# Σ公式の一般化

６年Ｄ組　東井 俊樹
指導教員　川口 慎二

## １．研究の背景と目的

これまで知られているΣに関する公式を、さらに深く探究し新たな公式の導出を行った。また、本研究では順列や組合せに関するものと、三角関数に関するものを重点的に扱った。

## ２．研究概要

順列や組合せに関して、以下の３つの公式に証明を与えた。

(1) $\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k = 2^n$　　(2) $\sum_{k=0}^{n} {}_nH_k = {}_{n+1}H_n$　　(3) $\sum_{k=0}^{n} {}_nP_k = [n!e]$　（ただし、$n \geqq 1$）

(1)については、二項定理を用いれば容易に証明できる。

(2)については、${}_nC_k + {}_nC_{k+1} = {}_{n+1}C_{k+1}$ を利用すれば容易に証明できる。

(3)について、指数関数 $f(x) = e^x$ のマクローリン展開 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ を用いることにより、

$$\sum_{k=0}^{n} {}_nP_k = n!\left\{e - \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+3)!} - \cdots\right\}$$

$$= n!e - \left\{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+2)(n+1)} + \frac{1}{(n+3)(n+2)(n+1)} + \cdots\right\}$$

となり、$\alpha = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+2)(n+1)} + \frac{1}{(n+3)(n+2)(n+1)} + \cdots$ とおくと、

$$\alpha < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{n}$$

ゆえ、$\sum_{k=0}^{n} {}_nP_k = n!e - \alpha$，$0 \leqq \alpha < 1$ と評価することにより、公式を証明することができた。

また、三角関数（$\sin^p k, \cos^p k$）の総和に関しては、次の公式を得た。

① $\sum_{k=0}^{n} \sin k = \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\sin\frac{n}{2}}{\sin\frac{1}{2}}$　　② $\sum_{k=0}^{n} \cos k = \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\cos\frac{n}{2}}{\sin\frac{1}{2}}$

③ $\sum_{k=0}^{n} \sin^2 k = \frac{1}{2}\left\{n - \frac{\sin n\cos(n+1)}{\sin 1}\right\}$　　④ $\sum_{k=0}^{n} \cos^2 k = \frac{1}{2}\left\{n + \frac{\sin(n+1)\cos n}{\sin 1}\right\}$

本研究では、さらにこの公式を一般化することができた。まず、$\cos^p k$ の総和について

は、**チェビシェフの多項式**：$x=\cos\theta$ として、$T_m(x)=\cos m\theta$ とすると、

$$T_m(x)=\sum_{p=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\frac{(-1)^p}{2(m-p)}\cdot {}_{m-p}C_p\,(2x)^{m-2p}$$

を用いると、$a_p=\dfrac{(-1)^p}{2(m-p)}\cdot {}_{m-p}C_p\,(2x)^{m-2p}$ としたとき、

$$\cos 2\theta=a_0\cos^2\theta+a_1,\ \cos 3\theta=a_0\cos^3\theta+a_1\cos\theta,$$

$$\cos 4\theta=a_0\cos^4\theta+a_1\cos^2\theta+a_2,\ \cos 5\theta=a_0\cos^5\theta+a_1\cos^3\theta+a_2\cos\theta,\ \cdots$$

を順次得る。これらを組み合わせていけば、$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos^p k$ を定式化することができる。

これに対して、$\sin^p k$ の総和については、以下の定理を証明した。

<u>定理</u>　(1) $\displaystyle\sin 2m\theta=\cos\theta\sum_{p=0}^{m-1}(-1)^{m-p-1}\cdot {}_{2m-p-1}C_p\ (2\sin\theta)^{2m-2p-1}$

(2) $\displaystyle\sin(2m+1)\theta=\sum_{p=0}^{m}\frac{(-1)^{m-p}(2m+1)}{2(2m-p+1)}\cdot {}_{2m-p+1}C_p\ (2\sin\theta)^{2m-2p+1}$

この定理により、$b_p=\dfrac{(-1)^{m-p}(2m+1)}{2(2m-p+1)}\cdot {}_{2m-p+1}C_p\ (2\sin\theta)^{2m-2p+1}$ としたとき、

$$\sin 3\theta=b_1\sin^3\theta+b_2\sin\theta,\ \sin 5\theta=b_1\sin^5\theta+b_2\sin^3\theta+b_3\sin\theta,$$

$$\sin 7\theta=b_1\sin^7\theta+b_2\sin^5\theta+b_3\sin^3\theta+b_4\sin\theta,\ \cdots$$

を順次得ることができ、$\cos^p k$ のときと同様に総和の公式を証明することができた。

## ３．考察

今回の研究を通して、位相が等差数列になっているような場合、正弦の和は正弦の積で、余弦の和は余弦と正弦の積で表すことができること、および正弦、余弦のべき乗和はいずれも、偶奇での場合分けを生じ、いずれも漸化式のように導出されることがわかった。

## ４．参考文献


[1]「高校数学の美しい物語」　https://mathtrain.jp/sum_cos

[2]「はてなブログ」　https://wasan.hatenablog.com/entry/2017/05/05/114622

[3]「総和の公式集」　http://spheresofa.net/sugaku/sigma.pdf