# ウィルバーフォース振り子の製作

6 年 B 組　神鳥 有沙
6 年 B 組　喜多 真優
指導教員　守本 寛治

## １．要約

上下運動とねじれ運動を交互に繰り返す振り子、ウィルバーフォース振り子の製作を試みた。実験的運動解析と理論的導出の末、ウィルバーフォース振り子の成立条件を導くことができた。また、振り子の製作を通してねじれ弾性定数の導出を行った。

キーワード　共振　ばね定数　ねじれ弾性定数　慣性モーメント　永久機関

## ２．研究の背景と目的

5 年次に 3D プリンタを用いて効率的な風力発電の研究を行った。その際に風力などの非継続的なエネルギー源を用いた発電装置ではなく永続的にエネルギーの供給が可能な発電装置を作れば、より多くのエネルギーが得られるのではないかと思い、永久機関のような発電装置を作りたいと考えた。この時に頭に浮かんだのが理科の教科書に必ず載っているコイルの中に金属棒を出し入れしたら電流が生じる電磁誘導を用いた発電装置である。この金属棒の動きを永久機関で再現できれば永続的な発電が可能となる。そこで目をつけたのがウィルバーフォース振り子である。ウィルバーフォース振り子は共振現象から、一見永久機関に見える不思議な振り子である。不思議な動きをするのにまだ実社会に応用されていないことを知り、工学的利用を目的に研究することにした。その際、手元にウィルバーフォース振り子がなかったので作ってみることにした。

## ３．研究内容

### ３．１序論

ウィルバーフォース振り子とは、1894 年にイギリスの物理学者ウィルバーフォースが発見した上下運動とねじれ運動が交互に起こる振り子である。

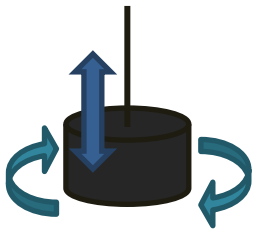

Fig.1：振り子の運動原理

この現象は振り子の上下運動（Fig1 の縦矢印）の周期とねじれ運動（Fig1 の回転矢印）の周期が一致することにより一振り子内で共振を起こす仕組みである。

### ３．２自作ウィルバーフォース振り子

方法 A)実験的運動解析

振り子のねじれ運動と上下運動の周期を測定し、周期の一致点を求める

使用したもの
バネ、おもり、スタンド、iPad、ストップウォッチ
a)手順
①スタンドにバネとおもりを固定する
②おもりを少し引き、回転方向に初速をつけて静かに離す
③上下運動とねじれ運動の様子を iPad に録画し、周期を測定する
④測定結果からおもりの調節を行う
①～③を 5 回繰り返し、その周期の平均を導出した。
b)使用したおもり
おもり i

Fig.2 おもり i ：原点

質量：$1.38 \times 10^{-1}$［kg］
円柱半径：$1.5 \times 10^{-2}$［m］
素材：フィルムケース、ねじ、ナット、鉄球、油粘土
おもり ii

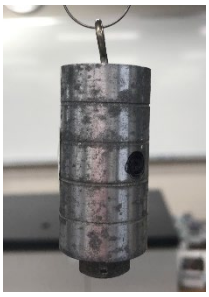

Fig.3 おもり ii ：おぼろ月

質量：$7.5 \times 10^{-2}$［kg］
円柱半径：$1.2 \times 10^{-2}$［m］
素材：アルミ製
おもり iii

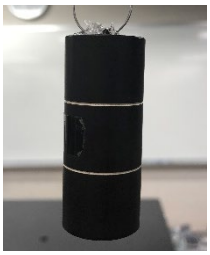

Fig.4 おもり iii ：炭火

質量：$3.5 \times 10^{-2}$［kg］
円柱半径：$1.2 \times 10^{-2}$［m］
素材：プラスチック
おもり iv

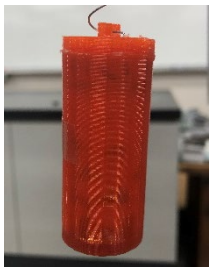

Fig.5 おもり iv ：希望の星

質量：
$1.09 \times 10^{-1}$［kg］
円柱半径：$1.39 \times 10^{-2}$［m］
素材：プラスチック、鉄球、油粘土

c)結果

| おもり | i | ii | iii | iv |
|---|---|---|---|---|
| 半径(m) | 0.015 | 0.012 | 0.012 | 0.0139 |
| 上下周期 | 0.74 | 0.52 | 0.47 | 0.68 |
| ねじれ周期 | 1.85 | 0.8 | 0.6 | 1.1 |

Fig.6 グラフ 1：振り子の周期測定結果の平均

表のように周期がなかなか一致しなかった。手動でのおもりの調節は非常に難しいことがわかったため、理論的に求めることにした。

方法 B) 理論的運動予測

a) 基本的物理量の測定

振り子の共振条件を探るとともに理論的導出に必要な物理量を得るために基本的な物理量の測定を行った。

a. 1) ばね定数$k$の測定

ばねの上端を固定し、スタンドに物差しを取り付け、おもりを吊るしたときのばねの伸び$\Delta z$を測定し、

$$k = \frac{mg}{\Delta z} \cdots (1)$$

が得られる。

一般にばね定数$k$のばねに質量$m$のおもりがつるされ、釣り合いの位置から$z$伸びている時、おもりの運動方程式は

$$\frac{md^2z}{dt^2} = -kz \cdots (2)$$

と表される。

つるされたおもりは上下に単振動し、ばね振り子と呼ばれている。(2) 式より、

角振動数$\omega_Z$は

$$\omega_Z = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdots (3)$$

周期Tは

$$\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}} \cdots (4)$$

と求められる。

a. 2) ねじれ弾性定数μと慣性モーメント$I$の測定

ウィルバーフォース振り子も一種のねじり振り子であるが、通常のねじり振り子は針金をくわえた支点から振り下げおもりまでの針金の長さは一定である。そこで振り下げおもりを吊るし、釣り合いの状態でばねの上端と下端を糸で結び、ばねが回転運動しかできないようにしようとした。しかし、糸での固定が難しかったので測定することができなかった。ここで、この実験が成功したと仮定して話を進める。一般に慣性モーメント$I$のねじれ振り子が釣り合いの位置から$\theta$だけねじれている時、生じる力のモーメントは回転角$\theta$に比例する。この時に振り子の回転の運動方程式は

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\mu\theta \cdots (5)$$

で、比例定数$\mu$はねじれ弾性定数である。

(5) 式は (2) 式と同型であり、ねじれ弾性による単振動が生じる。そのねじれ振り子の角振動数$\omega_\theta$および周期 T は

$$\omega_\theta = \sqrt{\frac{\mu}{I}} \cdots (6)$$

$$\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{I}} \cdots (7)$$

と表される。使用したおもりは半径$r$の円柱であるから、そのおもりの慣性モーメント I は

$$I = \frac{1}{2}mr^2 \cdots (8)$$

である。

b) a で導いた式を元に未知数を算出する

ウィルバーフォース振り子の成立条件により、(4) 式と (7) 式が等しい値を示せば良いので連立して、(8) 式を代入すると、

$$\mu = I\frac{4\pi^2}{T^2\mu} \cdots (9)$$

$$r^2 = \frac{2\mu}{kr^2} \cdots (10)$$

が得られる。よって (9) (10) 式に実測値 $m, k, r, t$（$m$= $1.38 \times 10^{-1}$［kg］,$k$=2.8［N/m］,$r$=$1.5 \times 10^{-2}$［m］,T=1.2616［s］）を代入すると、

$$\mu = 3.8 \times 10^{-4} \cdots (11)$$

$$r = 1.39 \times 10^{-2} \cdots (12)$$

が得られた。

このことからウィルバーフォース振り子としてこの振り子が上下運動とねじれ運動で共振を起こすためには半径$1.39 \times 10^{-4}$[m]の円柱をおもりに吊るす必要があることがわかった。

### ３．３考察

方法 A)おもりの形状調節により共振現象を観察することは容易ではなかった。3 種類のバネを切断し、9 個の異なる形状のおもりを製作し、それぞれ重さを変えて計 50 回ほどの実験を行うことで共振現象の確認とウィルバーフォース振り子の完成を目指したが、全て失敗した。またおもりの半径を方法 B に従って算出した数値を元に実験したが共振現象は確認できなかった。この失敗の原因はばね定数の k の測定誤差、算出された数値の誤り、ばねと実験装置の摩擦による減衰だと考える。

方法 B)方法 A で得られた実測値から上下運動の周期 T を測定し、慣性モーメントあるとねじれ弾性定数$\mu$を算出することに成功した。これにより、ばね固有のばね定数$k$とねじれ弾性定数$\mu$を求めることができれば、おもりの半径$r$のみの調節で共振現象を観察できることを発見し、理論上のウィルバーフォース振り子が完成した。

### ３．４結論

自作したウィルバーフォース振り子の基本的物理量を測定し、そのねじれ弾性定数$\mu$と慣性モーメント$I$を導出し、円柱型のおもりの半径$r = 1.39 \times 10^{-4}$[m]の付近で共振が起こることを予測した。時間不足のために予測通りの調整おもりを作り実験してみることができなかったが可能であれば確認実験を行いたかった。購入した既製品のウィルバーフォース振り子の運動解析も行なったが、ばねと実験装置の摩擦によるエネルギー損失が大きく見られ、永久機関として動くウィルバーフォース振り子としては遠いもののように思われた。

今後改良するのであれば、減衰を抑える対応が必要であるといえる。工学的利用を目指していたが、少しの引き具合の加減で運動が大きく変わってしまうことも大きく、もし発電装置として利用するのであれば、安定した電力供給は難しいと感じた。しかし、最近免震も兼ねて、高速道路の振動や微弱な地震を利用した共振現象に基づく発電装置も注目を集め始めているのでこれらの問題点が解決すれば工学的利用も夢ではないかもしれない。

### ４．参考文献


・浜島清利."物理のエッセンス"

・鈴木(三),布施,鈴木（茂）,伊藤."ウィルバーフォース振り子の運動".2012.9.11,p.161-167

・Jose Lois Castro. “The Wilberforce Pendulum”. Learning Scientific Programing with Python.2015.12.17