6 次魔方陣に関する考察

6 年 C 組　今中 翔哉
指導教員　川口 慎二

１．要約

サイエンス研究会数学班 6 年生は魔方陣について学んでいる。今回の研究では、今までの 4 次方陣の研究からさらに、１辺のマスを増やした 6 次方陣について研究を行い考察することができた。今回はその結果を、紹介していく。

キーワード　　6 次方陣、交換様式、内包魔方陣

２．研究の背景と目的

今回の研究では、一般的に性質がよく知られていない 6 次方陣について主にその性質について焦点をあてて、研究を行った。研究の目的としては、6 次方陣を俯瞰してみることで、自分なりの見解や考察を行い、新たな性質を発見していくことである。また、前回研究していた 4 次方陣と今回の 6 次方陣の間に、いかなる相違点が見られるのかについても着目していくこととする。

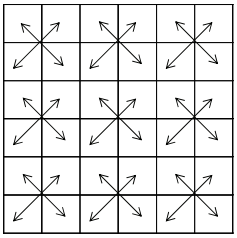
３．研究内容

３－１．定義

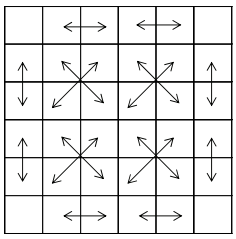
魔方陣とは 1 から始まる連続した自然数を碁盤の目状に並べ、各行、各行、及び対角線の数の和（6 次方陣では 111）をすべて相等しくしたものをいう。一般に、1 辺が n マスの魔方陣を n 次魔方陣という。

３－２．６次方陣の交換様式と型間の関係

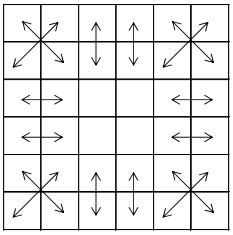
6 次方陣では任意の 6 次方陣に以下の 3 つの操作を施し、新たな 6 次方陣をつくることができる。



（Ⅰ型）

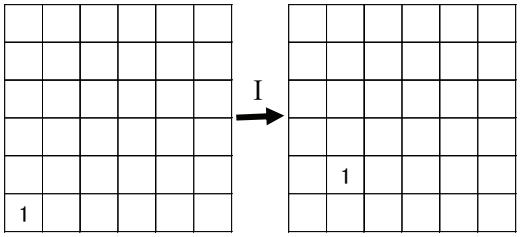


（Ⅱ型）

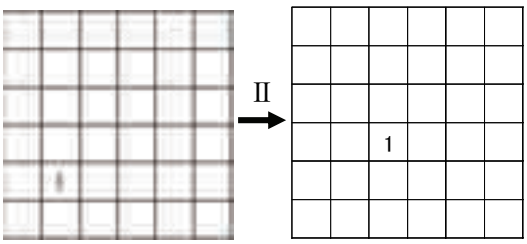


（Ⅲ型）

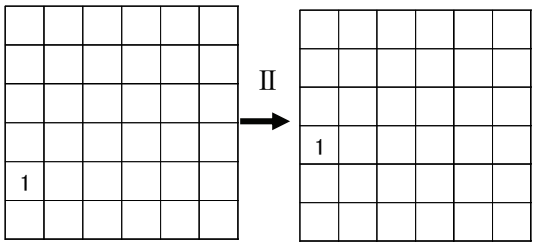
また、6 次方陣を以下のように 1 の位置により 6 つに分類すると次のことがわかる。



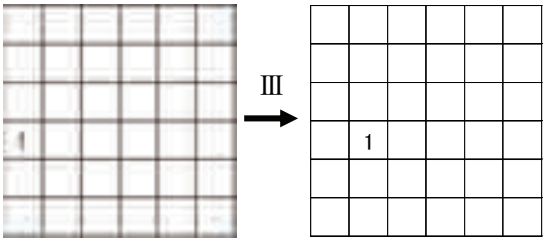
（①型）　　（②型）



（②型）　　（③型）



（④型）　　（⑤型）



（⑤型）　　（⑥型）

以上より、①型、②型、③型の個数は変換により１対１に対応しており個数はそれぞれ等しくなっている。また、④型、⑤型、⑥型の個数も等しくなっているとわかる。

３－３．６次対称方陣・完全方陣は存在しない

（6 次対称方陣について）

6 次対称方陣が存在すると仮定すると次のようになる。

$d+j+p+(37-o)+(37-\mathrm{i})+(37-\mathrm{c})=111$

より、$g+j+p=c+i+o$ …①

同様にして、$e+k+q=b+h+n$ …②

$f+l+r=a+g+m$ …③

a	b	c	d	e	f
g	h	i	j	k	l
m	n	o	p	q	r
37-r	37-q	37-p	37-o	37-n	37-m
37-l	37-k	37-j	37-i	37-h	37-g
37-f	37-e	37-d	37-c	37-b	37-a

次に、上 3 行に注目して①，②，③よりその和を考えて、

$2\times(a+g+m+b+h+n+c+i+o)$

$=111\times3=333$

となるが、この等式は成立しない。よって、6 次対称方陣が存在しないことが示せた。

（6 次完全方陣について）

B	A	B	A	B	A
A		A		A	
B	A	B	A	B	A
A		A		A	
B	A	B	A	B	A
A		A		A	

6 次完全方陣が存在すると仮定する。上図が、完全方陣の性質を満たすとすると、第 1, 3, 5 行と第 1, 3, 5 列に注目すると奇数行、奇数列にある数をすべて A で表し、ここで B は行と列の交点を表す。6 次方陣より、各行、各列の和は 111 より、これら A と B の所にある数の総和は、111×6＝666 である。(9 個の B の和)×2＋（18 個の A の和）＝666 であるから、18 個の A の和は偶数である。また、これが完

全方陣であるには 18 個の A の数の和は 111×3 で 奇数となる。ゆえに、(奇数) ＝（偶数）となり矛盾が生じる。したがて、6 次完全方陣は存在しない。　□

以上のことから 6 次対称・完全方陣は存在しないことが示される（完全方陣・対称方陣について参考文献[1]を参照）。

３－４．６次方陣をつくるために

①図 1 のような数の配列を考える。

②図 1 で同じ色で表された部分どうしを中心に関して対称になるよう移動させる。

							138
3	2	1	36	35	34	→	111
4	5	6	31	32	33	→	111
9	8	7	30	29	28	→	111
10	11	12	25	26	27	→	111
15	14	13	24	23	22	→	111
16	17	18	19	20	21	→	111
57	57	57	165	165	165		84

図 1

③②で得られた図 2 の色で表された部分どうしを交換する。

これにより第 2．第 5 行以外は定和 111 を満たす方陣（図 3）をつくることができた。

							138
21	2	19	36	17	16	→	111
4	5	24	31	14	15	→	93
9	8	25	30	11	28	→	111
10	29	12	7	26	27	→	111
33	32	13	6	23	22	→	129
34	35	18	1	20	3	→	111
111	111	111	111	111	111		84

図 2

							111
21	2	19	36	17	16	→	111
4	32	24	31	14	15	→	120
9	8	25	30	11	28	→	111
10	29	12	7	26	27	→	111
33	5	13	6	23	22	→	102
34	35	18	1	20	3	→	111
111	111	111	111	111	111		111

図 3

３－５．６次内包魔方陣

当初、6 次内包魔方陣の性質についての研究を行っていたため、紹介しておく。6 次**内包魔方陣**とは、全体が 6 次方陣でさらにその内部に 4 次方陣の性質を満たすものを含む魔方陣のことを指す（例えば、図 4）。

1	5	10	34	35	26
33	8	29	15	22	4
31	25	19	17	13	6
28	20	14	24	16	9
7	21	12	18	23	30
11	32	27	3	2	36

図４

a	b	c	d	e	f
g	h	i	j	k	l
m	n	o	p	q	r
s	t	u	v	w	x
y	z	aa	ab	ac	ad
ae	af	ag	ah	ai	aj

図５

この内包魔方陣では、内部にある４次方陣に関して対称な位置にある外部の２数の和は 37（＝6^2＋1）になることが知られていて、６次方陣の定和は 111 であるため、内部の４次方陣の各行、各列、両対角線の定和は 74 となる。

また、著者は４次方陣一般に共通してみられる性質と合わせて以下のことを発見した。４次方陣は、その内部に含まれる中央の 2×2 の正方形に含まれる数の和は、74 でありさらに、4×4 の正方形の４隅も 74 であり、６次方陣の定和は 111 であることから、外の４隅に位置する数の和も 222－(74×2)＝74 となる。すなわち、下の図５が６次内包魔方陣のとき、

$$o+p+v+u=h+k+ac+z$$
$$=a+f+aj+ae=74$$

が成り立つ。

４．研究の結果と今後の展望

今回の研究を通して、６次魔方陣について型間の相互関係や対称・完全方陣の存在性など様々な視点から自分なりの考察を行うことができた。しかし、今回の研究では定和を完全に満たした６次方陣を作ることはできなかった。今後は、第２行、第５行の定和をも満たした本当の意味での６次方陣を自ら作っていきたいと思う。

５．参考文献

[1] 「4 次方陣の性質に関する研究」、今中翔哉、奈良女子大学附属中等教育学校、平成 28 年度 SSH サイエンス研究会生徒研究論文集、p.79～85

[2] 「魔方陣の世界」、大森清美、日本評論社(2013)

６．謝辞

今回の研究にあたり、ご指導くださった顧問の川口先生ありがとうございました。