折り紙で正 11 角形を折る

6 年 D 組　置名　璃子
指導教員　佐藤　大典

１．要約

折り紙で正 11 角形が折れるかどうかを、複素数平面上で正多角形の頂点の座標を表すことにより調べる。

２．研究の背景と目的

一般に、折り紙を用いて作図できる正多角形には限界があるといわれている。そこで、折ることができないとされる正 11 角形がなぜ作図できないのか、本当に作図できないのか調べることにした。

３．研究内容

３．１　折り紙で作図することの意味

定規とコンパスによる作図では、角の二等分線が作図できることにより、2 次方程式を解くことができる。しかし、角の三等分線は作図できないので、3 次方程式を解くことはできない。それに比べて、折り紙による作図では、角の三等分が作図できることにより、3 次方程式も解くことができる。

３．２　作図可能な正 P 角形

どの正多角形も外接円を描くことができ、正多角形の各頂点から外接円の中心までの距離は等しい。また、中心角もすべて等しい。これより、複素数平面上に原点中心で半径 1 の円に内接する正n角形（nは 3 以上の整数）を考えると、正n角形の各頂点は

$$\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\ (k=0,1,\cdots,n-1)$$

と表すことができる。

このn個の複素数は、方程式$z^n=1$の解の全体であり、n＝P とおくと（nは 3 以上の素数)、この方程式は、

$$(z-1)(z^{p-1}+z^{p-2}+\cdots+z+1)=0$$

と因数分解できるので、

$$z^{p-1}+z^{p-2}+\cdots+z+1=0\ \cdots①$$

の解全体と$z=1$を合わせたものが正 P 角形の頂点である。ここで、折り紙では、2 次方程式、3 次方程式が解けるので P＝2^m3^j+1（m, jは 0 以上の整数）であれば、折り紙で折ることができる。

しかし、11 は2^m3^j+1の形で表せないため、正 11 角形を折るためには、11 次方程式$z^{11}=1$を解く必要がある。この方程式の解は、

$$\cos\frac{2k\pi}{11}+i\sin\frac{2k\pi}{11}\ (k=0,1,\cdots,10)\ \cdots②$$

である。また、①より

$$z^{10}+z^9+\cdots+z+1=0\ \cdots③$$

を変形すると、5 次方程式

$$y^5+y^4-4y^3-3y^2+3y+1=0\ \cdots④$$

となるが、この方程式は代数的に解くことができないため、②を平方根や立方根だけで表すことができない。

したがって、正 11 角形は折れないことが示された。

３．３　多重折りで正 11 角形が折れる

以上より、正 11 角形は通常の折り方では折れないことが分かった。しかし、「多重折り」を用いると、折ることができる。

「多重折り」とは、2 本以上の折り線を同時につける折り方である。アルペリンとラングにより、一般の n 次方程式は $(n-2)$ 重折りによって解くことができると示されている。

正 11 角形を折るためには、⑤の 5 次方程式を解く必要があるため、3 重折りを用いる。

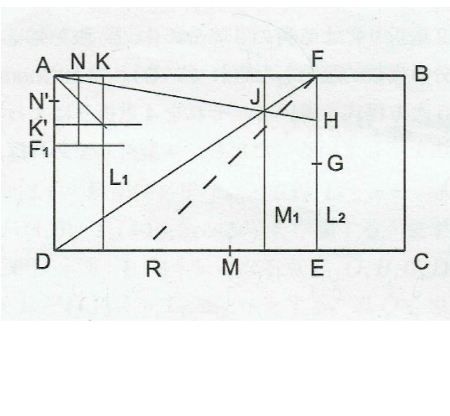
≪正 11 角形の作図手順≫

イ）縦横比が 1:2 の長方形 ABCD の辺 CD の中点を M とし、CM で 2 つ折りして垂直二等分線 EF を作図してこれを直線 L_2 とする。

ロ）EF の中点を G、FG の中点を H とし、直線 AH と DF の交点を J とする。点 J を通り、CD に垂直な直線を M_1 とする。

ハ）辺 AD を FE に重ねて折ったときに、直線 M_1 が重なる直線として L_1 を作図し、辺 AB との交点を K とする。

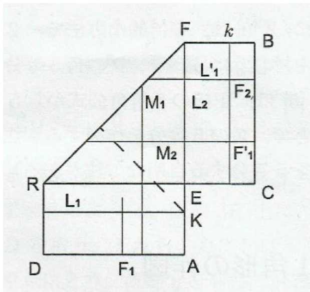
ニ）AK の中点を N とし、点 A を支点として点 K を AD 上に重なるように折ったときに、K、N が重なる点をそれぞれ K'、N' とする。そこで点 K' に関して N' と対称な点を F_1 とする。



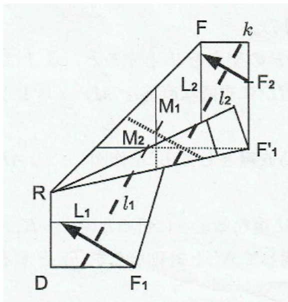
ホ）点 F を支点として直線 FK が FE に重なるように 45° の折り線 FR で山折りして、左半分を下側へ折る。

ヘ）点 K を通る FR の垂線で 2 つに折ったときに、辺 AD が重なる直線を k と表す。また、このとき、点 F_1 が重なる点を F_1' とおく。

ト）AF の垂直 2 等分線として直線 M_2 を作図し、直線 M_2 で 2 つに折ったときに、直線 L_1 が重なる直線 L_1' と直線 k の交点として F_2 を作図する。

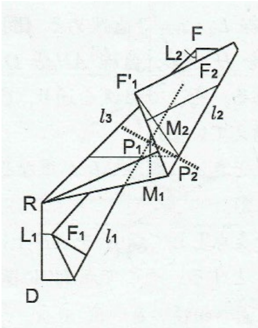


チ）点 F_1、F_2 が紙の端にくるように、直線 k で山折りして紙の右端を裏に折り込む。同じく直線 F F_1 で山折り、R F_1' で谷折りして、紙の端部分を裏に折り込む。

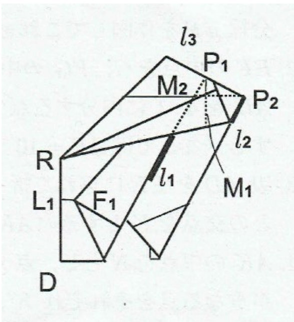


リ）下側の 1 枚は、点 F_1 が直線 L_1 に乗るように折り線 l_1 で折り、上側の 1 枚は、点が直線 L_2 に重なるように折り線 l_2 で折る（2 つの折り線 l_1、l_2 は平行）。

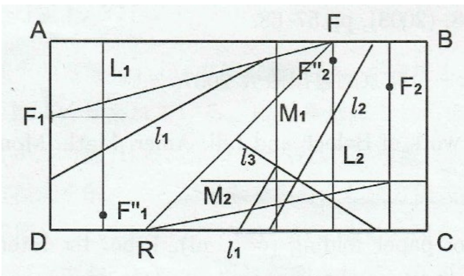
ヌ）折り線 l_1 と直線 M_1 との交点を P_1、折り線 l_2 と直線 M_2 の交点を P_2 とする。



ル）点 P_1、P_2 でそれぞれ折り線 l_1、l_2 を自分自身に重なるように垂直に折ったときに、これらの折り線が 1 つの直線 $l_3 = P_1P_2$ に一致するような、折り線 l_1、l_2、l_3 で折る。



ヲ）この折り方で、点 F_1、F_2 が重なった点をそれぞれ F_1''、F_2'' とする。紙を広げた状態で折り線 l_1 及び l_2 の傾きはそれぞれ $2\cos\dfrac{2\pi}{11}$ およびその逆数である。

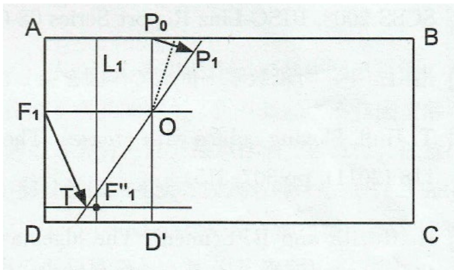


ワ）直線 L_1 で折ったときに、直線 AD が重なる直線を P_0D' とし、この直線と点 F_1 から横に伸びる折れ線との交点を O とする。

カ）点 F_1'' を通る AD の垂線を作図すると、この垂線と点 O の距離は $4\cos\dfrac{2\pi}{11}$ である。そこで点 O を支点として、点 F_1 がこの直線に重なるように折ったときに、F_1 が重なった点を T とすると、

$\angle TOD' = \dfrac{2\pi}{11}$ である。

ヨ）直線 TO を折り、点 O を支点として点 P_0 を TO の延長線上に重なるように折ったときに P_0 が重なった点を P_1 とすると、線分 P_0P_1 は O を中心とする正 11 角形の 1 辺となる。以下は、OP_1 に関して P_0 と対称な点を P_2、… と他の頂点を次々作図していけばよい。



３．４　まとめ

通常の折り方のみ用いることを考えると、折り紙で正 11 角形を折ることは不可能だが、3 重折りを用いれば、正 11 角形を折ることができる。

また、多重折りを用いると、折り紙ですべての正多角形が折ることができる。

４．参考文献

折紙の数学　https://www.juen.ac.jp/math/nakagawa/openh24origami.pdf

折り紙による 5 次方程式の解法　https://core.ac.uk/download/pdf/59041733.pdf