A New Rose：The First Simple Symmetric 11-Venn Diagram

6年D組　多賀　　眞
指導教員　川口 慎二

１．要約

私は多数の集合から成るVenn図について研究している。今回はKhalegh Mamakani と Frank Ruskey による”A New Rose：The First Simple Symmetric 11-Venn Diagram ([1])”をもとに11個の集合のVenn図について考察した。

キーワード　　n-Venn図、クロスカット、クラスタ、シーケンス

２．研究の背景と目的

私は4年生のときから多数の集合のVenn図の一般化に関して研究し、これまでの研究で、凸型の曲線で構成されたVenn図は5個の集合のものまで考案することができた。しかし6個以上の集合の場合、図が複雑になりVenn図を自作することができなかったので、今回は先行研究である”A New Rose：The First Simple Symmetric 11-Venn Diagram ([1])”を講読し考察することにした。

３．研究内容

３－１．基本事項

■n-Venn図・回転対称n-Venn図

平面上にn個の閉じた曲線を集めたものを**n-Venn図**とよぶ。このうち、各交点で2本の曲線のみが交差していて、また$\frac{2\pi}{n}$回転させたときにもとのVenn図に一致するVenn図を**回転対称n-Venn図**とよぶ。

回転対称n-Venn 図はnが素数でないと描けないことは1963 年にDavid W. Hendersonの論文 ”Venn Diagrams for More than Four Classesenn Diagrams for More than Four Classes ([2])”で証明されている。

回転対称n-Venn図に対して、n個の曲線を最も外側の領域に接する部分に関して時計回りに$C_1, C_2, \cdots, C_n$と名付ける。

３－２．クロスカット

３－２－１．定義

■クロスカット

ある曲線において、反復することなくほかの曲線と連続的に交差する曲線の切片のことを**クロスカット**と定義する。(例えば回転対称7-Venn図では図１の黄色で塗られた曲線がクロスカットである。)

図１

３－２－２．補題

補題１

$n>3$ の場合、回転対称 n-Venn 図は１つの曲線あたり最大1つのクロスカットをもつ。

（証明）

Venn図を構成する任意の曲線において、クロスカットの始点を最も外側の領域に接する部分、終点は最も内側の領域に接する部分と考える。このとき、任意の曲線は最も外側の領域と最も内側の領域に1回ずつ触れるので、Venn図の曲線は3つ以上のクロスカットをもつことはできない。

そこで n-Venn図のある曲線 C に2つのクロスカットがあると仮定する。曲線 C の2本のクロスカットは最も外側の領域に接する部分から始まり、最も内側の領域に接する部分で終わるので曲線 C はほかの曲線と $2(n-1)$ 個の交点をもつ。このVenn図には n 個の曲線があるので、Venn図がもつ交点は全部で $n(n-1)$ 個の交点をもつ。…①

一方で、Venn図が回転対称ならば、このVenn図は全部で、2^n-2 個…②の交点をもつはずである。

①と②の式より、

$$n(n-1)=2^n-2$$

を解くと、$n=1, 2, 3$ については成立するが、$n\geqq 4$ では成り立たない。ゆえに、$n>3$ のとき、n-Venn図が2つのクロスカットをもつという仮定は間違っていた。

よって題意は示された。　(Q. E. D.)

３－３．クラスタ

３－３－１．定義

■群

Venn図の曲線の切片によって囲まれた領域の集まりのことを**群**という。このとき、群の大きさは、それに含まれる領域の数で表す。

■クラスタ

最も外側の領域と最も内側の領域を除いて回転対称 n-Venn図が大きさ $\dfrac{2^{n-2}}{n}$ の n 個の群に分けられる。このとき、この群を「**クラスタ**」とよぶことにする。クラスタは回転の基本領域になる。（図２の色付けした部分は7-Venn図のクラスタを示し、図３で、クラスタを再描写している。図３でクラスタはクロスカット対称になっていることがわかる。）

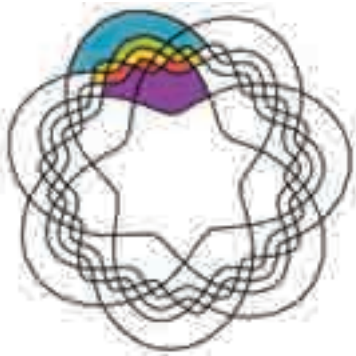

図２

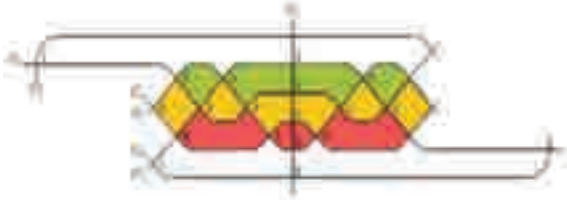

図３

また、曲線 C_k のクロスカットをもつクラスタをクラスタ S_k とよぶことにする。

３－４．シーケンス

３－４－１．定義

$L_{i,k}$ をクラスタ S_k において、曲線 C_i を時計回りにたどっていったときに遭遇する曲線のリストとする。クラスタはクロスカットで対称になるので、$n \geqq 2$ においてリストも対称になっている。

表１　7-Venn図のリスト

$L_{1,1} = [C_2, C_3, C_1, C_6, C_5, C_7]$
$L_{2,1} = [C_3, C_1, C_5]$
$L_{3,1} = [C_2, C_4, C_6, C_5, C_1, C_3, C_6, C_4, C_2]$
$L_{4,1} = [C_3, C_5, C_7, C_1, C_6, C_4, C_2]$
$L_{5,1} = [C_4, C_6, C_2, C_6, C_1, C_7, C_4, C_6, C_3, C_6, C_5]$
$L_{6,1} = [C_5, C_4, C_3, C_6, C_1, C_2, C_4, C_5, C_7]$
$L_{7,1} = [C_6, C_3, C_4]$

■シーケンス

最も内側の領域のある点Xから、最も外側の領域に向かって直線Lをひき、Xを中心に直線を時計回りに回転させたときに交差するVenn図の交点の番号を順に並べたものを**シーケンス**という。ただし、交点の番号は以下の法則に従ってつける。**シーケンスの大きさ**とは、シーケンスに含まれる要素の個数を表す。

＜交点番号の法則＞
- 最も外側の領域に接する交点→1
- 外側から2番目の領域に接する交点→2
- 外側から $n-1$ 番目の領域（内側から2番目）に接する交点→ $n-1$

回転対称のVenn図は全体のシーケンスのうち、$\dfrac{2^{n-2}}{n}$ の要素だけで、Venn図全体を表すことができる。最初の大きさ $\dfrac{2^{n-2}}{n}$ のシーケンスを**基本シーケンス**とよぶ。

例えば、回転対称7-Venn図において、$\dfrac{2^{n-2}}{n} = 18$ より、基本シーケンスの大きさは18となる。図２の回転対称7-Venn図の基本シーケンスは、以下のようになる。

$$\underbrace{1,3,2,5,4}_{\rho},\underbrace{3,2,3,4}_{\alpha},\underbrace{6,5,4,3,2}_{\delta},\underbrace{5,4,3,4}_{\alpha^{\gamma+}}$$

３－５．クロスカット対称の定理

<u>定理１</u>

回転対称n-Venn図において、基本シーケンスがシーケンス「ρ，α，δ，$\alpha^{\gamma+}$」で表せる場合のみ、クロスカット対称であるといえる。ただし、ρ，α，δ，$\alpha^{\gamma+}$は以下のように定義する。

- ρ（クラスタ左境界の交点）を
  $1, 3, 2, 5, 4, \cdots, n-2, n-3$
- δ（クロスカット上の交点）を
  $n-1, n-2, \cdots, 3, 2$
- α（ρより右側でクロスカットまでの交点）と$\alpha^{\gamma+}$（クロスカットより右側でクラスタの右境界より左側）を、$\alpha^{\gamma+}$はαを逆転させて1足して得られるような大きさ $\dfrac{\{2^{n-1}-1\}-(n-1)^2}{n}$ のシーケンスとして定義する。

このとき、$\alpha^{\gamma+}[i] = \alpha[|\alpha| - i + 1]$ とかける。

（証明）

Vを、クロスカットを有する回転対称Venn図であるとし、曲線C_1の切片がクロスカットを形成するVのクラスタを考える。クロスカット対称より、$L_{n,1}=[C_{n-1}, 1, C_{n-1}]$であるから、$C_n$は$C_1$との交点のすぐ下のクラスタの右端のある点$v$で$C_{n-1}$と交差しなければいけない。Vが回転対称であるから、点vを$\frac{2\pi}{n}$回転させることで、左境界上の点sを示すことができる。点sでは、C_{n-1}とC_{n-2}が交差する。

同様に考えて、クロスカット対称より、$L_{n-1,1}=[C_n, C_{n-2}, \cdots, C_{n-2}, C_n]$なので、$C_{n-1}$はクラスタの右境界で$C_{n-2}$と交差し（点$t$）、$\frac{2\pi}{n}$回転させることで、左境界上の点$w$を示す。点$w$では、$C_{n-2}$と$C_{n-3}$が交差する。

これを続けていくと、クラスタの左右の境界線は図４に示すようなジグザグの境界をもつことがわかる。

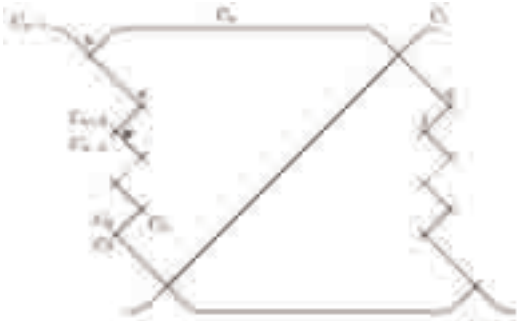

図４

ここで、左右の境界線に注目する。Venn図の最も内側の領域のある点Xから外側に向かって2本の直線M, Nを引き、Mを左境界からわずかに左、Nを右境界からわずかに右からクロスカット（図４ではC_1）に向かって回転させていく。回転開始直後は、

$$\mathrm{M}=[C_{n-1}, C_n, C_{n-3}, C_{n-2}, \cdots, C_2, C_3, C_1]$$
$$\mathrm{N}=[C_1, C_{n-1}, C_n, C_{n-3}, \cdots, C_5, C_2, C_3]$$

となり、$n-2$個の交点と交差した直後は、

$$\mathrm{M}=[C_n, C_{n-2}, C_{n-1}, C_{n-4}, \cdots, C_4, C_2, C_1]$$
$$\mathrm{N}=[C_1, C_n, C_{n-2}, C_{n-1}, \cdots, C_3, C_4, C_2]$$

となる。Vが回転対称であるので、Nは必ずMの要素を1つ右にずらしたものである。つまり、$\mathrm{M}(i)$と$\mathrm{M}(i+1)$との間で交差が起こるとき、つぎの交差は$\mathrm{N}(i+1)$と$\mathrm{N}(i+2)$との間で起こる。よって、$\mathrm{M}(i)$と$\mathrm{M}(i+1)$の交点は$\mathrm{N}(i+1)$と$\mathrm{N}(i+2)$の交点と対応しているといえる。

これより、$\alpha^{\gamma+}$はαの要素を逆転させて、1を足して得られるシーケンスになるといえる。また、クラスタの左境界から、$\rho=1, 3, 2, 5, 4, \cdots, n-2, n-3$とわかる。$\delta$について、はクロスカット上の交点だから明らかに$\delta=n-1, n-2, \cdots, 3, 2$　となる。これより、基本シーケンスは

$$[1, 3, 2, 5, 4, \cdots, n-2, n-3, \alpha, n-1, n-2, \cdots, 3, 2, \alpha^{\gamma+}]$$

となることが証明できた。

最後に逆を証明する。条件を満たすρ，α，δ，$\alpha^{\gamma+}$を与えると、基本シーケンスは、

$$[1, 3, 2, 5, 4, \cdots, n-2, n-3, \alpha, n-1, n-2, \cdots, 3, 2, \alpha^{\gamma+}]$$

となる。δから、クロスカットがあることがわかり、ρからクラスタがジグザグ境界をもつことがわかる。ジグザグ境界をもつこととα，$\alpha^{\gamma+}$から、クロスカット対称性が示される。よって題意は示された。

(Q. E. D.)

３－６．回転対称11-Venn図について

クロスカット対称の定理から、シーケンスαを探すことで回転対称n-Venn図を作成することができるとわかった。そこで、スーパーコンピューターを用いて数列を網羅的に探索し、回転対称11-Venn図を形成しうるシーケンスαを調べた結果、200,000種類以上の回転対称11-Venn図が見つかった[1]。今回は、シーケンスαが以下のような回転対称11-Venn図を示す（図５）。

〈シーケンスα〉

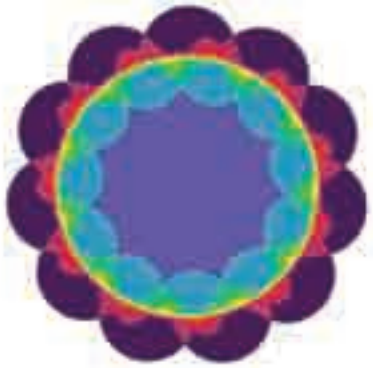

図５

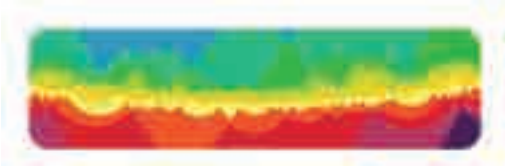

図６　11-Venn図の一部

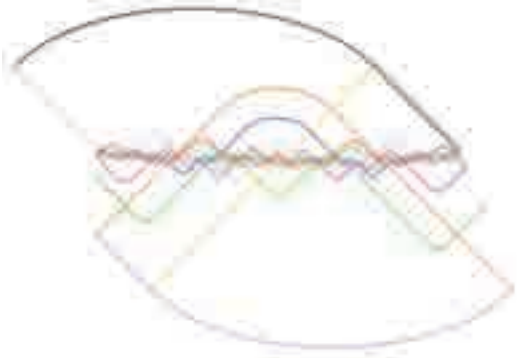

図７　11-Venn図のクラスタ

４．今後の展望、まとめ

今回は回転対称11-Venn図の作成方法を考察しただけで終わってしまったので、今後は作成したVenn図をもとに考察したい。

また、今回、シーケンスαについての具体的な制約を調べることができず、シーケンスが実際に回転対称n-Venn図を形成できるかはスーパーコンピューターを頼らざるを得なかったので、今後は、シーケンスαの条件についても考えていきたい。

加えて、私が考案を目指している三次元のVenn図に対しても、今回証明することができたクロスカット対称の定理を応用できないか考えていきたい。

５．参考文献

［1］Khalegh Mamakani and Frank Ruskey , *“A New Rose : The First Simple Symmetric 11-Venn Diagram”,* Math arXiv : 1207.6452v1 [cs.CG]

［2］David W. Henderson, “*Venn Diagrams for More than Four Classes”,* Amer. Math. Monthly, 70(4) : 424-426,(1963).

６．謝辞

今回の研究にあたり、ご指導くださった顧問の川口先生、ありがとうございました。また、校内発表会でのポスターセッションおよび「集まれ！理系女子　女子生徒による科学研究発表会　関西大会」においてもたくさんの助言をいただきました。この場を借りてお礼申し上げます。