隣接４項間漸化式

６年Ｃ組　大野 華子
指導教員　川口 慎二

１．研究の背景と目的

授業で習った隣接２項間漸化式､隣接３項間漸化式をもとに隣接４項間漸化式を解いた。そこで、隣接 4 項間漸化式も同様に特性方程式を用いることで一般項を導出することができるとわかった。そのうえで昨年度から引き続き、隣接 4 項間漸化式の解法の一般化を目標に研究を行っている。

２．研究概要

昨年度の研究では次の入試問題を用いて研究を行った。

問題１

α, β, γ を3次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$（p, q, r は定数）の3つの解とし、A, B, C を定数とする。このとき、$x_n = A\alpha^n + B\beta^n + C\gamma^n$（$n=1, 2, 3, \cdots$）と定めると、関係式

$$x_{n+3}+px_{n+2}+qx_{n+1}+rx_n=0 \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つことを証明せよ。

この問題１に対して、隣接4項間漸化式の特性方程式が重解でない場合については次のように一般化することができた。

$$a_n = \frac{\beta\gamma a_1-(\beta+\gamma)a_2+a_3}{\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\alpha^n + \frac{\gamma\alpha a_1-(\gamma+\alpha)a_2+a_3}{\beta(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}\beta^n + \frac{\alpha\beta a_1-(\alpha+\beta)a_2+a_3}{\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\gamma^n$$

しかし上の一般化は、特性方程式の解が重解である場合や解が 0 になる場合は成り立たない（ただし、解が 0 になる場合は隣接 3 項間漸化式と同じになってしまうので考えなくて良いと判断した）。そのような成り立たない場合の１つである「特性方程式が重解になる場合」の一般項を考察した。はじめに、特性方程式が重解をもたない場合と同様の方法で問題１を解いたところ、次のような一般項を得た。

$$a_n = \frac{\beta a_1 - a_2}{\alpha(\beta - \alpha)}\alpha^n + \frac{\alpha a_1 - a_2}{\beta(\alpha - \beta)}\beta^n$$

しかし、この一般項は成り立っていないことがわかった。次に問題２を考える。

問題２

$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 5$ とする。 $a_{n+3} - 7a_{n+2} + 16a_{n+1} - 12a_n = 0$ により定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

この問題を、特性方程式 $t^3 - 7t^2 + 16t - 12 = 0$ を解くと、$(t-2)^2(t-3) = 0$ から、$t = 3,\ 2$（重解)となる。一般項を求めると、

$$a_n = 3^{n-1} + (1-n)\cdot 2^{n-2}$$

を得る。

３．考察

なぜ重解をもつ隣接 4 項間漸化式の重解の一般化を考えた場合、このような不具合が生じるかについて考察した。

そこで注目した点は、問題１において、A, B, C を定数としていることである。A, B, C を定数にしてしまうと、重解の場合の漸化式を解いたときに現れる特徴的な項が現れない。だから、A, B, C を定数ではなく $(A - kn)$ のように補正すれば、特性方程式が重解である場合の漸化式の一般項ができるのではないかと推測した。

また、隣接 4 項間漸化式が 3 次の特性方程式に帰着させて解くことができることがわかったので、隣接 n 項間漸化式も $n-1$ 次の特性方程式を用いれば解けるのではないかと考えられる。加えて、隣接 4 項間漸化式と同じように隣接 n 項間漸化式も一般化できるのではないかと推測する。

４．参考文献

[1]「高校数学の美しい物語」　https://mathtrain.jp/

[2]「数学B教科書」、東京書籍

[3]「教科書Finder」　http://text.yarukifinder.com/#

[4]「中高数学研究」　http://xn--fiq353ajyhontfxcbv4e.com/