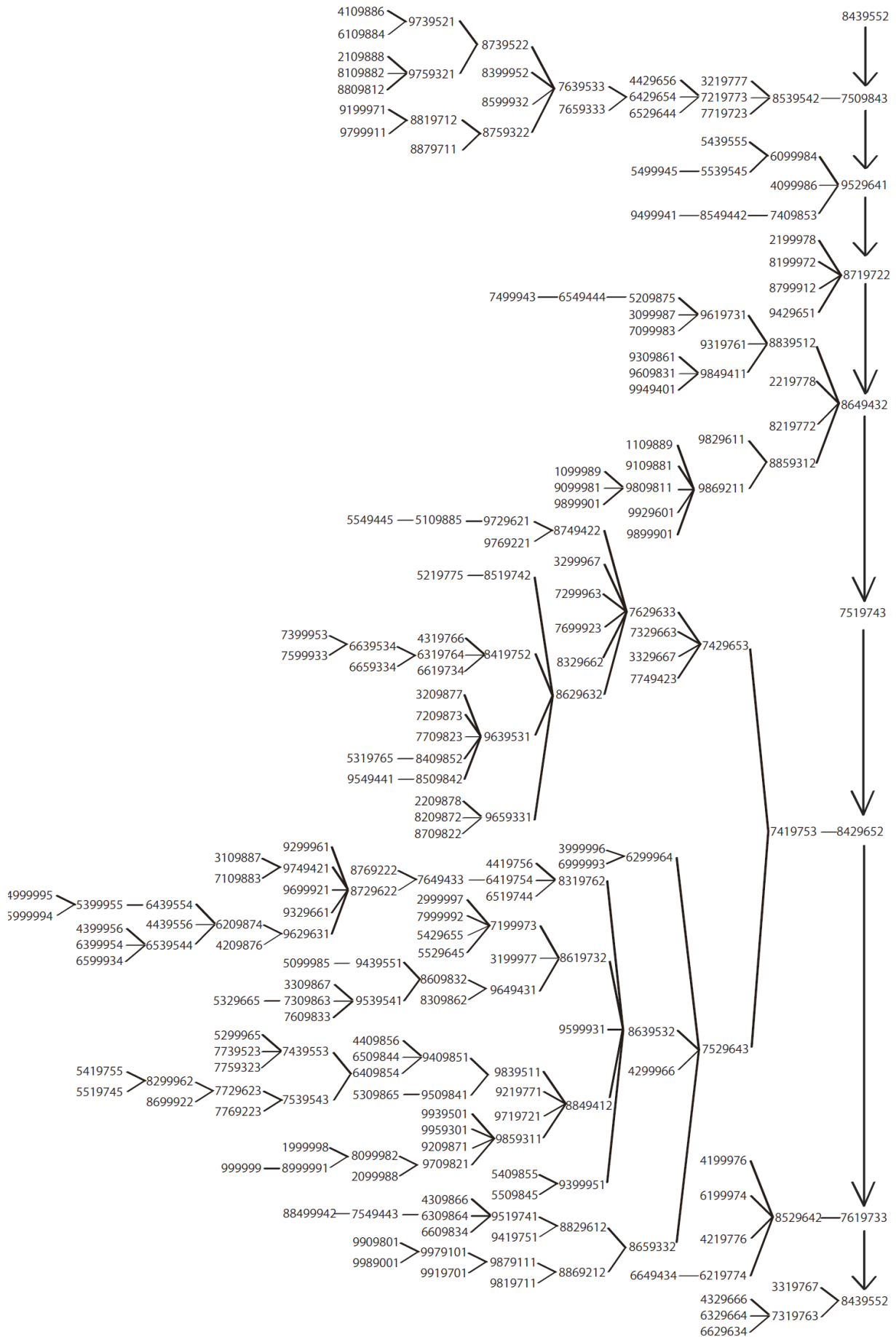


図6 7桁の数の変換