折り紙と曲線

6年D組　松井 翔吾
指導教員　川口 慎二

１．研究の背景と目的

折り紙は日本の伝統的な文化である。一枚の紙から折られる平面、立体の美しさになぜ感動させられるのか、それは折り紙に隠されている数学的な美しさが表れているからだと思い、折り紙のもつ数学的性質を明らかにして、折り紙を研究することにした。また、折り紙のある点に紙の端が重なるように折っていくと折り目の包絡線として二次曲線が現れる。なぜ二次曲線が現れるのか、それはどのような曲線なのかということに焦点を当て、調べてみることにした。

２．研究概要

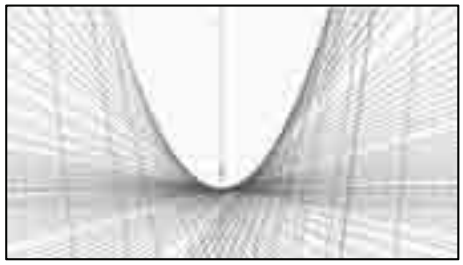
定点に重なるように紙の端を折ると二次曲線が表れる。そこで、これらの曲線を式で表しその包絡線が二次曲線になることを確認した。その後、さらに同じ作業を繰り返すことでどのような曲線を描くことができるのかを調べた。はじめに、以下の問題を設定する。

【問題】紙を折るという作業を通じてどのような曲線が描けるか。ただし初めに円と直線を紙にかくことができるとする。

この問題を考えるにあたり、「紙を折る」とは平面上の定点A と直線または曲線上の点Pの垂直二等分線を引くこと、また、「直線が描ける」とは、紙を折ることで引かれた垂直二等分線が描かれる直線の包絡線になることであると定義する。

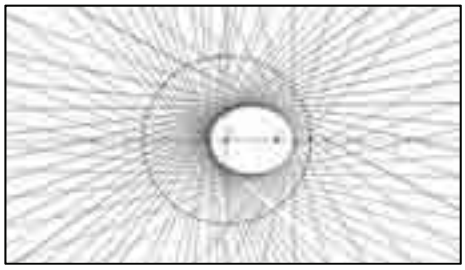
①紙の端が定点に重なるように折る

直線と定点の垂直二等分線になる。定点を $\mathrm{A}(0,\ a)$ とおき、直線 $y=-x$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ -a)$ の垂直二等分線が描く図形は、放物線 $x^2=4ay$ となる。



②円形の紙の端が円の内部の定点に重なるように折る

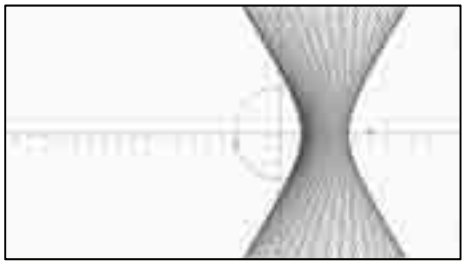
円上の点とその内部にある定点との垂直二等分線となる。定点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$（ただし、$a<r$）と円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $\mathrm{P}\left(s^2,\ t^2\right)$ について、線分APの垂直二等分線が描く図形は、楕円



$$\frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2-a^2}=\frac{1}{4}$$ となる。

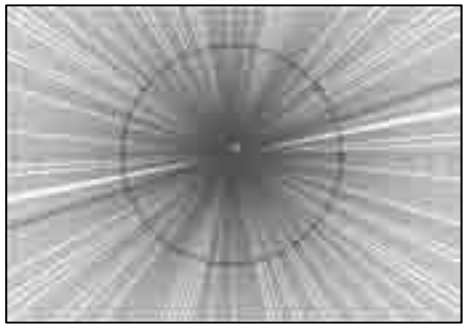
③円形の外部の点が円状の点と重なるように折る

円上の点とその外部にある定点との垂直二等分線になる。A$(a, 0)$（ただし、$a<r$）と円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 P$\left(s^2, t^2\right)$ について、線分 AP の垂直二等分線が描く図形は、双曲線 $\frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{r^2}-\frac{y^2}{a^2-r^2}=\frac{1}{4}$ となる。



紙の形が円形であることで②は③と異なるように思われるが、この作業は円上にない定点を円上に重なるように折るという作業なので同値である。

ここで、②と③の式を比べてみると全く同じ方程式で表現されていることがわかる。定点が円の内部にあるか外部にあるか、つまり a と r の大小関係によって曲線の形が決定している。また、どちらとも二次曲線であることから、a と r によって離心率がコントロールされているのではないかと考えた。さらに、②，③のいずれの場合も離心率が $e=\frac{a}{r}$（$r\neq a$）となることがわかった。つまり、半径に対する定点の中心からの距離が離心率を表すとわかった。このことによって円の半径に対して P と円の中心の位置関係を調整することで任意の離心率で楕円、双曲線を描くことができるようになった。



ただし、$r=a$ のとき②，③の軌跡を描くことができない。実際にやってみると円上の点から円上の点へ引いた線分の垂直二等分線は必ずその円の中心を通るので P を動かすと、円の中心を中心にして回転してしまう。

３．考察

紙を折るという作業だけで任意の二次曲線が描けることが確認できた。この二次曲線を組み合わせることでさらに次数の高い曲線も描けることが geogebra を使った実験によってわかった。今後はこれらの曲線について詳しく調べていく必要があると思われる。また、これらの曲線を体系化して自由に曲線が描けるようにしていきたい。また、描ける曲線と、描けない曲線についても考察したい。

４．参考文献

[1]「数学Ⅲ」、東京書籍