自己回避歩行に関する考察

6年C組　古宮 昌典
指導教員　川口 慎二

１．研究の背景と目的

私は自己回避歩行について研究を行っている。今回は、自己回避歩行の構成方法を考えた。

２．研究概要

図１のように、$n \times n$ のマス目において、同じ辺、点を二度通らずに、スタート（S）からゴール（G）まで行く経路のことを**自己回避歩行**という。自己回避歩行の総数は、表１のように、n の値が増えるごとに経路の総数は爆発的に増加することが知られている。今回の研究では、自己回避歩行の構成方法を２つのアプローチから検討した。

図１

表１

n	経路の総数
1	2
2	12
3	184
4	8521
5	1262816
6	575780564
7	789360053252
8	3266598486981642
9	41044208702632496804

■アプローチ①

マス目を２色に塗り分けることにより、自己回避歩行を構成した。

図２のように、マスを白黒２色に塗って領域を ２ つに分割すると、その境界に沿って自己回避歩行が構成できると考えて、自己回避歩行の総数を

$$P_n \leqq 2^{n^2}$$

と見積もった。

図２

しかし、図３のように、２ 色でマス目を塗り分けても、経路が存在しないパターンが生じてしまう。そこで、経路の存在しないパターンを除外することにより、次のように自己回避歩行の総数の見積もりを修正した。

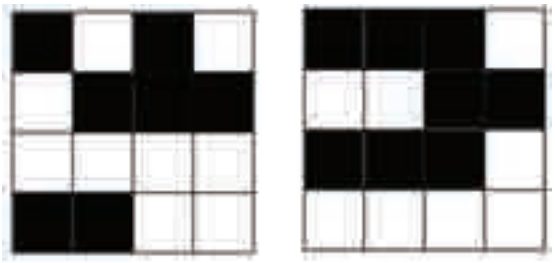

図３

$$P_{n\times k} \leqq 14^{\frac{n\times k}{4}} - 2^{n+k-2} \times 14^{\frac{(n-2)(k-2)}{4}} + 2$$

■アプローチ②

図４のように、横の線分を取り出した図形を考えると、そこから、もとの経路を復元することができる。この事実を利用して、自己回避歩行の総数を $P_n \leqq 2^{n^2}$ と評価することができた。

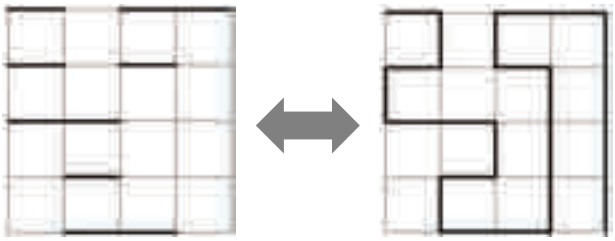

図４

上述の 2 つのアプローチは、図５のように、各列について上から順にその線分より下の部分の色を反転させることにより、本質的に同じ考え方であることがわかる。

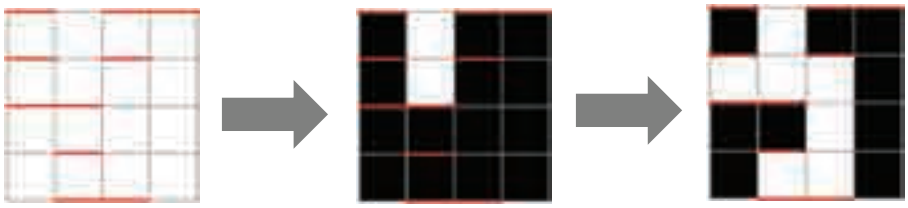

図５

■アプローチ③

一続きの黒領域は、左または下の辺に接していて、一続きの白領域は、右または上の辺に接している。そこで、ある操作をある経路に対して施したときに、その結果も自己回避歩行になっているようなものを考える。例えば、対角線で折り返したり、配色を 1 つ右にずらし、左端のマス目をすべて黒にしたりする（図６）操作などが考えられる。

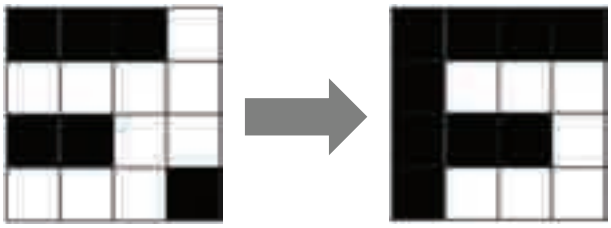

図６

３．考察、今後の課題

今回、自己回避歩行の構成方法について検討したが、具体的な計算に至らないまま終ってしまい、一般的に成立する方法は困難であることを痛感した。自己回避歩行の総数を求めるために、まずどれくらいのオーダーであるのかを調べていきたい。また、経路同士に演算を加えることで、集合により扱えるようにしたい。