地平線までの距離

１年Ｃ組　井上 友裕
指導教員　川口 慎二

１．要約

地平線は自分からどれぐらい離れているのかについて、2 つの測り方で調べてみることにした。また、地面から目線までの高さや半径などの条件を変えたときの地平線までの距離の変化の特徴を調べた。そして、半径が大きくなったり、地面から目線までの高さが高くなったりすると地平線までの距離は長くなることがわかった。

キーワード　　地平線、自分の視線の高さ、半径、関数

２．研究の背景と目的

海で見る水平線や平原で見る地平線は、自分からどれぐらい離れているのかという疑問をもった。そこで、具体的な数値を使って、調べてみることにした。

３．研究内容

３－１．地平線までの距離の求め方

線分 AB＝c，線分 AC＝b　とする。

・点 C を地球の中心
・AD（＝d）を自分の視線の高さ
・BC＝CD（＝a）を地球の半径

とする。

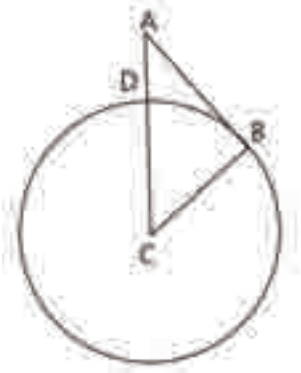

図１

このとき、

①（線分 AB の長さ）
　　＝（目から地平線までの距離）
②（弧 BD の長さ）
　　＝（立っている場所から
　　地平線までの距離）

を求める。

（１）線分ＡＢの長さ

AB は地球（円）の接線であるので∠ABC＝90°である。よって、AB の長さは三平方の定理

$$a^2+c^2=b^2,\ b=a+d$$

を使って求められる。

【地平線までの距離の求め方①】

$$c=\sqrt{2ad+d^2}$$

逆三角関数を使うと、別の方法で求めることができる。図２のように、∠ACB＝X とすると、

$$X=\cos^{-1}\left(\frac{a}{a+d}\right),\quad c=a\tan X$$

なので、次の方法②を得る。

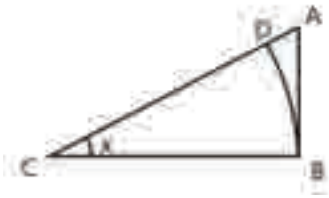

図２

【地平線までの距離の求め方②】

$$c = a\tan\left(\cos^{-1}\left(\frac{a}{a+d}\right)\right)$$

地球で身長 1.5 m のときは、

$$\sqrt{2\times 6731\times 0.0015+0.0015^2} \fallingdotseq 4.37$$

より、約 4.37 km である。

（２）弧ＢＤの長さ

弧 BD の長さを求めるには∠BCD の大きさを求める必要がある。角度を求めるには逆三角関数を使えばよい。

図２より、$\cos X = \dfrac{a}{a+d}$

【地平線までの距離の求め方③】

$$(\text{弧BD}) = \frac{\cos^{-1}\left(\dfrac{a}{a+d}\right)}{180}\pi a$$

地球上で身長 1.5 m のときは、

$$\frac{\cos^{-1}\left(\dfrac{a}{a+d}\right)}{180}\pi a \fallingdotseq 4.33$$

より約 4.33 km である。

３．２　さまざまな高さと半径の場合の地平線までの距離

地平線までの距離とは、線分 AB の長さを指すこととする。

表１　高さ h（m)と
地平線までの距離 d（km)

場所	h（m)	d（km)
マンション	10	11.28
生駒山	642	90.44
富士山	3776	219.38
エベレスト	8848	335.88
国際線の飛行機	10000	357.09

高さが大きくなると、地平線までの距離は長くなることがわかる。

表２　半径 r（km)と
地平線までの距離 d（km)

星の名前	r（km)	d（km)
太陽	695508	45.67
木星	69911	14.48
土星	58232	13.21
天王星	25362	8.72
海王星	24622	8.59
地球	6371	4.37
金星	6052	4.26
火星	3390	3.18
水星	2440	2.70
月	1737	2.28

半径が大きくなると、地平線までの距離は長くなることがわかる。

３．３　地平線の性質

地平線までの距離や中心角、半径には関係があると考えた。

命題１　地平線までの距離 AB は必ず視線の高さ AD より長い。

（証明）

図３において、二等辺三角形の底角は等しいので、∠BDC＝∠CBD である。∠ABC＝90°，∠ADB＋∠BDC＝180°なので、∠ADB＞∠ABD である。

対辺と対角の大小関係より、AB＞AD である。

(Q. E. D.)

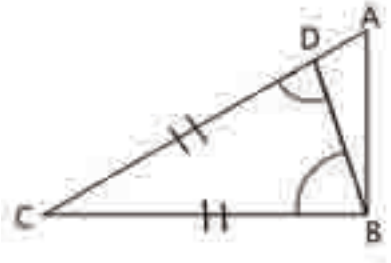

図３

【地平線の性質】

地平線までの距離は標高より長い。

命題２　視線の高さが高くなれば中心角は大きくなる。

（証明）

図４において、AD＜AC である。AD が大きくなると､AC はそれより大きくなるので、対辺と対角の大小関係より、∠ABC は大きくなる。

(Q. E. D.)

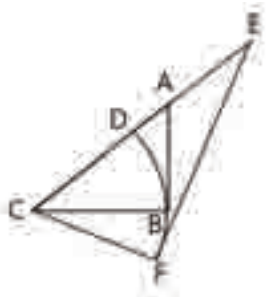

図４

３．４　半径と地平線までの距離の関係

目線の高さは 1.5 m としてグラフを描いた。横軸が半径、縦軸が地平線までの距離を表す。

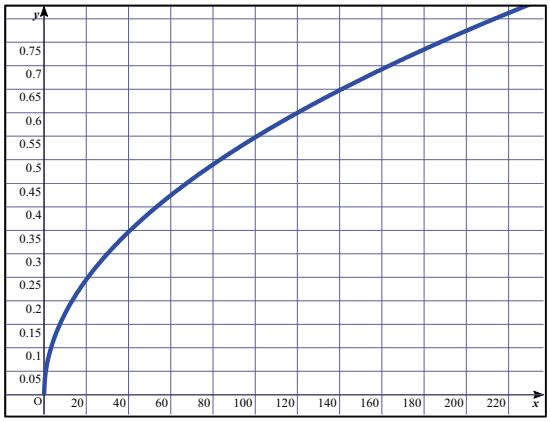

図５

図５のグラフを見ると、半径が大きくなるにつれて、グラフの傾きは小さくなっていく。そこで、グラフの傾きの変化を具体的に調べるために、微分して導関数を求めてみた。

$$f(x)=\sqrt{\frac{9}{4000000}+\frac{3x}{1000}}$$ とすると、

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{9}{4000000}+\frac{3x+3h}{1000}}-\sqrt{\frac{9}{4000000}+\frac{3x}{1000}}}{h}$$

$$=\frac{\dfrac{3x+3h}{1000}-\dfrac{3x}{1000}}{h\left(\sqrt{\dfrac{9}{4000000}+\dfrac{3x+3h}{1000}}+\sqrt{\dfrac{9}{4000000}+\dfrac{3x}{1000}}\right)}$$

$$=\frac{\dfrac{3h}{1000}}{h\left(\sqrt{\dfrac{9}{4000000}+\dfrac{3x+3h}{1000}}+\sqrt{\dfrac{9}{4000000}+\dfrac{3x}{1000}}\right)}$$

$$=\frac{3}{1000\left(\sqrt{\dfrac{9}{4000000}+\dfrac{3x+3h}{1000}}+\sqrt{\dfrac{9}{4000000}+\dfrac{3x}{1000}}\right)}$$

なので、

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{3}{1000\left(\sqrt{\dfrac{9}{4000000}+\dfrac{3x+3h}{1000}}+\sqrt{\dfrac{9}{4000000}+\dfrac{3x}{1000}}\right)}\right\}$$

$$=\frac{3}{2000\sqrt{\dfrac{9+12000x}{4000000}}}$$

この導関数の x に実数を代入して、微分係数を求めた結果を図６のグラフに示す。

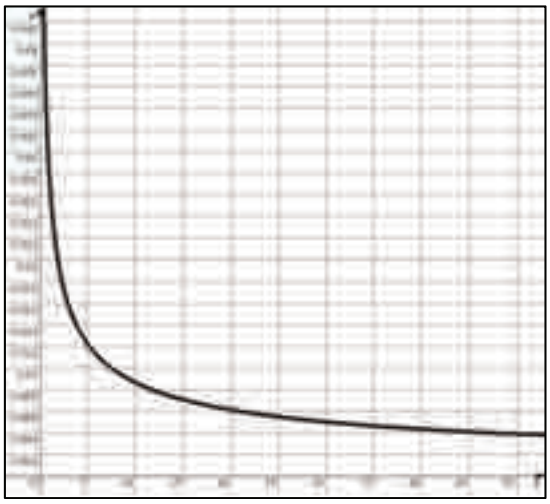

図６

図６のグラフから、x が１から５まで変化するの間で微分係数の変化が激しく、x の値が大きくなるにつれ、微分係数の値の減り方は小さくなる。

４．今後の課題

今回は幾何の定理について別証明を行ったが、他の分野の定理についても別証明を考えていきたい。また、別証明から新しい定理を導出することも考えたい。

５．参考文献

[1]「高校数学の美しい物語」
https://mathtrain.jp

[2]「サルでも分かる！ 微分法とは何か」
https://www.sekkachi.com/entry/what_is_bibun

[3]「微分積分の概念を小学生でもわかりやすく捉えるには」
https://math-jp.net/2018/05/04/bibun-sekibun-wakariyasuku/

[4]「アタリマエ！ 対数とは何なのかとその公式・メリットについて。対数をとるとはどういう意味か？」
https://atarimae.biz/archives/12581

６．謝辞

今回の研究にあたり、ご指導くださいました顧問の川口先生ありがとうございました。