多面体の正射影についての考察

6年D組　松川 賢太朗
指導教員　川口 慎二

１．研究の背景と目的

立体そのものは変わらないのにも関わらず見る角度によって見える形の面積も異なる。その事実を知り、多面体の正射影の面積を求め、大きさを比較することで、立体の性質について考察した。

２．研究内容

立体を正射影する平面をαとする。

２－１．正四面体

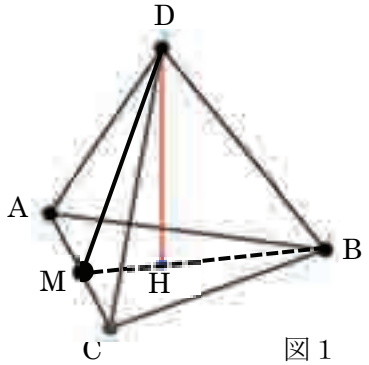

図１

AB＝BC＝CA＝1 とする。D から正三角形 ABC に下ろした垂線の足を H とする。

このとき、DM＝BM＝$\frac{\sqrt{3}}{2}$, MH＝$\frac{\sqrt{3}}{6}$, DH＝$\frac{\sqrt{6}}{3}$ である。

２－１－１．正射影が三角形の場合

・図２の②について

AB＝１であり、辺 CD は平面αに対して垂直であり、AC＝$\frac{\sqrt{3}}{2}$である。ゆえに、②の正射影の面積S_2は、

$$S_2 = 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

・図２の③，④について

③の正射影では、CF＝BM＝$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

④の正射影では、DC＝DH＝$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

AB は共通なので、$\frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{\sqrt{6}}{3}$ より、$S_3 > S_4$.

したがって、$S_3 = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ であり、$S_4 = 1 \times \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

・図２の⑤について

辺 BC は平面αに対して垂直であり、AB＝$\frac{\sqrt{3}}{2}$なので、⑤の正射影の面積S_5は、

$$S_5 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

２－１－２．正射影が四角形の場合

・図２の①について

AB⊥CD より、①の正射影の面積S_1は

$$S_5 = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

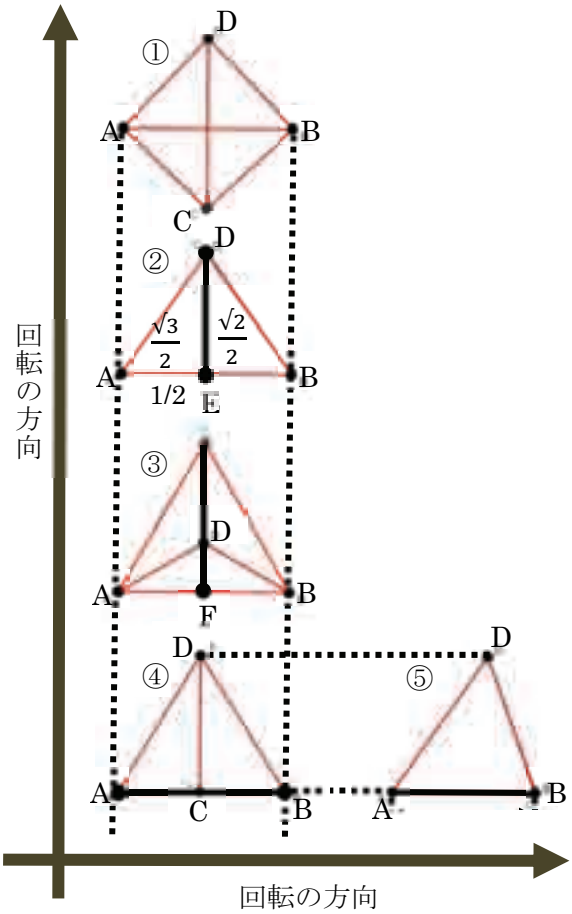

図２

２－２．デルタ６面体

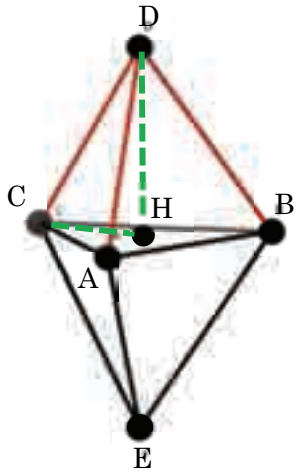

図３

まず、AB＝BC＝CA＝2 とする。D から正三角形 ABC に下ろした垂線の足を H とすると、図４から、CD＝2, CH＝$\frac{2\sqrt{3}}{3}$, DH＝$\frac{2\sqrt{6}}{3}$ である。

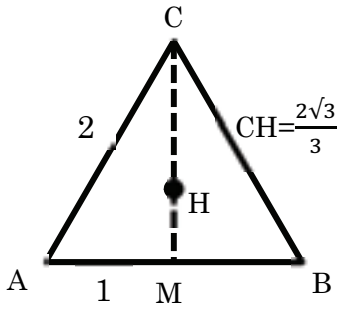

図４

・図６の①について

AE は正四面体の高さに一致するので、

AE＝DH＝$\frac{2\sqrt{6}}{3}$．よって、①の正射影の面積 S_1 は、$S_1 = 2 \times \frac{2\sqrt{6}}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

・図６の②について

AE＝BC＝2 なので、②の正射影の面積 S_2 は、$S_1 = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2$.

・図６の③について

CB＝2, DA＝DH＝$\frac{2\sqrt{6}}{3}$ なので、③の正射影の面積 S_3 は

$$S_3 = 2 \times \frac{2\sqrt{6}}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

・図６の④について

１辺の長さが２の正三角形なので、④の

正射影の面積 S_4 は、

$$S_4 = 2\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2} = \sqrt{3}\ .$$

・図６の⑤について

△ADH と△DHC に分けて考える。

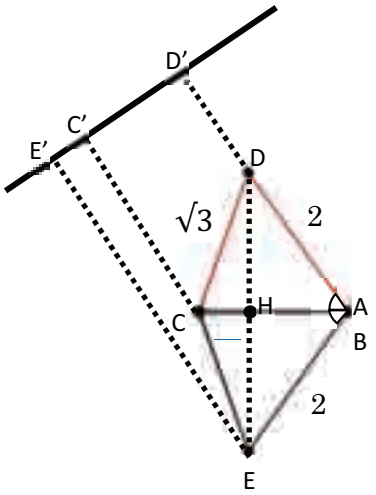

図５

△ADH と△DHC に三平方の定理を用いて、

$$\mathrm{AH}=\sqrt{2^2-\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\mathrm{CH}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\mathrm{AC}=\mathrm{AH}+\mathrm{CH}=\sqrt{3}$

したがって、⑤の正射影の面積 S_5 は、

$$S_5=\sqrt{3}\times\frac{2\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{2}\times 2=2\sqrt{2}\ .$$

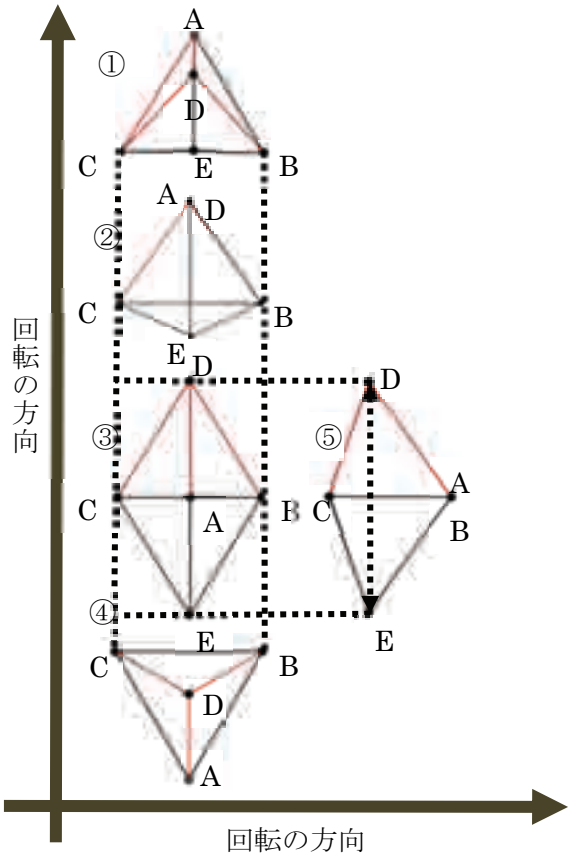

図６

２－３．正二十面体

１辺の長さを１とする。

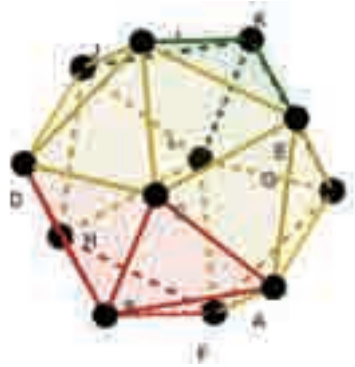

図７

正二十面体については、(※)の正射影の面積について考察する。

図８の正五角形 ABCDE において、２つの相似な三角形である△ACD と△CDF に

注目すると、AC：CD＝CD：DF なので、

$x:1=1:(1-x)$ から、$x^2-x-1=0$.

$x>0$ なので、$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

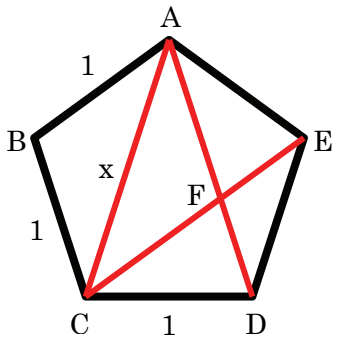

図８

したがって、図９の(※)において、

$$\mathrm{GA}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$\mathrm{EF}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\mathrm{AJ}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ なので、求める正射影の面積 S は、

$$S=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\times\frac{1}{2}\times 2$$

$$=\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)}{8}$$

となる。

３．今後の展望

今回は正二十面体の正射影の面積をすべて求めることができなかったので、今後は図９の残り４つの図形の面積を求めようと考えている。今後、正多面体の正射影の面積を求める過程の簡素化も進めたい。

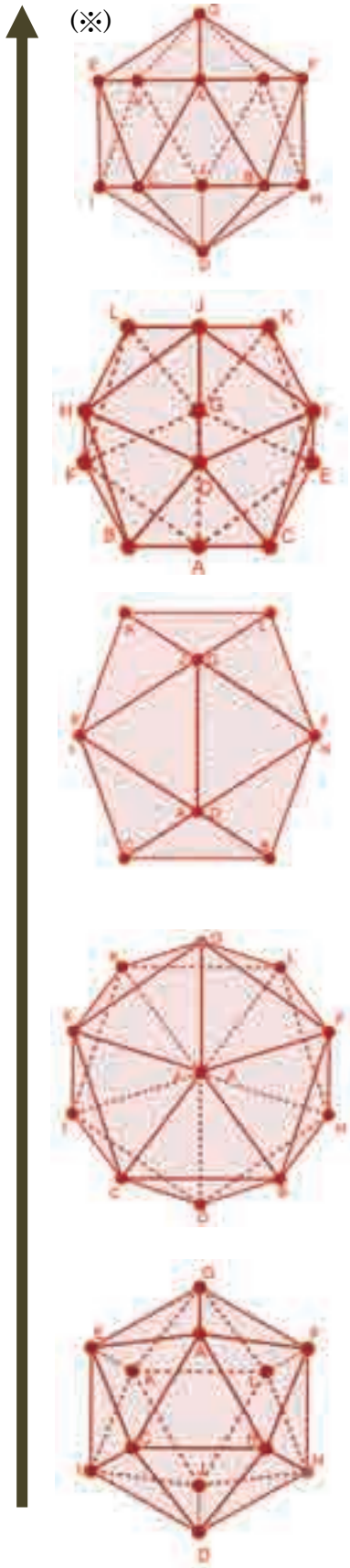

図９