カオス

6年C組　小椋 晃一
指導教員　川口 慎二

１．研究の背景と目的

Sakura Science Camp や５年の数学の授業を通してロジスティック写像に興味をもち、その関連であるリー・ヨークの条件を考察することにした。

２．研究概要

■ロジスティック写像

ロジスティック写像とは漸化式 $x_{n+1}=f(x_n)=ax_n(1-x_n)$ （$0\leqq a\leqq 4$）で定義される写像をいう。n を増やしていったときの x_n の振る舞いが a の値に応じて変化する。特に、$3.5699456\cdots<a$ のときは、**カオス**な振る舞い（収束点や周期、周期への漸近がない不規則な挙動）となる。$3.5699456\cdots$ という値は、カオスの境界を表していて、**ファイゲンバウム点**とよばれている。$a=4$ のときの様子を、図１，図２に示す。

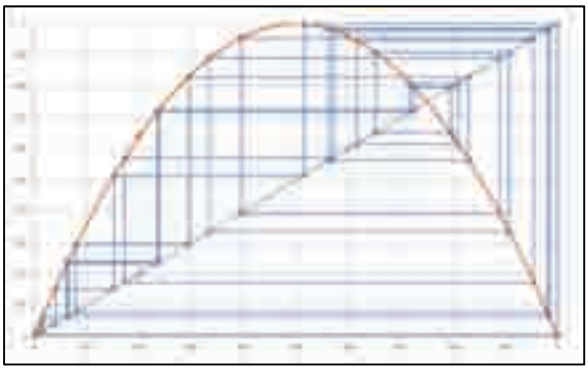

図１

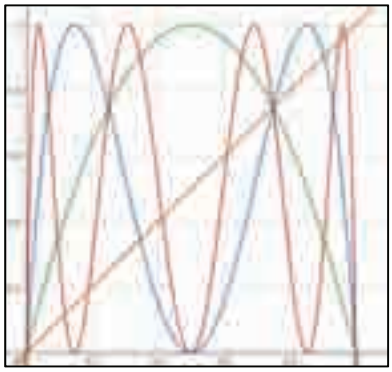

図２

図２において、$f(x)=4x(1-x)$ として、橙色の直線が $y=x$，緑色の曲線が $y=f(x)$，青色の曲線が $y=f(f(x))$，赤色の曲線が $y=f(f(f(x)))$ をそれぞれ表している。

■リー・ヨークの定理

アメリカの数学者リー（Li）とヨーク（York）は、いくつかの関数の不規則な挙動を一般化して、次の定理を証明した。

定理（リー・ヨークの定理）

x_n が区間 I にあり、$s \leqq p < q < r$ で、$f(p)=q,\ f(q)=r,\ f(r)=s$ をみたす数があるとき、

（ｉ）任意の $k \in N$ について、k 周期の振る舞いがある。

（ii）カオスな振る舞いの初期値 x_1 が無限個存在する。

$f(x_1)=y_1,\ f(y_1)=y_2$ とすると、$f(f(x_1))=y_2$ であり、$x_1=y_2$ のとき $f(f(x_1))=x_1$ となるため、x_1 を初期値とすると周期 2 の軌道を描く。そのため、直線 $y=x$ 上の点 $(x_1,\ x_1)$ と曲線 $y=f(f(x))$ が交点をもてば、$y_2=x_1$ となるため、x_1 を初期値とすると周期 2 の軌道を描くことがわかる。

３．考察

いくつかの具体的な関数について、挙動を調べ考察した。

① $f(x)=-2x^2+11x-11$ は $f(2)=3,\ f(3)=4,\ f(4)=1$ を満たす。その挙動を図３に示す。区間 I が閉じていないため、負の方向へ進んでいった。

② $f(x)=12.5x^3-18.75x^2+7.25x$ を考える。その挙動を図４に示す。しばらく周期 2 の軌道を描いたが、リー・ヨークの条件：$s \leqq p < q < r$ で、$f(p)=q,\ f(q)=r,\ f(r)=s$ を満たしていないため、周期 2 から外れていった。

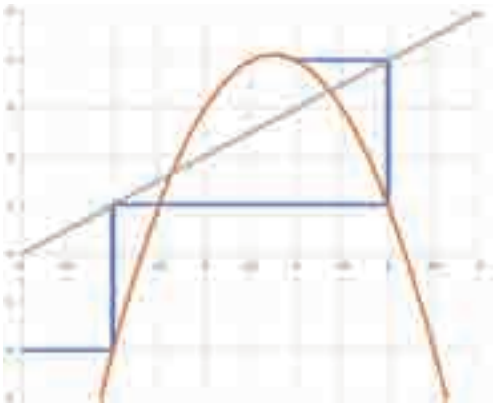

図３

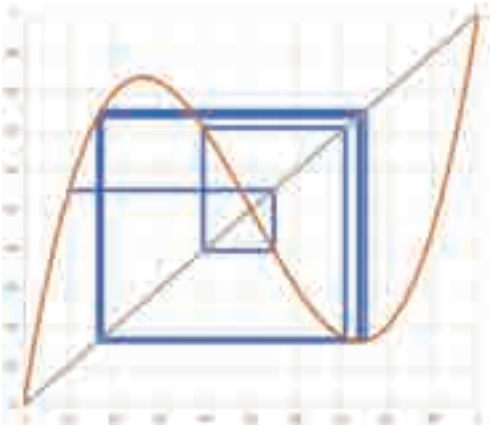

図４

４．参考文献

[1]「ロジスティック写像」

http://www.qmss.jp/qmss/text/simulation/logistic-map/excel/logistic.htm

[2]「カオスとフラクタル－非線形の不思議」、山口昌哉、講談社ブルーバックス