

4次完全方陣・対称方陣の性質

5年A組 今中 翔哉
指導教員 川口 慎二

1. 要約

サイエンス研究会数学班5年生は魔方陣について学んでいる。今回の研究では、前回の研究ではあまり触れることのなかった4次の完全方陣・対称方陣に関することについて研究を行い、わかったことについて考察を行った。今回は、それらを紹介していく。

キーワード 4次完全方陣、対称方陣、シフト変換

2. 研究の背景と目的

前回の研究では、4次方陣のもつ特有な性質について研究を行った。今回の研究では、4次方陣の中でも完全方陣と対称方陣の2つの方陣に焦点をあててそれらの性質や相違点、関係性について研究を行った。

今回の研究の主な目的は、完全方陣と対称方陣に見られる固有の性質をもちいて新たな性質を発見していくことである。その結果を、紹介していきたい。

$-g-j-m$)と、それらの平行な位置にある4個の要素からなる分離した対角線を称したものを指す。

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

図1

3. 研究内容

3-1. 定義

魔方陣とは1から始まる連続した自然数を碁盤の目状に並べ、各行、各行、および対角線の数の和(4次方陣では34)をすべて相等しくしたものをいう。一般に、1辺が n マスの魔方陣を n 次魔方陣という。

完全方陣とは行、列、および両対角線の数の和が一定になるだけでなく、汎対角線上の数の和も、すべて等しくなるような方陣のことをいう。ここで、汎対角線とは、図1の**主対角線**($a-f-k-p$)、**副対角線**(d

さらに、**対称方陣**とは、中心に関して対称となっている位置にある数の和がすべて一定(4次対称方陣の場合は17)となっている方陣のことをいう。

8	11	2	13
10	5	16	3
15	4	9	6
1	14	7	12

11	5	2	16
14	4	7	9
8	10	13	3
1	15	12	6

(4次完全方陣)

(4次対称方陣)

3-2. 4次方陣の基本性質

はじめに、完全方陣や対称方陣に関わらず、4次方陣一般に対して成り立つ基本的な性質を紹介しておく。

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

性質 1

$$a + d + m + p = 34$$

$$b + c + n + o = 34$$

$$e + i + h + l = 34$$

$$f + g + k + j = 34$$

性質 2

$$b + c = m + p, \quad e + i = d + p$$

$$n + o = a + d, \quad h + l = a + m$$

性質 3

$$a + p = g + j, \quad d + m = f + k$$

性質 4

$$f + g = i + l, \quad j + k = e + h$$

$$g + k = b + m, \quad f + j = c + o$$

これらの証明は参考文献[1]に記している。

3-3. 4次完全方陣

3-3-1 シフト変換

4次完全方陣は全部で48個ある。

完全方陣では、すべての汎対角線で定和をもつために、次のような性質をもつ。

n 次完全方陣においては、

- ①最下行を最上行の上側に移動させても、
 - ②最右列を最左列の左側に移動させても、
- つねに、 n 次完全方陣が得られる。

上記の①, ②の変換というのはシフト変換といわれる。それぞれ、行のシフト変換、列のシフト変換という。また、この変換は4次完全方陣のみならず、すべての完全方陣において成立する。以下に、この変換が成り立つ例を1つ挙げる。

5	16	3	10	→	11	2	13	8
4	9	6	15		5	16	3	10
14	7	12	1		4	9	6	15
11	2	13	8		14	7	12	1

この変換は、4次の完全方陣の性質を考えるうえで重要になってくる。

3-3-2 シフト変換で導かれる主な性質

次に、完全方陣に見られる特有な性質を挙げる。

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

4次方陣であるので、第1行、第3行、第1列、第3列の和に注目すると、

$$a + b + c + d = 34, \quad i + j + k + l = 34$$

$$a + e + i + m = 34, \quad c + g + k + o = 34$$

上の2式を足し、下の2式を足して比較すると、

$$b + j + l + d = e + g + m + o$$

となり、この左辺、右辺を足すと汎対角線

の和は 34 なので、 34×2 となり、

$$b + j + l + d = e + g + m + o = 34$$

となる。

この式は、シフト変換を用いることにより、すべての 3×3 の正方形の隅の数の和は、34 となる。…①

そして、完全方陣であるため、次のことも成り立つ。

$$e + j + o + d = 34, \quad m + j + g + d = 34$$

これらから、 $m + g = e + o$ 。

この性質と、①の性質を組み合わせることによって、

$$m + g = e + o = 17$$

とわかる。そして、この式にシフト変換を用いると 4組すべての 3×3 の正方形の対角和は 17 になることがわかる。

次に、完全方陣は 4 次方陣のもつ一般的な性質も満たすため、3-2 節で紹介したように、

$$f + g + k + j = 34$$

が自ずと成り立つので、この式にもシフト変換を用いると すべての 2×2 の正方形(9 組ある)の隅の和も 34 になることがわかる。

実際に 上記で示されたような性質が成り立つことを以下で確かめてほしい。

7	2	16	9
12	13	3	6
1	8	10	15
14	11	5	4

(例 1)

9	4	5	16
7	14	11	2
12	1	8	13
6	15	10	3

(例 2)

そして、明らかなことではあるが、これらは完全方陣では汎対角線の和が 34 であることと、シフト変換を利用できるという性

質を用いたものであるため、完全方陣以外の方陣に対しては成り立たない。

そして、シフト変換に注目すると完全方陣の場合は 3-2 節で挙げたような基本的性質を発展させたものとして次のような性質をもつ。

$$a + m = f + j, \quad d + p = g + k$$

$$a + d = f + g, \quad m + p = j + k$$

これらもシフト変換で導かれる。

このように完全方陣には多種多様な性質をもつことがわかる。

3-3-3 完全方陣の連続性

完全方陣では、シフト変換が使えるため、自ずと次のようなことがわかる。1つの完全方陣を平面上に、四方八方に敷き詰めると、 4×4 の正方形枠をどこに切り取っても、それが 4 次完全方陣になっている。

1	12	6	15	1	12	6	15
8	13	3	10	8	13	3	10
11	2	16	5	11	2	16	5
14	7	9	4	14	7	9	4
1	12	6	15	1	12	6	15
8	13	3	10	8	13	3	10
11	2	16	5	11	2	16	5
14	7	9	4	14	7	9	4

(例 3)

また、 $34 \equiv 2 \pmod{4}$ より、各行、各列、両対角線にある数を大きく 2 つに分けると、それぞれの数は 4 を法として、

$$0 + 2 = 1 + 1 \equiv 3 + 3 \equiv 2 \pmod{4}$$

となる。そしてそれら分けた 2 つの数をさらに細かく分けると 4 を法として

$$0+0+0+2=2$$

$$0+0+1+1=2$$

$$0+0+3+3\equiv 2$$

$$1+3+0+2\equiv 2$$

$$1+3+1+1\equiv 2$$

$$1+3+3+3\equiv 2$$

$$2+2+0+2\equiv 2$$

$$2+2+1+1\equiv 2$$

$$2+2+3+3\equiv 2$$

となり実際に 4 次完全方陣を各行・各列の数の和で分けると合計 9 つの型に分けられそうだが、実際は合計 48 個の完全方陣は次の 3 つの型でしか分けることができなかった(ただし、図は 4 を法としている)。

0	1	2	3
2	3	0	1
3	2	1	0
1	0	3	2

(A 型)

0	1	3	2
3	2	0	1
2	3	1	0
1	0	2	3

(B 型)

0	2	1	3
1	3	0	2
0	2	1	3
1	3	0	2

(C 型)

すなわち、各行、各列、両対角線には偶数と奇数が 2 つずつ現れている。また、4 次完全方陣は全部で 48 個あるため、それぞれの型の個数は 16 個。そして A 型、B 型はほとんど同じ型であり各行、各列に 4 の倍数が含まれている。このようにしてみる

と、4 次完全方陣を任意に選ぶとその各行、各列に 4 の倍数が含まれている確率は $\frac{2}{3}$ となることがわかる。

3-4. 4 次対称方陣

4 次対称方陣にもシフト変換と少し類似した操作が存在する。つまり、次のような変換を行っても異なる対称方陣が得られるのである。

- ① 第 1 行と第 4 行を入れ換える。
- ② 第 2 行と第 3 行を入れ換える。
- ③ 第 1 行と第 3 行、第 2 行と第 4 行を同時に入れ換える。
- ④ 第 1 列と第 4 列を入れ換える。
- ⑤ 第 2 列と第 3 列を入れ換える。
- ⑥ 第 1 列と第 3 列、第 2 列と第 4 列を同時に入れ換える。

11	5	2	16
14	4	7	9
8	10	13	3
1	15	12	6

①

1	15	12	6
14	4	7	9
8	10	13	3
11	5	2	16

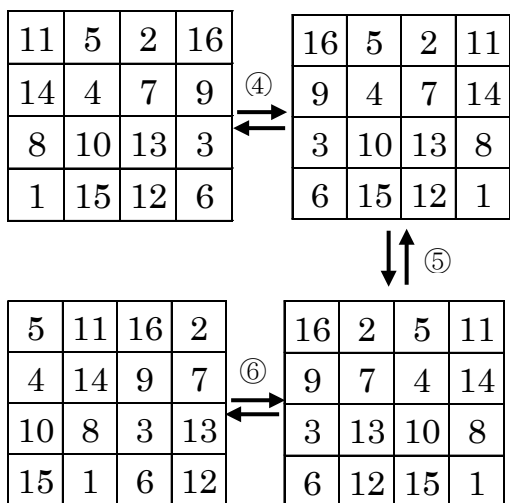
②

14	4	7	9
11	5	2	16
1	15	12	6
8	10	13	3

③

1	15	12	6
8	10	13	3
14	4	7	9
11	5	2	16

④, ⑤, ⑥についても同様に、以下のようになる。



また、4次の対称方陣は、その対称性から次のように、完全方陣の一部であるような性質が見られる。

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

図 1

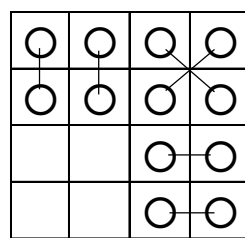
16	2	5	11
9	7	4	14
3	13	10	8
6	12	15	1

図 2

を任意に選びその各行、各列に4の倍数が並んでいる確率は $\frac{2}{3}$ となった。

3-4-1 完全方陣と対称方陣を結ぶ操作

すべての4次の対称方陣は次のような操作をすることにより完全方陣になることができる。



これを具体例に当てはめることにより確かめてみると、次に示すようになる。

16	5	2	11
9	4	7	14
3	10	13	8
6	15	12	1

図 3

9	4	14	7
16	5	11	2
3	10	8	13
6	15	1	12

図 4

対称方陣では、
 $b+o=e+l=17$, $c+n=h+i=17$
 が成り立つので汎対角線 e-b-o-l, c-h-i-n において、その和が完全方陣と同様 34 になるということである。しかし、他の 4本の汎対角線の和はどんな対称方陣でも 34 とならないので完全方陣とはいえない。

すなわち、完全方陣でもあり対称方陣でもあるような4次方陣は存在しないのである。

そして、4次対称方陣においても各行、各列、両対角線にある数字は偶数、奇数が2つずつになった。また、同様に対称方陣

実際に、図3に示した魔方陣は4次対称方陣になっており、それに操作を施した図4の魔方陣は4次完全方陣になっている。また、逆にこの操作を見ると任意の4次完全方陣にこの操作を施すとそれは4次の対称方陣になるのである。

ここから、わかることは4次の対称方陣の個数は完全方陣に等しい48個であるということである。

以下、この変換の仕組みについて簡単に説明する。

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

図 5

e	f	h	g
a	b	d	c
i	j	l	k
m	n	p	o

図 6

いま、図 5 の方陣が対称方陣であるとする。すると、

$$a + p = m + d = b + o = n + c = 17$$

$$e + l = i + h = f + k = j + g = 17$$

より、これを図 6 に適用する際には、3-3-2 節で挙げたようにすべての 3×3 の正方形の対角和が 17 になることを用いている。図 6 から図 5 においても同様のことがいえ、完全方陣の性質を使うと和が 17 になる数をうまく 4 次方陣の中心に関して対称の位置に置くことにより、4 次対称方陣が完成するわけである。

また、この対称方陣と完全方陣との間での変換を用いることで、対称方陣について以下のことが自ずとわかる。図 6 において 2×2 の正方形 $(e-f-b-a)$, $(h-g-d-c)$, $(l-k-o-p)$, $(i-j-n-m)$ に注目すると、これらはそれぞれその 2×2 の正方形の中だけでしか変換によって移動していないため、得られた対称方陣の 4 隅にある 2×2 の正方形の中の数の和は 34 になる(3-3-2 節の完全方陣の性質による)。

次に、図 5 で 3×3 の正方形の隅に位置する数に注目する。そして、図 6 のそれぞれの数の位置に注目すると、それらは 3-2 節で挙げたように数の和は 34 に等しいことがわかる。このことは、同時に図 5 (対称方陣)において、 3×3 の正方形の隅に位置する数の和も 34 となることを示している。

4. 研究の考察と今後の展望

今回の研究では、前回の 4 次方陣の性質に関する研究を更に限定して、4 次完全方陣や対称方陣の特有の性質など操作を使用することで自分なりの見解や考察を行うことができた。また、完全方陣と対称方陣の共通点・相違点についても見出すことができた。今後の課題は 4 次完全方陣・対称方陣の各行、各列、両対角線に並ぶ数の規則性やその数に関して、完全方陣や対称方陣の型の分類というものを扱っていきたい。そして、今回はあまり対称方陣の変換を用い考察することができなかつたため今後進めていきたい。また、前回と今回の研究では 4 次方陣しか扱うことができなかった。しかし、今後は 5 次方陣や 6 次方陣についても調べより発展的な内容を理解し研究を進めていきたい。

5. 参考文献

- [1] 「4 次方陣の性質に関する研究」、今中翔哉、奈良女子大学附属中等教育学校、平成 28 年度 SSH サイエンス研究会生徒研究論文集、p.79-85
- [2] 「魔方陣の世界」、大森清美、日本評論社(2013)

6. 謝辞

今回の研究にあたりご指導くださった顧問の川口先生ありがとうございました。

約数の総和についてⅢ

5年A組 小椋 晃一
指導教員 川口 慎二

1. 要約

サイエンス研究会数学班 5年生は約数の総和について学習している。今回は過剰数の割合の評価を目的とした。その過程において、約数の総和に関する考察を行うことができたので紹介する。

キーワード 過剰数、原始過剰数、メルセンヌ素数、素数、割合

2. 研究の背景と目的

約数の総和によって、自然数は3種類に分類できる。しかし、異なる自然数間にも関連があり、その関連を倍数として見ることができた。今回は原始過剰数を中心に、昨年度の論文にいくつか加えることができた。

3. 研究内容

3-1. 定義

本稿では、昨年度の論文[4]と同じ定義を用いる。

また、素数を順に p_1, p_2, p_3, \dots とする。

例えば、 $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$ である。

また、ある無限集合の n 以下における個数を $\pi(n)$ としたとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{n}$ を、その

集合の割合とする。例えば偶数の割合は

$$\frac{n-1}{2} \leq \pi(n) \leq \frac{n}{2} \text{ より } \frac{1}{2} \text{ であり、3の倍数}$$

の割合は $\frac{n-2}{3} \leq \pi(n) \leq \frac{n}{3} \text{ より } \frac{1}{3}$ である。

3-2. 主たる結果

命題 1

$$\frac{\sigma(p_a)}{p_a} > \frac{\sigma(p_{a+1}^\alpha)}{p_{a+1}^\alpha} \text{ が成り立つ。}$$

(証明)

$p_{a+1} \geq p_a + 1$ であり、[4](命題 12)より、

$$\frac{\sigma(p_a)}{p_a} = \frac{p_a + 1}{p_a} \geq \frac{p_{a+1}}{p_{a+1} - 1} > \frac{\sigma(p_{a+1}^\alpha)}{p_{a+1}^\alpha} \quad (\text{Q. E. D.})$$

命題 2

1 でない任意の数 k について

$p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x}$
が原始過剰数となる x が存在する。

(証明)

1 でない任意の数 k について

$$\frac{\sigma(p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x})}{p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x}} > 2$$

となる x が存在し([4]命題 8 の証明)、最小

の x をとると

$$\frac{\sigma(p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x-1})}{p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x-1}} < 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。

ここで、すべての $k \leq i \leq k+x$ について、

$$p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+i-1} p_{k+i+1} \cdots p_{k+x}$$

が不足数と示せばよい。

[4]における補題と①より、

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma(p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+i-1} p_{k+i+1} \cdots p_{k+x})}{p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+i-1} p_{k+i+1} \cdots p_{k+x}} \\ &= \frac{\sigma(p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x})}{p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x}} \frac{p_i}{p_i + 1} \\ &= \frac{\sigma(p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x-1})}{p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x-1}} \frac{p_i}{p_i + 1} \frac{p_{k+x} + 1}{p_{k+x}} \\ &= \frac{\sigma(p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x-1})}{p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x-1}} \frac{p_i p_{k+x} + p_i}{p_i p_{k+x} + p_{k+x}} \\ &< 2 \end{aligned}$$

よって、 $p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x}$ は原始過剰数である。(Q. E. D.)

命題 3

$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_k$ として

$p_{a_1} p_{a_2} p_{a_3} \cdots p_{a_{k-1}}$ が不足数であり、

$p_{a_1} p_{a_2} p_{a_3} \cdots p_{a_k}$ が過剰数ならば、

$p_{a_1} p_{a_2} p_{a_3} \cdots p_{a_k}$ は原始過剰数である。

この命題 3 は、命題 1 と同様に示すことができる。

命題 4

任意の素数 p_a について、 p_a の倍数の原始過剰数が無数に存在する

(証明)

任意の素数 p_a について、 p_a の倍数の原始過剰数が無数に存在することを示せばよい。

$p_a = 2$ は、偶数の原始過剰数が無数に存在する[(4)]ため成り立つ。 $p_a \neq 2$ のとき、 $p_a < p_k$ をみたすすべての k について

$$\frac{\sigma(p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x})}{p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x}} > 2 \frac{p_a}{p_a + 1}$$

となる x が存在するため、

$$\frac{\sigma(p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x})}{p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x}} \frac{p_a + 1}{p_a} > 2$$

$$\frac{\sigma(p_a p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x})}{p_a p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x}} > 2$$

以下、命題 1 と同様に

$p_a p_k p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+x}$ が原始過剰数と示せる。 k が無数に存在するため、 p_a の倍数の原始過剰数が無数に存在する。(Q. E. D.)

命題 5

3 以上の任意の高さについて、原始過剰数が存在する。

(証明)

$2^n p$ を考える。このとき、高さは $n+1$ なので、 $n \geq 2$ のとき $2^n < p < 2^{n+1} - 1$ をみたす素数が存在すると示せばよい。

ベルトランの仮説より、

$$2^n - 1 < p < 2(2^n - 1)$$

$$2^n - 1 < p < 2^{n+1} - 2$$

を満たす素数が存在する。(Q. E. D.)

命題 6

2 のべき乗として表せる数の割合は 0 である。

(証明)

k 以下の 2 のべき乗の個数を $\pi(k)$ とする。 $2^{n-1} \leq x < 2^n$ として、 $\pi(2^n) = n+1$ より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(2^n)}{2^{n-1}} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(2^n)}{2^n} = 0$$

はさみうちの原理より、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0$.

(Q. E. D.)

命題 7

$2^n p$ と表せる原始過剰数の割合は 0

(証明)

n 以下における素数の個数を $\pi(n)$ 、 n 以下における $2^n p$ と表せる原始過剰数の個数を $\pi'(n)$ とする。

$$\text{素数定理より、} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{n} = 0.$$

また、 $\pi'(n) < \pi(n)$ よりはさみうちの原理から、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi'(n)}{n} = 0$. (Q. E. D.)

同様にして、偶数の完全数の割合が 0 と示せる。

命題 8

過剰数の割合は、少なくとも 0.236 である。

(証明)

完全数・原始過剰数である $6, 20, 28$ の倍数から完全数自身を除いたものは、過剰数の部分和といえる。完全数自身は有限個であり、割合に影響しないので、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{n} &> \frac{1}{6} + \frac{1}{20} + \frac{1}{28} - \frac{1}{6 \cdot 20} - \frac{1}{6 \cdot 28} \\ &\quad - \frac{1}{20 \cdot 28} + \frac{1}{6 \cdot 20 \cdot 28} \\ &> 0.236. \quad (\text{Q. E. D.}) \end{aligned}$$

この方法で過剰数の割合を近似することができる。しかし、簡単な計算ではなく、近似が遅い。

4. 今後の課題

予想 1

原始過剰数の割合は 0 である。

実験的に予想したものである。 5000 以下の原始過剰数は 49 個、 100 万以下の原始過剰数は 1733 個である。

予想 2

同じ高さの原始過剰数は有限個である。

同じ高さの過剰数は無限個であること、原始過剰数全体の個数は無限個であること、 3 以上の高さ x について、原始過剰数が存在することは示したが、この予想の証明はできていない。

予想 3

ある高さについて、 $\frac{\sigma(n)}{n}$ が最も 2 に近い不足数が存在する

予想 4

平方数の原子過剰数は無数に存在する。

なお、平方数の原始過剰数は今のところ見つかっていないが、存在すると予想している。

5. 参考文献

- [1] 「数論の精選 104 問」、Titu Andreescu Dorin, Andrica, Zuming Feng 著、小林一章、鈴木晋一監訳、清水俊宏、西本将樹訳、朝倉書店
- [2] 「直感を裏切る数学 「思い込み」にだまされない数学的思考法」、神永正博、講談社
- [3] 「約数の総和について」、小椋晃一、奈良女子大学附属中等教育学校平成 27 年度 SSH 生徒研究論文集、p.36-42
- [4] 「約数の総和についてⅡ」、小椋晃一、奈良女子大学附属中等教育学校平成 28 年度 SSH 生徒研究論文集、p.68-78

6. 謝辞

今回の研究にあたりご指導くださった顧問の川口先生、ありがとうございました。また、その他にもサイエンス研究会をはじめとした多くの方々に協力や助言をいただきました。ありがとうございました。

幾何の定理の別証明

5年B組 林 建吾

5年C組 古宮 昌典

指導教員 川口 慎二

1. 要約

サイエンス研究会数学班5年生は定理の別証明について研究している。今回は、平面幾何における定理の別証明を考え、幾何学の様々なアプローチについて学んだ。

キーワード 証明、計算による解法、初等幾何的解法

2. 研究の背景と目的

I 期中間考査に出題された幾何の証明問題について、答え合わせをしていたところ、さまざまな解法があることに気がついた。そこで、平面幾何の定理の証明方法について、すでに知られているものも含め、まとめることにした。

3. 研究内容

3-1. I 期中間考査最終問題の証明

次が、5年「代数・幾何」I 期中間考査で出題された問題である。

問題

$\triangle ABC$ の辺 BC を $1:2$ に内分する点を D とする。このとき、

$$2AB^2 + AC^2 = 3(AD^2 + 2BD^2)$$

が成り立つことを示せ。

3-1-1 三平方の定理を用いた解法

三平方の定理のみを用いて証明することもできる。

点 A から辺 BC へ降ろした垂線の足を H

とする。 H の位置によって以下の4つの場合が考えられるが、ここでは(i)の証明のみ与える。(ii), (iii), (iv)についても同様に示せる。

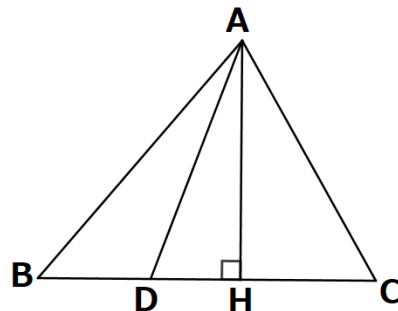
(i) 線分 CD 上に点 H がある場合

(ii) 線分 BD 上に点 H がある場合

(iii) 半直線 DC 上であって $\triangle ABC$ の外部に点 H がある場合

(iv) 半直線 DB 上であって $\triangle ABC$ の外部に点 H がある場合

<(i)の証明>



$\triangle ABH$ において、三平方の定理より

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

$$BH = BD + DH$$

であるから、

$$AB^2 = AH^2 + (BD + DH)^2$$

$$= AH^2 + BD^2 + 2BD \cdot DH + DH^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

また、 $\triangle ACH$ において、三平方の定理より

$$AC^2 = AH^2 + CH^2$$

$$= AH^2 + (CD - DH)^2$$

$$= AH^2 + CD^2 - 2CD \cdot DH + DH^2,$$

$CD = 2BD$ より、

$$AC^2 = AH^2 + 4BD^2 - 4BD \cdot DH + DH^2$$

$\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1} \times 2 + \textcircled{2}$ より、

$$2AB^2 + AC^2$$

$$= 2(AH^2 + BD^2 + 2BD \cdot DH + DH^2)$$

$$+ AH^2 + 4BD^2 - 4BD \cdot DH + DH^2$$

$$= 6BD^2 + 3AH^2 + 3DH^2$$

$\triangle ADH$ において、三平方の定理から

$$AH^2 + DH^2 = AD^2 \text{ であるので、}$$

$$2AB^2 + AC^2 = 6BD^2 + 3AH^2 + 3DH^2$$

$$= 3(2BD^2 + AD^2)$$

を得る。 (Q. E. D.)

3-1-2 座標を用いた解法

座標を用いる場合、原点をおく場所によって以下の 3 つの証明方法が考えられる。

(I) BC が x 軸と一致し、 D を原点におく。

(II) BC が x 軸と一致し、 B または C を原点におく。

(III) 3 点すべてを文字でおく。

ここでは、(III) の証明のみを挙げる。

<証明>

$A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ とおくと、 $D\left(\frac{2b_1 + c_1}{3}, \frac{2b_2 + c_2}{3}\right)$ と表せる。

$$\text{(左辺)} = 2AB^2 + AC^2$$

$$= 2\left\{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2\right\} + \left\{(a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2\right\}$$

$$= 2(a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2) + a_1^2 - 2a_1c_1 + c_1^2 + a_2^2 - 2a_2c_2 + c_2^2$$

$$= 2a_1^2 - 4a_1b_1 + 2b_1^2 + 2a_2^2 - 4a_2b_2 + 2b_2^2 + a_1^2 - 2a_1c_1 + c_1^2 + a_2^2 - 2a_2c_2 + c_2^2$$

$$= 3a_1^2 + 2b_1^2 + c_1^2 - 4a_1b_1 - 2c_1a_1 + 3a_2^2 + 2b_2^2 + c_2^2 - 4a_2b_2 - 2c_2a_2$$

$$\text{(右辺)} = 3(AD^2 + 2BD^2)$$

$$= 3\left[\left\{\left(a_1 - \frac{2b_1 + c_1}{3}\right)^2 + \left(a_2 - \frac{2b_2 + c_2}{3}\right)^2\right\} + 2\left\{\left(b_1 - \frac{2b_1 + c_1}{3}\right)^2 + \left(b_2 - \frac{2b_2 + c_2}{3}\right)^2\right\}\right]$$

$$\begin{aligned}
&= 3 \cdot \frac{1}{9} \left[\left\{ (3a_1 - 2b_1 - c_1)^2 + (3a_2 - 2b_2 - c_2)^2 \right\} + 2 \left\{ (b_1 - c_1)^2 + (b_2 - c_2)^2 \right\} \right] \\
&= \frac{1}{3} (9a_1^2 + 6b_1^2 + 3c_1^2 - 12a_1b_1 - 6c_1a_1 + 9a_2^2 + 6b_2^2 + 3c_2^2 - 12a_2b_2 - 6c_2a_2) \\
&= 3a_1^2 + 2b_1^2 + c_1^2 - 4a_1b_1 - 2c_1a_1 + 3a_2^2 + 2b_2^2 + c_2^2 - 4a_2b_2 - 2c_2a_2
\end{aligned}$$

ゆえに、(左辺)=(右辺)が成り立つ。(Q. E. D.)

3-1-3 余弦定理を用いた解法

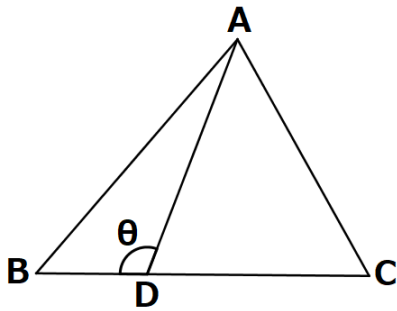
余弦定理を用いると以下のように証明できる。

$$2AB^2 + AC^2 = 3(AD^2 + 2BD^2)$$

ゆえに、(左辺)=(右辺)が成り立つ。

(Q. E. D.)

<証明>



$\angle ADB = \theta$ とおくと、 $\triangle ADB$, $\triangle ADC$ において、それぞれ余弦定理から、

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cos \theta \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}
AC^2 &= AD^2 + CD^2 \\
&\quad - 2AD \times CD \cos(180^\circ - \theta)
\end{aligned}$$

$BD : CD = 1 : 2$ より $CD = 2BD$ であるので、

$$AC^2 = AD^2 + 4BD^2 + 4AD \cdot BD \cos \theta \quad \dots \textcircled{2}$$

ここで、 $\textcircled{1} \times 2 + \textcircled{2}$ より

$$\begin{aligned}
2AB^2 + AC^2 &= 2AD^2 + 2BD^2 - 4AD \cdot BD \cos \theta \\
&\quad + AD^2 + 4BD^2 + 4AD \cdot BD \cos \theta
\end{aligned}$$

整理すると、

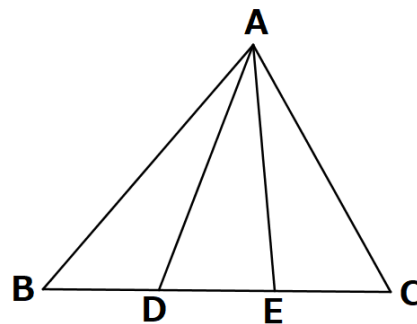
3-1-4 中線定理を用いた解法

補助線の引き方によって 2 通りの証明方法がある。

(I) 図形の内側に補助線を引く

<証明>

下図のように、線分 CD の中点 E をとる。



$BD : DC = 1 : 2$ であるから、 $BD = DE = EC$ が成り立つ。よって、点 D は線分 BE の中点であるから、 $\triangle ABE$ において中線定理より、

$$AB^2 + AE^2 = 2BD^2 + 2AD^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

また、点 E は線分 CD の中点であるから、 $\triangle ACD$ において中線定理より、

$$AD^2 + AC^2 = 2DE^2 + 2AE^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

①×2より

$$2AB^2 + 2AE^2 = 4BD^2 + 4AD^2 \dots ③$$

また、②において $BD = DE$ であるから、

$$AD^2 + AC^2 = 2BD^2 + 2AE^2,$$

$$2AE^2 = AD^2 + AC^2 - 2BD^2 \dots ④$$

④を③に代入して、

$$\begin{aligned} 2AB^2 + (AD^2 + AC^2 - 2BD^2) \\ = 4BD^2 + 4AD^2. \end{aligned}$$

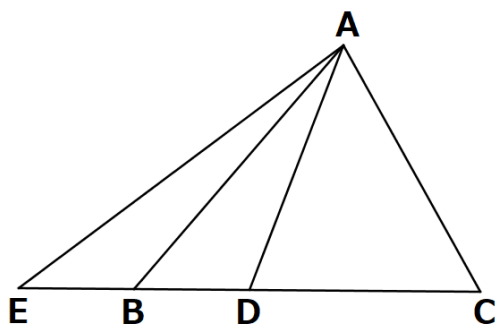
整理すると求める式が得られる。

(Q. E. D.)

(II) 図形の外側に補助線を引く

<証明>

下図のように、線分 CD を $1:2$ に外分する点 E をとる。



$BD:DC = 1:2$ であるから、 $EB = BD$, $ED = DC$ が成り立つ。よって、点 D は線分 EC の中点であるから、 $\triangle AEC$ において中線定理より、

$$AE^2 + AC^2 = 2ED^2 + 2AD^2 \dots ①$$

また、点 B は線分 ED の中点であるから、 $\triangle AED$ において中線定理より、

$$AE^2 + AD^2 = 2EB^2 + 2AB^2 \dots ②$$

①において、 $ED = 2BD$ より、

$$AE^2 + AC^2 = 8BD^2 + 2AD^2 \dots ③$$

また、②において $EB = BD$ であるから、

$$AE^2 + AD^2 = 2BD^2 + 2AB^2,$$

$$AE^2 = 2BD^2 + 2AB^2 - AD^2 \dots ④$$

④を③に代入して、

$$\begin{aligned} (2BD^2 + 2AB^2 - AD^2) + AC^2 \\ = 8BD^2 + 2AD^2. \end{aligned}$$

整理すると求める式

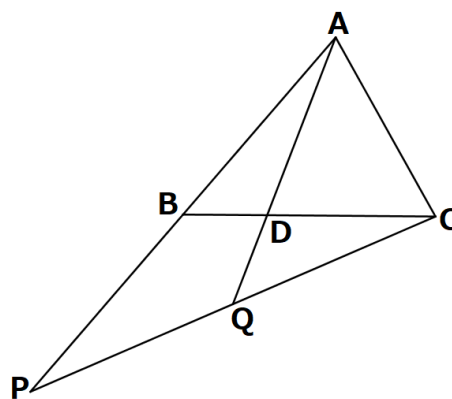
$$\begin{aligned} 2AB^2 + AC^2 = 6BD^2 + 3AD^2 \\ = 3(2BD^2 + AD^2) \end{aligned}$$

が得られる。(Q. E. D.)

3-1-5 三角形の重心を用いた解法

D が辺 BC を $1:2$ に内分していることから、重心の性質を用いた証明ができる。

<証明>



線分 AB を $2:1$ に外分する点 P をとり、線分 PC の中点を Q とする。いま、点 D は線分 BC を $1:2$ に内分しているの、点 D は $\triangle APC$ の重心である。ゆえに、3点 A, D, Q は同一直線上にある。

$\triangle APC$ において、(CP を底辺とみて)中線定理より、

$$AP^2 + AC^2 = 2PQ^2 + 2AQ^2 \dots ①$$

$$AD:DQ = 2:1 \text{ より、} AQ = \frac{3}{2}AD$$

であり、 $AP = 2AB$ なので①に代入すると、

$$4AB^2 + AC^2 = 2PQ^2 + \frac{9}{2}AD^2.$$

両辺を2倍して、

$$8AB^2 + 2AC^2 = 4PQ^2 + 9AD^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

を得る。

いま、 $\triangle CPA$ において点Bは辺APの中点であるから、(APを底辺とみて)中線定理より、

$$CA^2 + CP^2 = 2AB^2 + 2CB^2 \quad \dots \textcircled{3}$$

が成り立つ。

いま、 $CA = 2PQ$ 、 $BC = 3BD$ であるから、③に代入して、

$$\begin{aligned} AC^2 + 4PQ^2 &= 2AB^2 + 18BD^2, \\ 4PQ^2 &= 2AB^2 + 18BD^2 - AC^2. \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

②に④を代入して、

$$\begin{aligned} 8AB^2 + 2AC^2 \\ = (2AB^2 + 18BD^2 - AC^2) + 9AD^2 \end{aligned}$$

整理すると

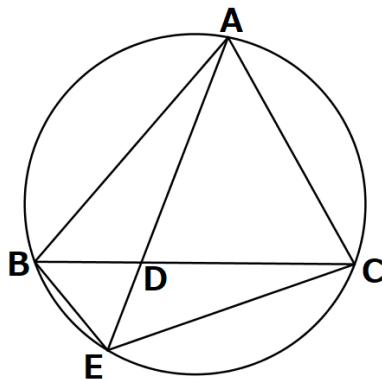
$$6AB^2 + 3AC^2 = 18BD^2 + 9AD^2$$

両辺を3で割って整理すると、求める式が得られる。(Q. E. D.)

3-1-6 外接円を用いた解法

$\triangle ABC$ の外接円を考えることで以下のような証明ができる。

<証明>



$\triangle ABC$ の外接円と、直線ADとの(Aとは異なる)交点をEとする。

方べきの定理より、

$$BD \times DC = AD \times DE.$$

$DC = 2BD$ より、

$$2BD^2 = AD \times DE.$$

ゆえに

$$DE = \frac{2BD^2}{AD} \quad \dots \textcircled{1}$$

$\triangle ABE$ と $\triangle ACE$ において、

$BD:DC = 1:2$ なので、 $\triangle ABE$ と $\triangle ACE$ の面積比は1:2となる。

一方、

$$\triangle ABE = \frac{1}{2} \times AB \times BE \times \sin \angle ABE$$

$$\triangle ACE = \frac{1}{2} \times AC \times CE \times \sin \angle ACE$$

$$= \frac{1}{2} \times AC \times CE \times \sin(180^\circ - \angle ABE)$$

$$= \frac{1}{2} \times AC \times CE \times \sin \angle ABE$$

とかけるので、 $\triangle ABE$ と $\triangle ACE$ の面積比は $(AB \times BE):(AC \times CE)$ となる。

ゆえに、

$$(AB \times BE):(AC \times CE) = 1:2$$

が成り立つので、

$$2AB \times BE = AC \times CE$$

よって、

$$BE:CE = AC:2AB$$

が成り立つ。よって正の実数kを用いて、

$$BE = kAC, \quad CE = 2kAB \quad \dots \textcircled{2}$$

とかける。

先ほどと同様にして、

$$(AB \times AC):(BE \times EC) = AD:DE$$

$$AB \times AC \times DE = AD \times BE \times EC$$

①、②を代入して、

$$AB \times AC \times \frac{2BD^2}{AD} = AD \times kAC \times 2kAB$$

これを k について解くと、

$$k = \frac{BD}{AD}$$

②より、

$$BE = \frac{AC \times BD}{AD}, \quad CE = \frac{2AB \times BD}{AD} \quad \dots \textcircled{3}$$

を得る。

トレミーの定理より、

$$\begin{aligned} AB \times CE + AC \times BE &= AE \times BC \\ &= (AD + DE) \times BC \end{aligned}$$

①, ③を代入して、

$$\begin{aligned} AB \times \frac{2AB \times BD}{AD} + AC \times \frac{AC \times BD}{AD} \\ = \left(AD + \frac{2BD^2}{AD} \right) \times BC \end{aligned}$$

$BC = 3BD$ より、

$$\begin{aligned} \frac{2AB^2 \times BD}{AD} + \frac{2AC^2 \times BD}{AD} \\ = \left(\frac{AD^2 + 2BD^2}{AD} \right) \times 3BD \end{aligned}$$

両辺に $\frac{AD}{BD}$ をかけて整理すると、

$$2AB^2 + AC^2 = 3(AD^2 + 2BD^2)$$

となり、示された。(Q. E. D.)

3-1-7 ベクトルを用いた解法

ベクトルを用いると、比較的簡潔に証明することができる。

<証明>

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c} \text{ とおくと、}$$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2\vec{b} + \vec{c}}{3},$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{2\vec{b} + \vec{c}}{3} - \vec{b} = \frac{-\vec{b} + \vec{c}}{3}$$

と表せる。

$$\text{(左辺)} = 2|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = 2|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$$

$$\text{(右辺)} = 3\left(|\overrightarrow{AD}|^2 + 2|\overrightarrow{BD}|^2\right)$$

$$= 3\left(\left|\frac{2\vec{b} + \vec{c}}{3}\right|^2 + 2\left|\frac{-\vec{b} + \vec{c}}{3}\right|^2\right)$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{9} \left\{ 4|\vec{b}|^2 + 4\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 + 2\left(|\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{3} \left(6|\vec{b}|^2 + 3|\vec{c}|^2 \right) = 2|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$$

ゆえに、(左辺)=(右辺)が成り立つ。

(Q. E. D.)

3-2. スチュワートの定理の証明

3-1節で考えた問題の一般化であるスチュワートの定理の証明方法について考えた。

スチュワートの定理

$\triangle ABC$ において、辺 BC を $m:n$ に内分する点を D とするとき、以下が成り立つ。

$$nAB^2 + mAC^2 = (m+n)(BD \cdot DC + AD^2)$$

3-1節で述べた証明方法のうち、「中線定理を用いた解法」と「重心の性質を用いた解法」以外の解法はすべてスチュワートの定理の証明にもそのまま適用できる。中線定理を用いた解法については、同様の証

明によって m と n がともに有理数である場合は解決できる。ここで、求める式を AD の長さを求める関数とみると、明らかにこの関数は連続であるから、 m または n が無理数である場合もこの等式が成り立つことがわかる。

3-3. オイラーの定理の証明

平面幾何におけるオイラーの定理について、初等幾何での別証明を考えた。

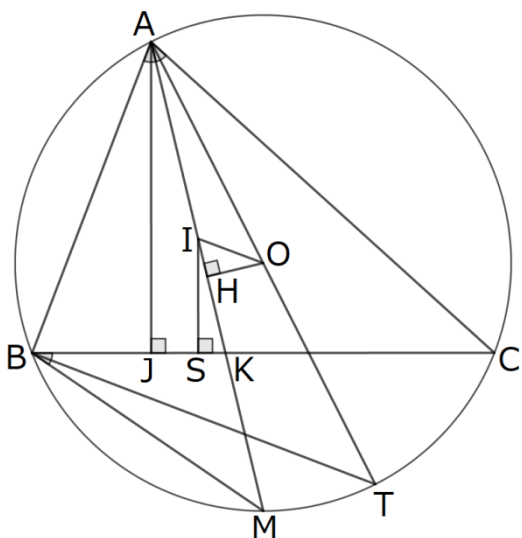
オイラーの定理

三角形について、外心と内心の距離を d 、外接円の半径を R 、内接円の半径を r とするとき、以下が成り立つ。

$$d^2 = R^2 - 2Rr$$

すでに知られている初等幾何的な証明については参考文献[1]を参照されたい。また、ベクトルを用いた証明もよく知られている。

<証明>



$\triangle ABC$ の外接円を Γ とする。また、上図のように、直線 AI と Γ の交点を M 、直線 AO と Γ の交点を T 、点 O から直線 AM へ降ろした垂線の足を H 、点 A から直線 BC へ降ろした垂線の足を J 、直線 AM と辺 BC の交点を K 、点 I から辺 BC へ降ろした垂線の足を S とする。

まず、 $OH \perp AM$ より、 $AH = HM$ が成り立つ。 $\triangle OIH$ 、 $\triangle OAH$ について、三平方の定理より、

$$\begin{aligned} OI^2 &= OH^2 + IH^2 \\ &= OH^2 + (AH - AI)^2 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$OH^2 = OA^2 - AH^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

②を①へ代入して、

$$\begin{aligned} OI^2 &= OA^2 - AH^2 + (AH - AI)^2 \\ &= R^2 - 2AH \cdot AI + AI^2 \\ &= R^2 - AI(2AH - AI) \\ &= R^2 - AI(MH + HI) \\ &= R^2 - AI \cdot IM \end{aligned}$$

ゆえに、 $AI \cdot IM = 2Rr$ を示せばよい。

線分 AT は Γ の直径なので、

$\angle ABT = 90^\circ$ が成り立つ。また、円周角の定理より、 $\angle ATB = \angle ACB$ が成り立つので、 $\triangle ABT$ と $\triangle AJC$ は相似である。よって、

$$AB : AJ = AT : AC$$

$$AJ = \frac{AB \cdot AC}{AT} = \frac{AB \cdot AC}{2R}$$

を得る。また、 $AJ \parallel IS$ であるから、 $\triangle AJK$ と $\triangle ISK$ は相似なので、

$$AK : IK = AJ : IS$$

$$AK : IK = \frac{AB \cdot AC}{2R} : r$$

$$IK \cdot \frac{AB \cdot AC}{2R} = r \cdot AK$$

$$\frac{IK \cdot AB \cdot AC}{AK} = 2Rr \quad \dots \textcircled{3}$$

が成り立つ。また、 $\angle BAM = \angle KAC$ 、 $\angle AMB = \angle ACK$ より、 $\triangle ABM$ と $\triangle AKC$ は相似なので、

$$AB : AK = BM : KC$$
$$BM = \frac{AB \cdot KC}{AK}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\angle IBM &= \angle IBC + \angle CBM \\ &= \angle ABI + \angle CAM \\ &= \angle ABI + \angle BAI \\ &= \angle BIM\end{aligned}$$

より、 $BM = IM$ が成り立つので、

$$IM = \frac{AB \cdot CK}{AK} \dots \textcircled{4}$$

また、線分 CI は $\angle ACK$ の二等分線であるから、

$$AC : CK = AI : IK$$
$$\frac{AC \cdot IK}{CK} = AI \dots \textcircled{5}$$

ゆえに、 $\textcircled{3}, \textcircled{4}, \textcircled{5}$ より、

$$\begin{aligned}AI \cdot IM &= \frac{AC \cdot IK}{CK} \cdot \frac{AB \cdot CK}{AK} \\ &= \frac{IK \cdot AB \cdot AC}{AK} \\ &= 2Rr\end{aligned}$$

よって、示された。(Q. E. D.)

4. 考察

幾何の定理の証明では、初等幾何的な解法は発想が求められることがしばしばあるが、簡潔に示すことができることが多い。また、計算による解法は発想を必要としないので、証明しやすいが、計算量が膨大となる場合もある。また、計算量は座標の設定などで変わってくる。

4. 今後の課題

今回は幾何の定理について別証明を行ったが、他の分野の定理についても別証明を考えていきたい。また、別証明から新しい定理を導出することも考えていきたい。

5. 参考文献

[1] web サイト「高校数学の美しい物語」
<https://mathtrain.jp/euler>

6. 謝辞

今回の研究にあたり、ご指導くださいました顧問の川口先生ありがとうございました。

素数に関する考察

5年B組 山名 大二郎
指導教員 川口 慎二

1. 要約

サイエンス研究会数学班5年生は素数について学習している。今回は、ウィルソンの定理を素数判定としてより簡単に計算できるように研究した。また、フェルマーの小定理の別証明を試みたので、その研究過程を記す。

キーワード 素数、合同式

2. 研究の背景と目的

私は、素数の分布に関する公式が見つからない数字に興味をもち、素数に関する様々な定理について調べ、考察をしたので、それを本稿にまとめることにする。

3. 研究内容

3-1. ウィルソンの定理の応用

定理1 (ウィルソンの定理)

p を素数とすると、次が成り立つ：

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

(証明)

$p=2$ のとき、

$(2-1)! \equiv -1 \pmod{2}$ より成立。

以下、 $p \geq 3$ とする。 m を $1 \leq m \leq p-1$ である整数として、

$$m, 2m, 3m, \dots, (p-1)m$$

について考える。これらに含まれる2数

am, bm ($a > b$) において、 $am \equiv bm$

\pmod{p} と仮定すると、 $(a-b)m \equiv 0$

\pmod{p} となるが、 $1 \leq a-b < p$ であり、かつ p と m は互いに素なので、これは矛盾

する。よって、 $m, 2m, 3m, \dots, (p-1)m$ を

p で割った余りはすべて異なる。したがって、 $mn \equiv 1$ となる n が1から $p-1$ の間にただ1つ存在する。

$m = n$ のとき、

$$m^2 \equiv 1, (m-1)(m+1) \equiv 0 \pmod{p}$$

合同式の性質より、 $m-1 \equiv 0$ または $m+1 \equiv 0 \pmod{p}$ 。

よって、 $m \neq 1, p-1$ のとき $m \neq n$ となる。また、 $2 \leq m \leq p-2$ の範囲で $n=1, p-1$ のときそれぞれ、 $mn = m, mp-m$ となり、どちらも p で割った余りが1にならない。よって $2, 3, \dots, p-2$ の中で積が1になる

m, n の組が $\frac{p-3}{2}$ 個できるので、

$(p-1)! \equiv 1^{\frac{p-3}{2}} \cdot 1 \cdot (p-1) \equiv -1 \pmod{p}$
 となる。(Q. E. D.)

定理 2

整数 $m \geq 2$ について、 $(m-1)! \equiv -1 \pmod{m}$ ならば、 m は素数である。

(証明)

$(m-1)! \equiv -1 \pmod{m}$ より、

$$(m-1)! + 1 = mk \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たす整数 k が存在する。 m が合成数だと仮定すると、 $m = nl$ ($n, l \geq 2$) と表すことができる。①より、 $(m-1)! + 1 = nlk$.

よって、

$$1 = nlk - (m-1)!$$

$$= nlk - (m-1)(m-2) \cdots (n+1)n(n-1) \cdots 2 \cdot 1$$

$$= n \{ lk - (m-1)(m-2) \cdots (n+1)(n-1) \cdots 2 \cdot 1 \}$$

より、1 は m の倍数となり、矛盾する。したがって、 m は素数である。(Q. E. D.)

ウィルソンの定理を素数判定法としてより簡易にさせることができた。以下、 p を素数、 n を自然数とする。

命題 1

$$n \neq p, p^2 \text{ のとき、 } \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor! \equiv 0 \pmod{n}$$

(証明)

条件より、 $n = ab$ (a, b は自然数で $a > b > 1$) と表せる。このとき、

$$\frac{n}{2} \geq a > b \geq 2.$$

$$a = \frac{n}{2}, b = 2 \text{ のとき、 } \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = a > b > 1.$$

$$\frac{n}{2} > a, b \geq 3 \text{ のとき、 } \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor > \frac{n}{2} - 1 \geq a.$$

よって、 $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor > a > b > 1$. したがって、

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor! = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right) \cdots a \cdots b \cdots 2 \cdot 1 \equiv 0$$

\pmod{n}

である。(Q.E.D.)

命題 2

$$(2p)! \equiv 0 \pmod{p^2}$$

(証明)

$$(2p)! = 2p(2p-1) \cdots p(p-1) \cdots 2 \cdot 1$$

$$= p^2 \{ 2(2p-1) \cdots (p+1)(p-1) \cdots 2 \cdot 1 \}$$

$$\equiv 0 \pmod{p^2}$$

(Q. E. D.)

命題 3

$n \neq p$ かつ $n > 9$ のとき、

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor! \equiv 0 \pmod{n}$$

(証明)

命題 1 より $n \neq p, p^2$ のとき成り立つ。

$p \geq 3$ のとき、

$$\left[\frac{p^2}{2} \right]! = \frac{p^2-1}{2} \cdot \frac{p^2-3}{2} \cdots (2p+1)2p(2p-1) \cdots (p+1)p(p-1) \cdots 2 \cdot 1$$

となれば p^2 でわりきれぬ。

$$\frac{p^2-1}{2} \geq 2p \text{ となる } p \text{ の範囲は、}$$

$$\frac{p^2-1}{2} - 2p \geq 0 \text{ より、}$$

$$\frac{1}{2}(p-2+\sqrt{5})(p-2-\sqrt{5}) \geq 0$$

から、 $p \geq 5$ なので、 $p > 3$ 。

したがって、 $p^2 > 9$ のとき

$$\left[\frac{p^2}{2} \right]! \equiv 0 \pmod{p^2} \text{ である。 (Q.E.D.)}$$

定理 2 より、 $n \neq 2$ であり、 $\left(\frac{n-1}{2} \right)!$ が n

で割り切れないとき、 n は素数となる。

3-2. フェルマーの小定理の別証明

定理 3 (フェルマーの小定理)

p を素数とすると、任意の整数 a につ

いて、 $\text{G.C.D.}(p, a) = 1$ ならば、 $a^{p-1} \equiv 1$

\pmod{p} が成り立つ。

(証明)

定理 1 の証明より、 p と a が互いに素な

とき、 $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$ を p で割つ

た余りはすべて異なるので、

$$a \cdot 2a \cdot 3a \cdots (p-1)a \equiv (p-1)!$$

\pmod{p} となる。 $(p-1)!$ と p は互いに素

なので、両辺を $(p-1)!$ で割って、 $a^{p-1} \equiv 1$

\pmod{p} とわかる。 (Q.E.D.)

1 つ目の別証明は、すべての a において $a^{p-1} \equiv 1$ が成り立つことを数学的帰納法で示す。

(定理 3 の別証明)

$a = bp + c$ (b, c は整数で、 $1 \leq c \leq p-1$) とおく。このとき、

$$(bp + c)^{p-1} \equiv c^{p-1} \pmod{p}.$$

$c = 1$ のとき、 $1^{p-1} \equiv 1$ より成り立つ。ま

た、 $c = p-1$ のとき、 c と p は互いに素のため p は奇数となるので、

$$(p-1)^{p-1} \equiv (-1)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

が成り立つ。以下、 $2 \leq c \leq p-2$ とする。

$c = 2$ のとき、二項定理より

$$2^{p-1} = (1+1)^{p-1}$$

$$= 1^{p-1} + {}_{p-1}C_1 + \cdots + {}_{p-1}C_{p-2} + 1^{p-1}.$$

いま、

$${}_{p-1}C_m = \frac{(p-1)(p-2) \cdots \{p-(m-1)\}(p-m)}{1 \cdot 2 \cdots (m-1)m}$$

$$\equiv \frac{(-1) \cdot (-2) \cdots \{-(m-1)\}(-m)}{1 \cdot 2 \cdots (m-1)m}$$

$$\equiv (-1)^m \pmod{p} \text{なので、}$$

$$2^{p-1} \equiv 1^{p-1} - 1 + 1 - \cdots + 1 - 1 + 1^{p-1} \equiv 1.$$

よって、成り立つ。

$c = k$ のとき、 $k^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ が成り立つと仮定する。二項定理より、

$$\begin{aligned} (k+1)^{p-1} &= k^{p-1} + {}_{p-1}C_1 k^{p-2} + {}_{p-1}C_2 k^{p-3} \\ &\quad + \cdots + {}_{p-1}C_{p-3} k^2 + {}_{p-1}C_{p-2} k + 1 \end{aligned}$$

であり、 ${}_{p-1}C_m \equiv (-1)^m \pmod{p}$ より、

$$(k+1)^{p-1} = k^{p-1} - k^{p-2} + k^{p-3} - \cdots + k^2 - k + 1$$

$$\begin{aligned} &= (k^{p-1} + k^{p-3} + \cdots + k^4 + k^2) \\ &\quad - (k^{p-2} + k^{p-4} + \cdots + k^3 + k) + 1 \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} k^{2i} - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} k^{2i} + 1$$

$$= \frac{k^2(k-1)(k^{p-1}-1)}{k(k-1)(k+1)} + 1.$$

$k \neq 0, 1$ より

$$(k+1)^{p-1} = \frac{k(k^{p-1}-1)}{k+1} + 1.$$

さらに、 $k+1 \neq 0$ 、 $k^{p-1}-1 \equiv 0$ より、

$$\frac{k(k^{p-1}-1)}{k+1} \equiv 0. \text{ ゆえに、} (k+1)^{p-1} \equiv 1$$

\pmod{p} .

したがって、数学的帰納法より

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \text{が示された。 (Q.E.D.)}$$

2つ目の別証明の方針は、

$$a^{p-1} - 1 \equiv (a+1)(a+2) \cdots (a+p-1)$$

\pmod{p} を示すことである。しかし、証明を試みたができなかったため、その途中過程をここでは記すことにする。

命題 4

$(a+1)(a+2) \cdots (a+p-1)$ の項 a^{p-n} の係数は、

$$\sum_{k_{n-1}=1}^{p-n+1} \left(k_{n-1} \sum_{k_{n-2}=k_{n-1}+1}^{p-n+2} \left(k_{n-2} \cdots \sum_{k_2=k_3+1}^{p-2} \left(k_2 \sum_{k_1=k_2+1}^{p-1} k_1 \right) \cdots \right) \right)$$

と表せる。

(証明)

a^{p-n} の係数は、

$$1(2(3 \cdots ((p-n-3)$$

$$\times [(p-n-2)\{(p-n-1)+\cdots+(p-1)\}$$

$$+(p-n-1)\{(p-n)+\cdots+(p-1)\}$$

$$+\cdots+(p-2)(p-1)]$$

$$+(p-n-2)[(p-n-1)\{(p-n)+\cdots+(p-1)\}$$

$$\begin{aligned}
& + (p-2)(p-1)] + \cdots + (p-3)(p-2)(p-1) \\
& \quad + \cdots + (n+1) \cdots (p-1) \\
& = \sum_{k_{n-1}=1}^{p-n+1} \left(k_{n-1} \sum_{k_{n-2}=k_{n-1}+1}^{p-n+2} \left(k_{n-2} \cdots \sum_{k_2=k_3+1}^{p-2} \left(k_2 \sum_{k_1=k_2+1}^{p-1} k_1 \right) \cdots \right) \right)
\end{aligned}$$

となる。(Q. E. D.)

$(a+1)(a+2)\cdots(a+p-1)$ の定数項を p で割った余りは、ウィルソンの定理(定理1)より、 $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ なので、 -1 であることがわかる。

命題5

$(a+1)(a+2)\cdots(a+p-1)$ の項 a の係数は p で割り切れる。

(証明)

a の係数は

$$\begin{aligned}
& \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_{p-2} \leq p-1} k_1 k_2 \cdots k_{p-2} \\
& = \frac{(p-1)!}{1} + \frac{(p-1)!}{2} + \cdots + \frac{(p-1)!}{p-1}.
\end{aligned}$$

いま、整数 k が $k \leq \frac{p-1}{2}$ であるとき、

$$\begin{aligned}
\frac{(p-1)!}{p-k} & = \frac{1}{-k} \{1 \cdot 2 \cdots k \cdots (p-k-1)(-k) \\
& \quad \times (p-k+1) \cdots (p-1)\}
\end{aligned}$$

$$\equiv \frac{(p-1)!}{-k} \pmod{p} \text{ なので、}$$

$$\frac{(p-1)!}{1} + \frac{(p-1)!}{2} + \cdots + \frac{(p-1)!}{p-1} \equiv 0$$

\pmod{p} となる。(Q.E.D.)

命題6

$(a+1)(a+2)\cdots(a+p-1)$ の項 a^{p-2} の係数は p で割り切れる。

(証明)

a^{p-2} の係数は、 $p > 2$ より、

$$\sum_{k=1}^{p-1} k = \frac{1}{2}(p-1)p \equiv 0 \pmod{p}$$

となる。(Q. E. D.)

命題7

$(a+1)(a+2)\cdots(a+p-1)$ の項 a^{p-3} の係数は p で割り切れる。

(証明)

$p > 3$ より、

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k_2=1}^{p-2} \left(k_2 \sum_{k_1=1}^{k_2} k_1 \right) \\
& = -\frac{1}{2^3}(p-2)(p-1)p(p+1) \\
& \quad + \frac{1}{3}(p-2)(p-1)p \\
& \equiv 0 \pmod{p}. \quad (\text{Q. E. D.})
\end{aligned}$$

命題 8

$(a+1)(a+2)\cdots(a+p-1)$ の a^{p-4} の係数は p で割り切れる。

(証明)

$p > 4$ より

$$\begin{aligned} & \sum_{k_3=1}^{p-3} k_3 \sum_{k_2=1}^{k_3} k_2 \sum_{k_1=1}^{k_2} k_1 \\ &= \frac{1}{2^4 \cdot 3} (p-3)(p-2)\cdots(p+2) \\ & \quad - \frac{1}{2 \cdot 3} (p-3)(p-2)\cdots(p+1) \\ & \quad + \frac{1}{2^2} (p-3)(p-2)\cdots p \\ & \equiv 0 \pmod{p}. \quad (\text{Q. E. D.}) \end{aligned}$$

a^{p-n} の係数を

$$\begin{aligned} & a_{n-1}^{(1)} (p-n+1)(p-n+2)\cdots(p+n-2) \\ & + a_{n-2}^{(2)} (p-n+1)(p-n+2)\cdots(p+n-3) \\ & + \cdots + a_1^{(n-1)} (p-n+1)(p-n+2)\cdots p \end{aligned}$$

としたとき、 $\{a_n^{(1)}\}$ は $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2 \cdot 4}, \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \dots,$

$\{a_n^{(2)}\}$ は $\frac{1}{3}, -\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{5},$

$\left\{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2 \cdot 4}\right\} \frac{1}{7}, \dots,$ $\{a_n^{(3)}\}$ は

$\frac{1}{4}, -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{6},$

$\left\{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2 \cdot 4}\right\} \cdot \frac{1}{8}, \dots$

となり、

$$a_{n+1}^{(1)} = -a_n^{(1)} \cdot \frac{1}{2n+2}$$

$$a_{n+1}^{(2)} = -\left(a_n^{(2)} + \frac{1}{2^n n!}\right) \cdot \frac{1}{2n+3}$$

$$a_{n+1}^{(3)} = -\left(a_n^{(3)} + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1} (n-1)!} + \frac{1}{2^n \cdot n!}\right) \cdot \frac{1}{2n+4}$$

となることが予想できる。このとき、一般項は

$$a_n^{(1)} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2^n \cdot n!}$$

$$a_n^{(2)} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1} (n-1)!}$$

$$a_n^{(3)} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{4n+5}{9 \cdot 2^{n+1} (n-1)!}$$

となる。証明は、数学的帰納法を使って容易にできる。

4. 今後の課題

フェルマーの別証明においては、

$a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, a_n^{(3)}$ のすべての一般項の分母に

2^n と $n!$ が含まれているので、それを指針に証明をしていきたい。また、オイラーの定理についても考察をしていきたい。

5. 参考文献

[1] 「初等整数パーフェクト・マスター」,
鈴木晋一, 日本評論社

[2] <https://mathtrain.jp/>

6. 謝辞

今回の研究にあたり、ご指導くださった顧問の川口先生ありがとうございました。また、サイエンス研究会の方々にもご協力いただきました。ありがとうございました。

隣接 4 項間漸化式について

5 年 C 組 大野 華子
指導教員 川口 慎二

1. 要約

本校 5 年生は数列について研究している。今回は隣接 4 項間漸化式の一般化を目標とした。

キーワード 漸化式、特性方程式、一般項、隣接 4 項間漸化式

2. 研究の背景と目的

私は、解析の授業で漸化式にはたくさんの種類があることを知った。そして、特に 3 項が隣接している漸化式である隣接 3 項間漸化式の解法の一般化に興味をもった。そこで、本稿では隣接 4 項間漸化式についての導出を行うことを目的とする。

3. 研究内容

3-1. 隣接 3 項間漸化式

隣接 3 項間漸化式は、一般的に次のように表される。

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$$

このとき、 p, q は定数で 0 でない数として、 a_1, a_2 の値がわかっているとき、解くことができる。例えば、以下の例題 1 および 2 のように求めることができる。

例題 1

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} - 7a_{n+1} + 12a_n = 0$$

($n \geq 1$) によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(解) 特性方程式 $t^2 - 7t + 12 = 0$ を解くと、 $t = 3, 4$ とわかる。したがって漸化式は
$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = 4(a_{n+1} - 3a_n)$$
と変形できる。

よって、数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ は公比 4 の等比数列となるので、

$$a_{n+1} - 3a_n = (-2) \times 4^{n-1} \dots (1)$$

同様に、この漸化式は、

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 4a_n)$$

と変形できるので、数列 $\{a_{n+1} - 4a_n\}$ は公比 3 の等比数列となり、

$$a_{n+1} - 4a_n = -3^n \dots (2)$$

$$(1) - (2) \text{ より、 } a_n = -2^{2n-1} + 3^n.$$

例題 2

$$a_1 = 1, a_2 = 4, a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0$$

($n \geq 1$) によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(解) 特性方程式 $t^2 - 6t + 9 = 0$ を解くと、 $t = 3$ (重解) とわかる。したがって漸化式は

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 3a_n)$$

と変形できる。 $b_n = a_{n+1} - 3a_n$ とおくと、 $b_1 = a_2 - 3a_1 = 1$ より、 $b_{n+1} = 3b_n$ となるので、

数列 $\{b_n\}$ は初項 1, 公比 3 の等比数列となる。

よって、 $b_n = 3^{n-1}$ と表せる。つまり、

$$a_{n+1} - 3a_n = 3^{n-1}$$

となる。この漸化式の両辺を 3^{n+1} で割ると、

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{3a_n}{3^{n+1}} = \frac{3^{n-1}}{3^{n+1}}.$$

つまり、

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{a_n}{3^n} = \frac{1}{9}$$

となる。このとき、 $c_n = \frac{a_n}{3^n}$ とおくと、

$$c_1 = \frac{a_1}{3} = \frac{1}{3}$$

より、 $c_{n+1} - c_n = \frac{1}{9}$ となるので、数列 $\{c_n\}$ は

初項 $\frac{1}{3}$ 、公差 $\frac{1}{9}$ の等差数列となる。

よって、

$$c_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}(n-1) = \frac{1}{9}n + \frac{2}{9}$$

となり、 $c_n = \frac{a_n}{3^n}$ より、

$$\frac{a_n}{3^n} = \frac{1}{9}n + \frac{2}{9}$$

となるので、

$$a_n = 3^n \left(\frac{1}{9}n + \frac{2}{9} \right) = 3^{n-2} \cdot n + 2 \cdot 3^{n-2}$$

となる。

つまり、漸化式

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0 \quad (p, q \neq 0)$$

ではじめの 2 項 a_1, a_2 がわかっているとき、特性方程式 $t^2 + pt + q = 0$ 解を α, β とする。そして、この漸化式を

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \quad \cdots(3)$$

の形に変形する。そして、 $\alpha \neq \beta$ のときは、(3) の形を 2 つ作りだして求める。一方、 $\alpha = \beta$ のときは、(3) に代入して求めることができる。

2-2. 隣接 4 項間漸化式

例題 3

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5,$$

$$a_{n+3} - 10a_{n+2} + 31a_{n+1} - 30a_n = 0$$

によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(解) 特性方程式 $t^3 - 10t^2 + 31t - 30 = 0$ を解くと、 $t = 2, 3, 5$ とわかる。それぞれを順に α, β, γ とする。

はじめに、 $b_n = a_{n+1} - \alpha a_n$ とおいたとき、 $b_n = a_{n+1} - 2a_n$ より、与えられた漸化式は、

$$b_{n+2} - 8b_{n+1} + 15b_n = 0$$

となる。このとき、 $b_1 = 0, b_2 = 1$ とわかり、隣接 3 項間漸化式となる。ゆえに、

$$b_{n+2} - 3b_{n+1} = 5(b_{n+1} - 3b_n)$$

と変形できる。よって、この漸化式は

$$b_{n+1} - 3b_n = 5^{n-1}. \quad \cdots(4)$$

同様にこの漸化式は、

$$b_{n+2} - 5b_{n+1} = 3(b_{n+1} - 5b_n)$$

と変形できる。よって、この漸化式は

$$b_{n+1} - 5b_n = 3^{n-1} \quad \dots(5)$$

となる。(4), (5)より、

$$b_n = \frac{5^{n-1} - 3^{n-1}}{2}.$$

また、同様に $c_n = a_{n+1} - \beta a_n$ とおいたとき、 $c_n = a_{n+1} - 3a_n$ となり、

$$c_{n+2} - 7c_{n+1} + 10c_n = 0$$

とできる。このとき、 $c_1 = c_2 = -1$ とわかり、

隣接 3 項間漸化式を得る。すると、

$$c_{n+2} - 2c_{n+1} = 5(c_{n+1} - 2c_n)$$

と変形できる。よってこの漸化式は

$$c_{n+1} - 2c_n = 5^{n-1}. \quad \dots(6)$$

同様にこの漸化式は

$$c_{n+2} - 5c_{n+1} = 2(c_{n+1} - 5c_n)$$

と変形できる。よってこの漸化式は

$$c_{n+1} - 5c_n = 2^{n+1} \quad \dots(7)$$

となる。(6), (7)より、

$$c_n = \frac{5^{n-1} - 2^{n+1}}{3}.$$

よって、

$$a_{n+1} - 2a_n = \frac{5^{n-1} - 3^{n-1}}{2},$$

$$a_{n+1} - 3a_n = \frac{5^{n-1} - 2^{n+1}}{3}$$

とわかる。したがって、

$$a_n = \frac{5^{n-1} - 3^n + 2^{n+2}}{6}.$$

異なる視点で隣接 4 項間漸化式を考えてみる。

例題 4

α, β, γ を 3 次方程式

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0 \quad (p, q, r \text{ は定数})$$

の 3 つの解とし、 A, B, C を定数とする。

このとき、 $x_n = A\alpha^n + B\beta^n + C\gamma^n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) と定めれば、関係式

$$x_{n+3} + px_{n+2} + qx_{n+1} + rx_n = 0$$

が成り立つことを証明せよ。

(解) それぞれ以下のように表せる。

$$x_{n+3} = A\alpha^{n+3} + B\beta^{n+3} + C\gamma^{n+3}$$

$$px_{n+2} = p(A\alpha^{n+2} + B\beta^{n+2} + C\gamma^{n+2})$$

$$qx_{n+1} = p(A\alpha^{n+1} + B\beta^{n+1} + C\gamma^{n+1})$$

$$rx_n = r(A\alpha^n + B\beta^n + C\gamma^n).$$

これらを加えると、

$$x_{n+3} + px_{n+2} + qx_{n+1} + rx_n$$

$$= (A\alpha^{n+3} + B\beta^{n+3} + C\gamma^{n+3})$$

$$+ p(A\alpha^{n+2} + B\beta^{n+2} + C\gamma^{n+2})$$

$$+ p(A\alpha^{n+1} + B\beta^{n+1} + C\gamma^{n+1})$$

$$+ r(A\alpha^n + B\beta^n + C\gamma^n)$$

$$= A\alpha^n (a^3 + pa^2 + qa + r)$$

$$+ B\beta^n (\beta^3 + p\beta^2 + q\beta + r)$$

$$+ C\gamma^n (\gamma^3 + p\gamma^2 + q\gamma + r)$$

$$= A\alpha^n \times 0 + B\beta^n \times 0 + C\gamma^n \times 0$$

$$= 0.$$

例題 4 より、隣接 4 項間漸化式の一般項が求めることができる。

a_1, a_2, a_3 と解 α, β, γ を用いて A, B, C を求め、一般項を導出する。

$a_n = A\alpha^n + B\beta^n + C\gamma^n$ に $n=1, 2, 3$ を代入して、

$$a_1 = A\alpha + B\beta + C\gamma \quad \cdots(\text{I})$$

$$a_2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 \quad \cdots(\text{II})$$

$$a_3 = A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 \quad \cdots(\text{III})$$

$\{(I) \times \alpha - (II)\} \times \beta - \{(I) \times \alpha^2 - (III)\}$ を計算すると、

$$\begin{aligned} & \alpha\beta a_1 - (\alpha + \beta)a_2 + a_3 \\ &= C(\alpha\beta\gamma - \beta\gamma^2 - \alpha\gamma^2 + \gamma^3) \\ &= C\gamma(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) \end{aligned}$$

より、

$$C = \frac{\alpha\beta a_1 - (\alpha + \beta)a_2 + a_3}{\gamma(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$$

を得る。この式の対称性を考えると、

$$A = \frac{\beta\gamma a_1 - (\beta + \gamma)a_2 + a_3}{\alpha(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}$$

$$B = \frac{\gamma\alpha a_1 - (\gamma + \alpha)a_2 + a_3}{\beta(\beta - \gamma)(\beta - \alpha)}$$

これらを代入すると、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\beta\gamma a_1 - (\beta + \gamma)a_2 + a_3}{\alpha(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} \alpha^n \\ &+ \frac{\gamma\alpha a_1 - (\gamma + \alpha)a_2 + a_3}{\beta(\beta - \gamma)(\beta - \alpha)} \beta^n \\ &+ \frac{\alpha\beta a_1 - (\alpha + \beta)a_2 + a_3}{\gamma(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)} \gamma^n \end{aligned}$$

となる。

このように、特性方程式が重解ではなく、異なる解をもつ場合については一般化することができた。

3. 結論

教科書[2]に掲載された隣接 2 項間漸化式をもとに、隣接 3 項間の特性方程式の重解になる場合と重解にならない場合の解法および隣接 4 項間漸化式における特性方程式

が重解でない場合の一般項が導出できた。

4. 今後の課題

今回は隣接 4 項間までを考えた。隣接 4 項間漸化式において、特性方程式が重解でない場合は一般化ができた。しかし、重解の場合はまだわかっていない。よって、これからは隣接 4 項間漸化式において特性方程式が重解になる場合の解法および一般化を試みようと思う。また、隣接 2 項間漸化式では 1 次の特性方程式、隣接 3 項間漸化式では 2 次の特性方程式、隣接 4 項間漸化式では 3 次の特性方程式を解いたことから、 n 項間漸化式では $(n-1)$ 次の特性方程式を解くことにより、一般項を導けるのではないかと予想できる。これらについて、研究を深めていきたい。

5. 参考文献

- [1] 「高校数学の美しい物語」
<https://mathtrain.jp/>
- [2] 「数学 B」, 東京書籍
- [3] 「教科書 Finder」
<http://text.yarukifinder.com/#>
- [4] 「中高数学研究」
<http://xn--fiq353ajyhontfxcbv4e.com/>

6. 謝辞

研究をする過程でアドバイスを頂いた顧問の川口先生、サイエンス研究会数学班のみなさん、ありがとうございました。

グラフの最短経路とフェルマー点

5年C組 松川 賢太郎

指導教員 川口 慎二

1. 要約

サイエンス研究会数学班5年生はグラフ理論について研究している。今回は、シュタイナー問題のフェルマー点について、最小全域木問題に関連する考察を行った。

キーワード シュタイナー問題、フェルマー点、最小全域木問題

2. 研究の背景と目的

グラフ G の任意の2点 u, v に対して、 u と v を結ぶ辺が G 内にあるとき、グラフ G は**連結**であるという。連結グラフから適当な辺を取り除いていき、閉路をもたない木のことを**全域木**といい、グラフから辺を選び、選ばれた辺でグラフ全体を連結にする問題を**最小全域木問題**という。ただし、選ばれた辺の重みの総和を最小にすることが条件である。

3. 研究内容

3-1. シュタイナー問題

平面上に n 個の点が存在するとき、これらを線分で結び最短ネットワークを見つけるという問題を考える。ただしこのとき、任意の点を付け加えてもよい。このような問題は点を「都市」、線分を「経路」に見立てることで都市を結ぶ最短経路を考える問題となる。

点の個数に応じて、最短経路について考えることにする。

(1) $n=3$ のとき

3点 A, B, C について、 $PA+PB+PC$ が最小になる点 P を考える。 $\triangle ABC$ の最大角を $\angle A$ とする。

(i) $\angle A \leq 120^\circ$ のとき

求める点 P は $\triangle ABC$ のフェルマー点である。つまり、フェルマー点から3点 A, B, C へ結んだ線分の和が最短経路となる。

$\triangle ABC$ のフェルマー点とは、3頂点 A, B, C からの距離の和を最小にする点 P のことをいう。ただし最大角の大きさが 120° 以下であることが存在の条件となることが知られている。フェルマー点 P は $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$ を満たす。

(ii) $\angle A > 120^\circ$ のとき

2つの線分 AB, AC をつないでできる折れ線が最短経路となる。

<フェルマー点の作図方法>

フェルマー点は、トリチェリの作図法を

用いることで作図することができる。△ABC のフェルマー点について考える (図1 参照)。

- ① AC を一辺とする正三角形 ACD をかく。
- ② △ACD の外接円 O をかく。
- ③ BD を結び、円 O との交点を P とする。

この点 P がフェルマー点となる。

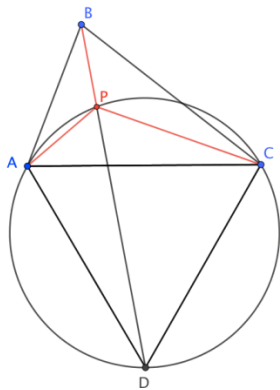


図 1

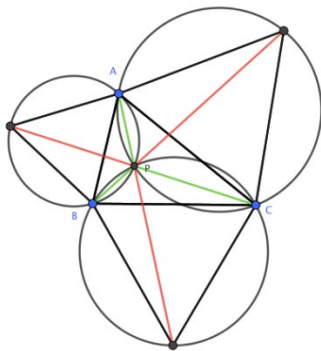


図 2

ここで、図 2 の点 P が △ABC のフェルマー点であることを示す。

(証明)

3 点 A, B, C において、△ABC の内部に点 P をとる。点 A と点 P を、C を中心にして反時計回りに 60° 回転させた点をそれぞれ A', P' とする。△APC と △A'P'C において、2 辺挟角相等より △APC ≅ △A'P'C である。

ゆえに、 $AP = A'P'$, $P'P = CP$ より、

$$AP + BP + CP = A'P' + P'P + PB \geq A'B$$

となる。 $A'P' + P'P + PB$ が $A'B$ と一致するとき最小値をとる。よって P は $A'B$ 上にある。同様にして、P は DC 上にある。よって P は $A'B$ と DC の交点である。

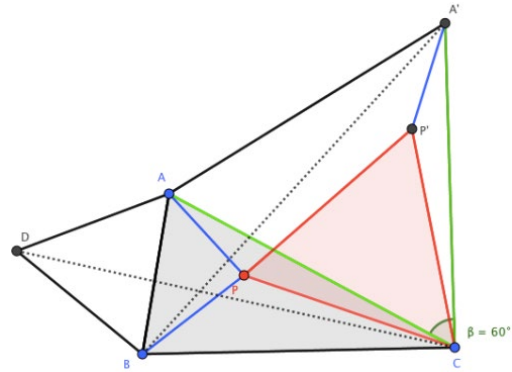


図 3

(2) $n = 4$ のとき

正方形にトリチェリの作図を繰り返し用いると図 4 のようになる。

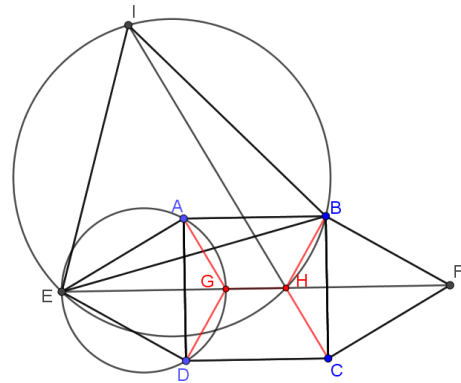


図 4

$AG + DG + GH + BH + CH$ が最小となることを示す。これは図 3 の証明と同様に行った。

(証明)

AD, BC を一辺とする正三角形 ADE と

BCF をかく。点 G を、D を中心に反時計回りに 60° 回転させた点を I とおく。また点 H を、B を中心に反時計回りに 60° 回転させた点を J とおく。また $\triangle AGD$ と $\triangle EID$ において、 $DG=IG, AD=ED$ より、 $\triangle AGD \equiv \triangle EID$ なので、 $AG=EI$ である。同様にして $CH=JF$ なので、これらより

$$\begin{aligned} &AG + DG + GH + BH + CH \\ &= EI + IG + GH + HJ + JF \end{aligned}$$

となる。I, G, H, J が直線 EF 上にあるときに最小となる (図 5 参照)。

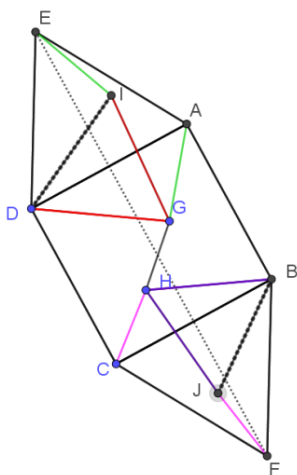


図 5

これにより、トリチェリの作図を繰り返し用いることでフェルマー点を作図できることがわかる。

(3) $n=5$ のとき

トリチェリの作図を繰り返し用いて、図 6 のように作図した。

その結果、図 6 のように五角形 ABCDE の内部に F, G, H の 3 つのフェルマー点ができる。

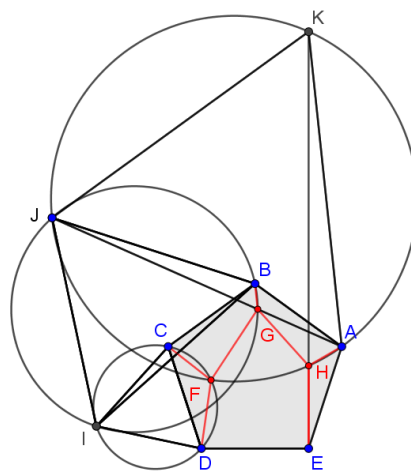


図 6

(4) $n=6$ のとき

最短経路は正六角形 ABCDEF の辺をつないだ閉路になった。

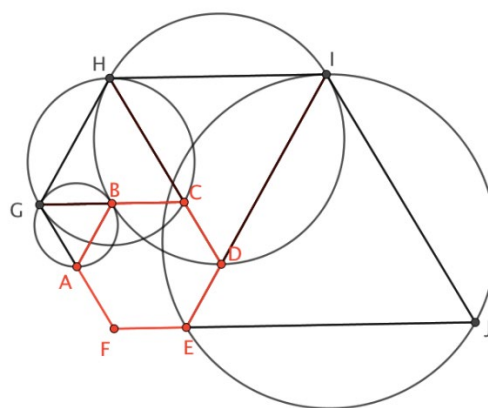


図 7

(5) $n=7$ のとき

このとき、図 8 のように、フェルマー点が正七角形の外部に作成されてしまったため作図に失敗してしまったと思われる。

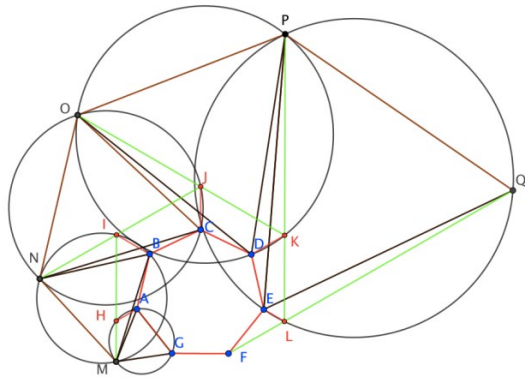


図 8

3-2. クラスカル法

最小全域木問題の解法には主に2つのアルゴリズムがあり、その1つが以下のクラスカル法である。

<手順>

グラフ内の辺のうち、重みが小さいものから順に注目し、その辺を加えても閉路ができない場合にはその辺を枝として加える。同じ重みの辺が複数本ある場合については、順番は任意である。

図9のような重み付きグラフに対して、手順にしたがって辺を選択していくと、図10のような木を得る。

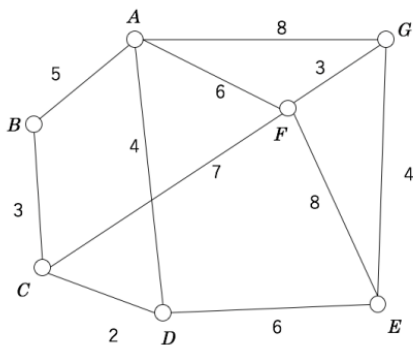


図 9

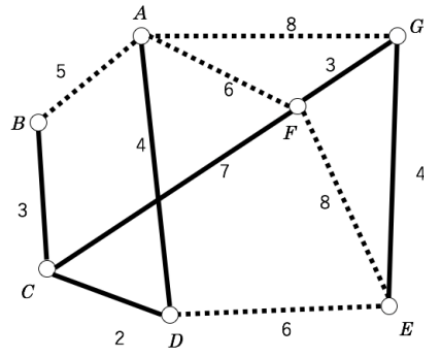


図 10

3-3. プリム法

次に、注目する頂点を1つ決め、そこをスタート地点とし、頂点を次々に取り込むことによって頂点を連結していく方法であるプリム法を用いて考察する。

<手順>

頂点を1つ選ぶ(図11ではAとしている)。Aに連結している3辺AB, AD, AGに注目して重みが最も小さい辺を選ぶ。このとき、ADの重みが最も小さいため、これをAに連結させる。この操作を閉路ができないように繰り返す。

例えば図11において、頂点Bに到達したとき、BとAを連結させてしまえば、閉路ABCDができてしまい不適となる。この場合は、ひとつ前の頂点であるCに戻って、まだ連結していない辺の中からまた重みが最も小さい辺を選んで連結していく。

今回はプリム法を利用して、日本地図の県庁所在地を結ぶ最小全域木を作成した。

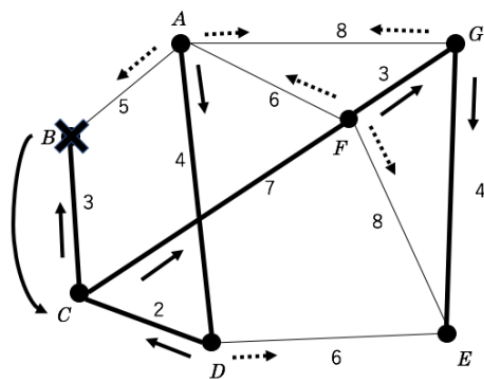


図 11

<方法>

図 12 のように地図の県庁所在地をグラフの頂点として設定し、隣接している県を辺（赤い辺で表示）で結んだ。このとき、重みはそれぞれの県庁所在地の距離を用い、海を渡る場合（青い辺で表示）は重みを 2 倍することにした。ただし、今回は地図の都合上、札幌と那覇は除外した。

<結果>

図 13 のように、 $A_7, A_{10}, A_{20}, A_{34}, A_{38}, A_{41}$ の 6 つの分岐点を確認できた。

県庁所在地同士の直線距離だけで重みを決めているため、精密なグラフは作成できていないのではないかと考えられる。分岐点ができる条件があるのではないかと予想している。

4. 今後の課題

フェルマー点の作図に $n=7$ のときに失敗してしまった。フェルマー点に関する考察を深め、第 2 フェルマー点についての考察などをあわせて行っていきたい。

日本地図にプリム法を用いて最小全域木を作成したものの、設定がまだ甘く直線距離での評価しか行っていないため精度が低いと思われる。条件をもう少し綿密に設定したい。

5. 参考文献

- [1] web サイト「高校数学の美しい物語」
<https://mathtrain.jp>
- [2] web サイト「トリチェリの問題」
http://www004.upp.so-net.ne.jp/s_honma/reminder.htm
- [3] 「グラフ理論入門—基本とアルゴリズム」, 宮崎修一, 森山出版 (2015)

6. 謝辞

今回の研究にあたり、ご指導下さいました顧問の川口先生ありがとうございました。

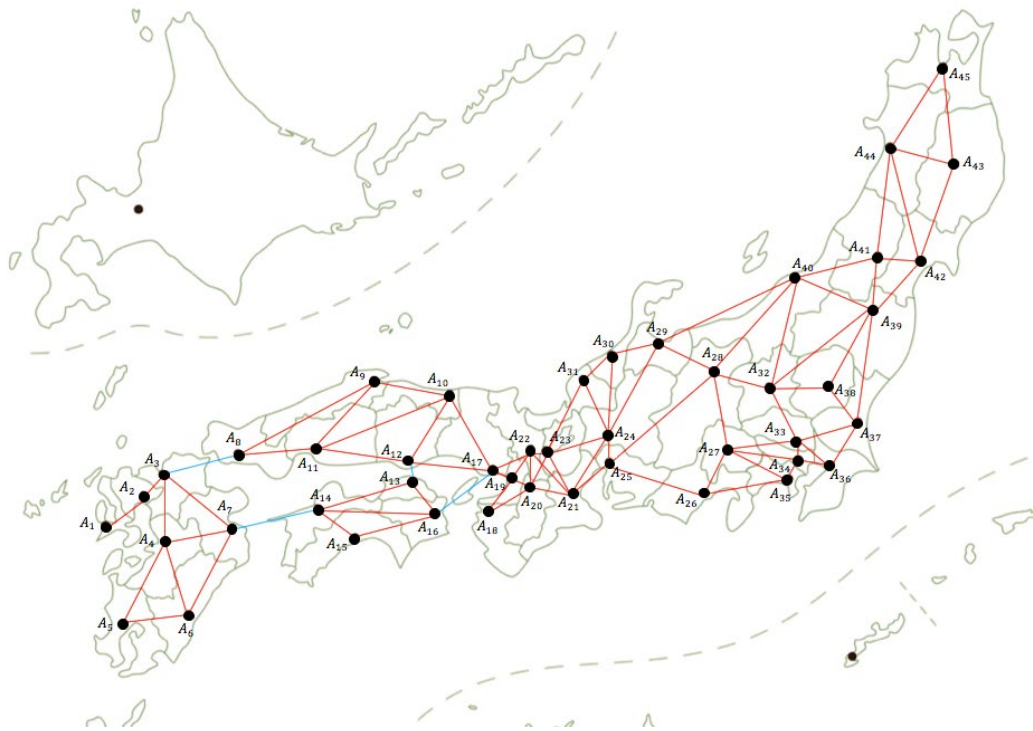


図 12

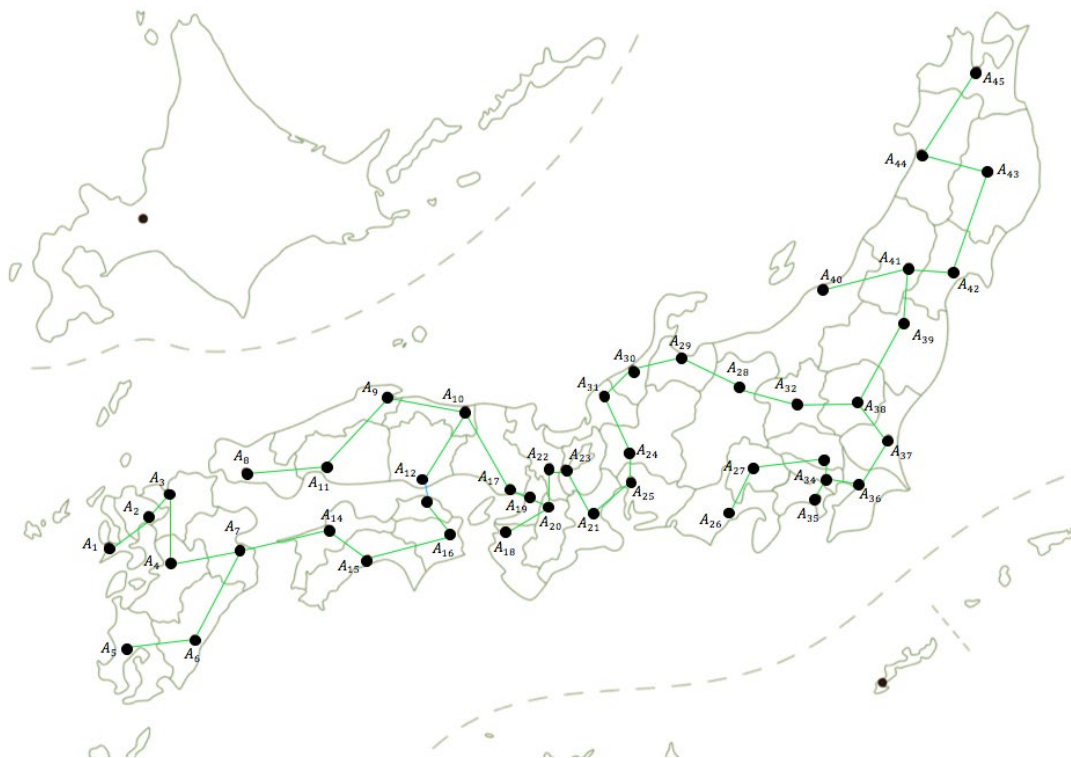


図 13

n 次方程式の解の範囲について

5 年 C 組 古宮 昌典
指導教員 川口 慎二

1. 要約

サイエンス研究会数学班 5 年生は代数方程式について研究している。今回は、 n 次方程式における解の存在範囲をよい精度で与える公式を作ることを目標とし、その目標のために不等式について学習した。

キーワード n 次方程式、解、絶対値、不等式評価

2. 研究の背景と目的

私は今年度 11 月に行われた ISSS に参加し、ベトナム国家大学ハノイ校自然科学大学附属英才高校(HSGS)で数学の授業を受けた。そのとき、 n 次方程式における解についての議論があった。そこで、その議論をより深めていくことで、さらに n 次方程式の解についての詳しい結果が得られると考え、本稿にまとめることにした。

が成り立つ。

(証明)

方程式を以下のように変形する。

$$x^n = -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} x^i$$

両辺の絶対値をとり、三角不等式を用いることで以下を得る。

$$|x|^n \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{a_i}{a_n} \right| |x|^i$$

3. 研究内容

HSGS で受けた授業で以下の定理を知った。

ここで、 $M = \max_{0 \leq i \leq n-1} \left| \frac{a_i}{a_n} \right|$ より以下を得る。

定理 1

複素数変数 x に関する n 次方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

について、 $\max_{0 \leq i \leq n-1} \left| \frac{a_i}{a_n} \right| = M$ とするとき、

$$|x| < M + 1$$

$$|x|^n \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{a_i}{a_n} \right| |x|^i \leq \sum_{i=0}^{n-1} M |x|^i$$

$$= \frac{M(|x|^n - 1)}{|x| - 1} < \frac{M|x|^n}{|x| - 1}$$

両辺を $|x|^n > 0$ で割って、 $1 < \frac{M}{|x| - 1}$.

ここで、 $|x| > 1$ のとき、 $|x| - 1 > 0$ であるから、 $|x| - 1 < M$.

よって、 $|x| < M + 1$ を得る。(Q. E. D.)

実際に、6 次方程式
 $x^6 - 21x^5 + 7x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 17x + 10 = 0$
 について、この定理 1 を用いると、 $|x| < 22$
 となる。実際の解は $|x| < 20.67$ なので、精度はよい。しかし、6 次方程式
 $x^6 - x^5 + 7x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 17x + 10 = 0$
 について、定理 1 からは $|x| < 18$ が得られるが、実際は $|x| < 2.67$ であり、精度が悪い。このように、係数によっては精度が悪くなる。特に、 M が高い次数の係数である場合には精度はよいが、低い次数の係数である場合は精度が悪くなるのではないかと考えた。

定理 2

複素数変数 x に関する n 次方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

について、 $\max_{0 \leq i \leq n-2} \left| \frac{a_i}{a_n} \right| = M$ とするとき、

$$|x| \leq \max \left(\frac{1 + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \sqrt{\left(1 - \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|\right)^2 + 4M}}{2}, 1 \right)$$

が成り立つ。

(証明)

$|x| > 1$ のとき、方程式を以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} |x|^n &\leq \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| |x|^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \left| \frac{a_i}{a_n} \right| |x|^i \\ &\leq \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| |x|^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} M |x|^i \\ &\leq \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| |x|^{n-1} + M \cdot \frac{|x|^{n-1} - 1}{|x| - 1} \\ &< \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| |x|^{n-1} + M \cdot \frac{|x|^{n-1}}{|x| - 1} \end{aligned}$$

両辺を $|x|^{n-1} > 0$ で割り、整理すると、

$$|x|^2 - \left(1 + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \right) |x| + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| - M < 0.$$

これを $|x|$ について解くと、

$$|x| < \frac{1 + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \sqrt{\left(1 - \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|\right)^2 + 4M}}{2}$$

を得る。ここで、

$$\frac{1 + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \sqrt{\left(1 - \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|\right)^2 + 4M}}{2} < 1$$

のときは $|x| > 1$ に矛盾するため、 $|x| \leq 1$ となる。ゆえに、

$$|x| \leq \max \left(\frac{1 + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \sqrt{\left(1 - \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|\right)^2 + 4M}}{2}, 1 \right)$$

となる。(Q. E. D.)

定理 2 において、特に $|a_{n-1}| = |a_n|$ のとき、

$$\left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| = 1 \text{ であるから、 } |x| < 1 + \sqrt{M} \text{ が成り}$$

立つ。

実際に、6 次方程式

$$x^6 - x^5 + 7x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 17x + 10 = 0$$

について定理 2 を用いると、 $|x| < 5.13$ が得

られ、定理 1 よりも精度の良い結果となる。

しかし、 $\left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| = M$ である場合、 $|x| < 1 + M$

となり、定理 1 と同じ値となる。 $\left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| = M$

の場合を除けば、定理 2 は定理 1 よりもよい精度の値を与える(ただし、 $M \geq 1$)。

定理 3

複素数変数 x に関する n 次方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

について、

$$M_1 = \max_{0 \leq i \leq n-2} \left| \frac{a_i}{a_n} \right| = \left| \frac{a_{m_1}}{a_n} \right|,$$

$$M_2 = \max_{0 \leq i \leq n-2, i \neq m_1} \left| \frac{a_i}{a_n} \right| = \left| \frac{a_{m_2}}{a_n} \right|,$$

$G = \frac{M_1 + M_2}{2}$ とする。 $m_2 > m_1$ を満たすと

き、

$$|x| < \max \left(\frac{1 + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \sqrt{\left(1 - \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|\right)^2 + 4G}}{2}, 1 \right)$$

が成り立つ。

(証明)

方程式を変形して、次を得る。

$$|x|^n \leq \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| |x|^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \left| \frac{a_i}{a_n} \right| |x|^i$$

ここで、 $0 \leq i \leq n-2, i \neq m_1$ において、

$$G - \left| \frac{a_i}{a_n} \right| \geq 0$$

が成り立つ。よって、 $|x| > 1$ のとき、

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n-2} G |x|^i - \sum_{i=0}^{n-2} \left| \frac{a_i}{a_n} \right| |x|^i \\ & \geq \sum_{i=m_1, m_2} \left(\frac{M_1 + M_2}{2} - \left| \frac{a_i}{a_n} \right| \right) |x|^i \\ & \geq \frac{-M_1 + M_2}{2} |x|^{m_1} + \frac{M_1 - M_2}{2} |x|^{m_2} \\ & \geq \frac{M_1 - M_2}{2} (|x|^{m_2} - |x|^{m_1}) \geq 0 \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\sum_{i=0}^{n-2} \left| \frac{a_i}{a_n} \right| |x|^i \leq \sum_{i=0}^{n-2} G |x|^i$$

を得る。ここで、

$$\begin{aligned} |x|^n &\leq \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| |x|^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} G |x|^i \\ &= \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| |x|^{n-1} + G \cdot \frac{|x|^{n-1} - 1}{|x| - 1} \\ &< \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| |x|^{n-1} + G \cdot \frac{|x|^{n-1}}{|x| - 1} \end{aligned}$$

両辺を $|x|^{n-1} > 0$ で割り、 $|x|$ について解くと、

$$|x| < \frac{1 + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \sqrt{\left(1 - \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \right)^2 + 4G}}{2}$$

を得る。ここで、

$$\frac{1 + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \sqrt{\left(1 - \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \right)^2 + 4G}}{2} < 1$$

のときは $|x| > 1$ に矛盾するため、 $|x| \leq 1$ と

なる。ゆえに、

$$|x| \leq \max \left(\frac{1 + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \sqrt{\left(1 - \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \right)^2 + 4G}}{2}, 1 \right)$$

である。(Q. E. D.)

実際に、6次方程式

$$x^6 - x^5 + 7x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 20x + 5 = 0$$

について定理3を用いると、 $|x| < 5$ が得

られる。定理2から得られる値は $|x| < 5.47$

なので、精度が上がっている(実際の解は

$|x| < 2.48$)。また、 M_1 と M_2 の差が大きい

ほど、有用である。しかし、 $m_1 > m_2$ であ

るときは定理を適用させることができない。

定理4

複素数変数 x に関する n 次方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

について、 $\left| \frac{a_{n-2}}{a_n} \right|, \dots, \left| \frac{a_1}{a_n} \right|, \left| \frac{a_0}{a_n} \right|$ を大きい順

に並べたものを S_{n-2}, \dots, S_1, S_0 とする。ま

た、 $K = \max_{0 \leq i \leq n-3} \frac{S_i}{S_{i+1}}$ とし、

$$A = \frac{K + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \sqrt{\left(K - \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \right)^2 + 4S_{n-2}}}{2}$$

とするとき、 $|x| \leq \max(A, 1)$ が成り立つ。

(証明)

まず、以下の補題が成り立つ(参考文献[2]を参照したが、証明は自分で行った)。

補題1 (並べ替え不等式)

$$\begin{aligned} p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_{n-1} \leq p_n, \\ q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_{n-1} \leq q_n \end{aligned}$$

なる実数 p_i, q_i において、和

$$T(i_1, i_2, \dots, i_n) = p_1 q_{i_1} + \dots + p_n q_{i_n}$$

を考えると、このうちで最大のものは

$T(1, 2, \dots, n)$ である。

(補題 1 の証明)

数学的帰納法で示す。

$n = 2$ のとき、

$$\begin{aligned} T(1, 2) - T(2, 1) &= p_1 q_1 + p_2 q_2 - p_1 q_2 - p_2 q_1 \\ &= p_1 (q_1 - q_2) + p_2 (q_2 - q_1) \\ &= (p_2 - p_1)(q_2 - q_1) \geq 0 \end{aligned}$$

より、 $T(1, 2) \geq T(2, 1)$ を得るので、命題は成り立つ。

$n \leq k$ のとき、任意の $T(i_1, i_2, \dots, i_n)$ に

おいて $T(1, 2, \dots, n) \geq T(i_1, i_2, \dots, i_n)$ が成り立つと仮定する。

このとき、 $n = k + 1$ において、

$$\begin{aligned} T(i_1, i_2, \dots, i_{k+1}) &= p_1 q_{i_1} + \dots + p_k q_{i_k} + p_{k+1} q_{i_{k+1}} \end{aligned}$$

である。

ここで、 $i_{k+1} = k + 1$ のときは仮定より、

$$\begin{aligned} T(i_1, i_2, \dots, i_{k+1}) &= p_1 q_{i_1} + \dots + p_k q_{i_k} + p_{k+1} q_{k+1} \\ &\leq p_1 q_1 + \dots + p_k q_k + p_{k+1} q_{k+1} \\ &= T(1, 2, \dots, k+1) \end{aligned}$$

となり、命題は成り立つ。

$i_{k+1} \neq k + 1$ のとき、 $i_j = k + 1$ となる j を

とる。

$j \geq 2$ のとき、仮定より、

$$\begin{aligned} T(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_{k+1}) &= p_1 q_{i_1} + \dots + p_j q_{i_j} + \dots + p_{k+1} q_{i_{k+1}} \\ &\leq p_1 q_1 + \dots + p_{j-1} q_{j-1} \\ &\quad + p_j q_{k+1} + p_{j+1} q_j + \dots + p_{k+1} q_k \\ &\leq p_1 q_1 + \dots + p_{j-1} q_{j-1} \\ &\quad + p_j q_j + p_{j+1} q_{j+1} + \dots + p_{k+1} q_{k+1} \\ &= T(1, 2, \dots, k+1) \end{aligned}$$

となり、命題は成り立つ。

$j = 1$ のとき、仮定より、

$$\begin{aligned} T(i_1, i_2, \dots, i_{k+1}) &= p_1 q_{k+1} + p_2 q_{i_2} + \dots + p_{k+1} q_{i_{k+1}} \\ &\leq p_1 q_{k+1} + p_2 q_1 + \dots + p_k q_{k-1} + p_{k+1} q_k \\ &\leq p_1 q_1 + \dots + p_{k-1} q_{k-1} + p_k q_{k+1} + p_{k+1} q_k \\ &\leq p_1 q_1 + \dots + p_{k-1} q_{k-1} + p_k q_k + p_{k+1} q_{k+1} \\ &= T(1, 2, \dots, k+1) \end{aligned}$$

となり、命題は成り立つ。

よって $n = k + 1$ についても命題は成り立つので、示された。(Q. E. D.)

(定理 4 の証明)

方程式を変形して、次を得る。

$$|x|^n \leq \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| |x|^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \left| \frac{a_i}{a_n} \right| |x|^i$$

ここで、 $|x| > 1$ のとき、補題 1 より

$$\sum_{i=0}^{n-2} \left| \frac{a_i}{a_n} \right| |x|^i \leq \sum_{i=0}^{n-2} S_i |x|^i$$

が成り立つので、以下を得る。

$$|x|^n \leq \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| |x|^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} S_i |x|^i.$$

ここで、

$$\begin{aligned} |x|^n &\leq \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| |x|^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} S_i |x|^i \\ &= \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| |x|^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} S_{n-2} \cdot \frac{S_{n-3}}{S_{n-2}} \cdots \frac{S_i}{S_{i+1}} |x|^i \\ &\leq \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| |x|^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} S_{n-2} K^{n-2-i} |x|^i \\ &= \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| |x|^{n-1} + S_{n-2} K^{n-2} \cdot \frac{\left(\frac{|x|}{K}\right)^{n-1} - 1}{\frac{|x|}{K} - 1} \\ &< \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| |x|^{n-1} + S_{n-2} K^{n-2} \cdot \frac{\left(\frac{|x|}{K}\right)^{n-1}}{\frac{|x|}{K} - 1} \\ &= \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| |x|^{n-1} + S_{n-2} K^{n-2} \cdot \frac{\left(\frac{|x|}{K}\right)^{n-1} \cdot K}{|x| - K} \\ &= \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| |x|^{n-1} + S_{n-2} \cdot \frac{|x|^{n-1}}{|x| - K} \end{aligned}$$

ゆえに、両辺を $|x|^{n-1} > 0$ で割って、

$$|x| < \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + S_{n-2} \cdot \frac{1}{|x| - K}$$

$|x| > K$ のとき、 $|x| - K > 0$ であるから、

$$|x|(|x| - K) < \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| (|x| - K) + S_{n-2}$$

整理して、

$$|x|^2 - \left(K + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \right) |x| + K \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| - S_{n-2} < 0$$

を得る。これを $|x|$ について解くと、

$$|x| < \frac{K + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \sqrt{\left(K - \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \right)^2 + 4S_{n-2}}}{2} = A$$

を得る。

しかし、 $A \leq 1$ のときは、 $|x| > 1$ に矛盾す

るので $|x| \leq 1$ である。ゆえに、

$$|x| \leq \max(A, 1)$$

である。(Q. E. D.)

6 次方程式

$$x^6 - 2x^5 + 15x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 10x + 3 = 0$$

について、この場合は定理 3 を用いること

ができないが、定理 4 を用いると $|x| < 5.29$

が得られる。定理 2 から得られるのは

$|x| < 5.41$ なので、少し精度があがっている。

ちなみに、実際の解は $|x| < 3.92$ である。

しかし、 $0 \leq i < j \leq n-2$ であって、

$|a_i| = |a_j|$ なるものが存在する場合、 $K=1$ となるので、定理 2 と同じ値になってしまう。

定理 5

複素数変数 x に関する n 次方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

について、 $\left| \frac{a_{n-2}}{a_n} \right|, \dots, \left| \frac{a_1}{a_n} \right|, \left| \frac{a_0}{a_n} \right|$ を大きい順

に並べたものを S_{n-2}, \dots, S_1, S_0 とする。

$$\text{また、 } m = \min_{0 \leq i \leq n-3} \frac{S_{n-2} - S_i}{n-2-i}, \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| = a,$$

$\sqrt{S_{n-2}} = b$ とする。このとき、

$$|x| < 1 + \frac{(a+b)^2(a+2b+1) - m}{a^2 + 2b^2 + 4ab + 2a + 2b}$$

が成り立つ。

(証明)

並べ替え不等式(補題 1)を用いて方程式を変形し、以下を得る。

$$|x|^n \leq \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| |x|^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} S_i |x|^i$$

ここで、任意の k に対して、

$$m \leq \frac{S_{n-2} - S_k}{n-2-k}$$

なので、 $m(n-k-2) \leq S_{n-2} - S_k$ から、

$$S_k \leq S_{n-2} - (n-k-2)m.$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} |x|^n &\leq \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| |x|^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} S_i |x|^i \\ &\leq \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| |x|^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} (S_{n-2} - (n-2-i)m) |x|^i \\ &= \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| |x|^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} S_{n-2} |x|^i - \sum_{i=0}^{n-2} (n-2-i)m |x|^i \end{aligned}$$

ここで、 $\sum_{i=0}^{n-2} (n-2-i)m |x|^i$ を計算すると、

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-2} (n-2-i)m |x|^i &= m \cdot \frac{|x|^{n-1} - (n-1)|x| + n-2}{(|x|-1)^2} \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} |x|^n &\leq \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| |x|^{n-1} + S_{n-2} \cdot \frac{|x|^{n-1} - 1}{|x|-1} \\ &\quad + m \cdot \frac{|x|^{n-1} - (n-1)|x| + n-2}{(|x|-1)^2} \end{aligned}$$

$$< \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| |x|^{n-1} + S_{n-2} \cdot \frac{|x|^{n-1}}{|x|-1} + m \cdot \frac{|x|^{n-1}}{(|x|-1)^2}$$

両辺を $|x|^{n-1} > 0$ で割って整理すると、

$$\left(\left| x \right| - \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \right) (|x|-1)^2 - S_{n-2} (|x|-1) - m < 0$$

ここで、

$$f(x) = \left(\left| x \right| - \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \right) (|x|-1)^2$$

$$-S_{n-2}(|x|-1)-m$$

とすると、 $f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称であるから、 $x \geq 0$ の範囲で考えればよい。このとき、

$$f'(x) = 3x^2 - 2\left(2 + \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)x + \left(1 + 2\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| - S_{n-2}\right)$$

となるので、

$$x = \frac{2 + \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \pm \sqrt{\left(2 + \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)^2 - 6\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| - 3 + 3S_{n-2}}}{3}$$

$$= \frac{2 + \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \pm \sqrt{\left(1 - \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)^2 + 3S_{n-2}}}{3}$$

のとき、 $f'(x) = 0$ となる。また、

$$\frac{2 + \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| - \sqrt{\left(1 - \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)^2 + 3S_{n-2}}}{3}$$

$$\leq \frac{2 + \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| - \sqrt{\left(1 - \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)^2}}{3}$$

$$= \frac{\left|2 + \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right| - \left|\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| - 1\right|}{3}$$

$$\leq \frac{\left|2 + \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| - \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| + 1\right|}{3} = 1.$$

ここで、逆三角不等式 $|s| - |t| \leq |s - t|$ を用いている。

$$\frac{2 + \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| + \sqrt{\left(1 - \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)^2 + 3S_{n-2}}}{3}$$

$$\geq \frac{2 + \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| + \sqrt{\left(1 - \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)^2}}{3}$$

$$= \frac{\left|2 + \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right| + \left|1 - \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right|}{3}$$

$$\geq \frac{\left|2 + \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| + 1 - \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right|}{3} = 1$$

が成り立つ。よって、 $f(x)$ のグラフは図1のようになる。

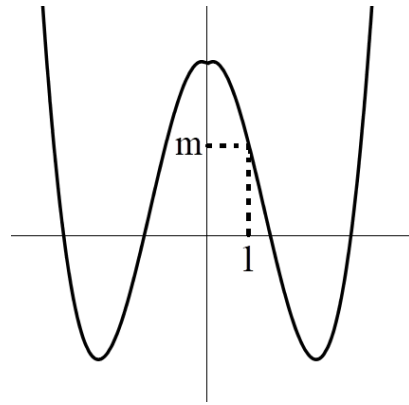


図 1

いま、

$$\frac{2 + \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| + \sqrt{\left(1 - \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)^2 + 3S_{n-2}}}{3}$$

$$\leq \frac{2 + \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| + \sqrt{\left(1 - \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)^2} + \sqrt{3S_{n-2}}}{3}$$

$$= \frac{2 + \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| + \left|1 - \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right| + \sqrt{3S_{n-2}}}{3}$$

$$\leq \frac{2 + \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| + 1 + \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| + \sqrt{\frac{S_{n-2}}{3}}}{3}$$

$$\leq 1 + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \sqrt{S_{n-2}} = 1 + a + b$$

が成り立つ。

よって、 $f(x)$ のグラフ上の点

$(1+a+b, f(1+a+b))$ を通り $f(x)$ に接する直線と x 軸の交点の x 座標を d とすると、 $f(x) < 0$ をみたす x は $|x| < d$ も満たす。

$c = 1 + a + b$ とおく。 $(c, f(c))$ を通り

$f(x)$ に接する直線の方程式は以下のようになる。

$$y = f'(c)(x - c) + f(c)$$

$y = 0$ を代入し、 x について解くと、

$$x = c - \frac{f(c)}{f'(c)}$$

よって、

$$|x| < c - \frac{f(c)}{f'(c)}$$

が成り立つ。

$c = 1 + a + b$ を代入し、計算すると、

$$|x| < 1 + \frac{(a+b)^2(a+2b+1) - m}{a^2 + 2b^2 + 4ab + 2a + 2b}$$

を得る。(Q. E. D.)

証明の後半部分について、ニュートン法を用いてグラフと x 軸の交点を求めている。一般に、漸化式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

を順に計算していくことでより精度の高い値が得られる。

定理 5 は、定理 3 が使えず、定理 4 で得

られる値が定理 2 と同じになってしまう場合に有用な公式であると考えた。しかし、実際の方程式に適用させると、定理 5 は定理 2 と同程度かそれ以下の精度であることがわかった。

例えば、6 次方程式

$$x^6 - 2x^5 + 15x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 10x + 3 = 0$$

について、定理 5 を用いると、 $|x| < 5.8$ が得られる。しかし、定理 2 から得られる値は、 $|x| < 5.41$ であり、定理 5 のほうが精度が悪い(実際の解は $|x| < 3.92$)。

これは、ニュートン法の計算回数を増やすことで、ある程度精度をあげることができると考えられる。

定理 6

複素数変数 x に関する n 次方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

について、 $\left| \frac{a_{n-2}}{a_n} \right|, \dots, \left| \frac{a_1}{a_n} \right|, \left| \frac{a_0}{a_n} \right|$ を大きい順

に並べたものを S_{n-2}, \dots, S_1, S_0 とする。ま

た、 $T = \sqrt[n-2]{\frac{S_{n-3}}{S_{n-2}}}$ とするとき、

$$|x| \leq \max \left(\frac{T + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \sqrt{\left(T - \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \right)^2 + 4S_{n-2}}}{2}, 1 \right)$$

が成り立つ。

(証明)

方程式を変形し、並べ替え不等式を用いると、 $|x| > 1$ のとき、次を得る。

$$|x|^n \leq \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| |x|^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} S_i |x|^i$$

いま、 $0 \leq i \leq n-2$ の整数 i について、

$$S_i \leq S_{n-3} \cdot \left(\sqrt[n-2]{\frac{S_{n-2}}{S_{n-3}}} \right)^i$$

が成り立つ。ここで、

$$U = \sqrt[n-2]{\frac{S_{n-2}}{S_{n-3}}} = \frac{1}{T}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} |x|^n &\leq \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| |x|^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} S_{n-3} U^i |x|^i \\ &\leq \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| |x|^{n-1} + S_{n-3} \cdot \frac{(U|x|)^{n-1} - 1}{U|x| - 1} \\ &< \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| |x|^{n-1} + S_{n-3} \cdot \frac{U^{n-1} |x|^{n-1}}{U|x| - 1} \end{aligned}$$

両辺を $|x|^{n-1} > 0$ で割り、 $|x|$ について解くと、

$$|x| < \frac{\frac{1}{U} + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \sqrt{\left(\frac{1}{U} - \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \right)^2 + 4S_{n-3} U^{n-2}}}{2}$$

を得る。いま、 $U = \sqrt[n-2]{\frac{S_{n-2}}{S_{n-3}}} = \frac{1}{T}$ より、

$$|x| < \frac{T + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \sqrt{\left(T - \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \right)^2 + 4S_{n-2}}}{2}.$$

ここで、

$$\frac{T + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \sqrt{\left(T - \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \right)^2 + 4S_{n-2}}}{2} \leq 1 \text{ のとき、}$$

$|x| > 1$ に矛盾するので、 $|x| \leq 1$.

ゆえに、

$$|x| \leq \max \left(\frac{T + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \sqrt{\left(T - \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \right)^2 + 4S_{n-2}}}{2}, 1 \right)$$

である。(Q. E. D.)

この定理は S_{n-2} と S_{n-3} の差が大きいが、

定理 3 が使えないとき、有用である。

6 次方程式

$$x^6 - 2x^5 + 17x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2 = 0$$

について、この場合、定理 3 が使えず、定理 4 で得られる値が定理 2 と同じになって

しまう。定理 6 を用いると、 $|x| < 5.48$ が得

られる。定理 2 から得られる値は $|x| < 5.66$

なので、定理 2 よりも精度はよい(実際の解

は $|x| < 4.14$)。しかし、 S_{n-2} と S_{n-3} の差が

小さいときや n の値が大きいときは定理 2 で得られる値とほとんど等しくなる。

定理 7

複素数変数 x に関する n 次方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

について、

$$z = \frac{\left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \sqrt{\left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|^2 + 4 \left| \frac{a_{n-2}}{a_n} \right| + 2n - 6}}{2}$$

とおくとき、

$$|x| < z + \frac{\sum_{i=0}^{n-3} \frac{n-2-i}{n-2} \left| \frac{a_i}{a_n} \right|^{\frac{n-2}{n-2-i}}}{z^{n-3} \left(\left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| z + 2 \left| \frac{a_{n-2}}{a_n} \right| + n - 3 \right)}$$

が成り立つ。

(証明)

まず、以下の補題が成り立つ。

補題 2 (Young の不等式)

非負実数 p, q および $s+t=1$ なる正の実数 s, t について、以下が成り立つ。

$$pq \leq sp^s + tq^t$$

証明は参考文献[4]を参照されたい。

方程式を変形して、次を得る。

$$|x|^n \leq \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| |x|^{n-1} + \left| \frac{a_{n-2}}{a_n} \right| |x|^{n-2} + \sum_{i=0}^{n-3} \left| \frac{a_i}{a_n} \right| |x|^i$$

ここで、 $0 \leq i \leq n-3$ において、

$$\frac{n-2-i}{n-2} + \frac{i}{n-2} = 1 \text{ であるから、補題 2 よ}$$

り、次が成り立つ。

$$\left| \frac{a_i}{a_n} \right| |x|^i \leq \frac{n-2-i}{n-2} \left| \frac{a_i}{a_n} \right|^{\frac{n-2}{n-2-i}} + \frac{i}{n-2} \left(|x|^i \right)^{\frac{n-2}{i}}$$

$$= \frac{n-2-i}{n-2} \left| \frac{a_i}{a_n} \right|^{\frac{n-2}{n-2-i}} + \frac{i}{n-2} |x|^{n-2}$$

よって、

$$|x|^n \leq \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| |x|^{n-1} + \left| \frac{a_{n-2}}{a_n} \right| |x|^{n-2}$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-3} \left(\frac{n-2-i}{n-2} \left| \frac{a_i}{a_n} \right|^{\frac{n-2}{n-2-i}} + \frac{i}{n-2} |x|^{n-2} \right)$$

ここで、 $\sum_{i=0}^{n-3} \frac{n-2-i}{n-2} \left| \frac{a_i}{a_n} \right|^{\frac{n-2}{n-2-i}} = r$ とおくと、

$$\begin{aligned} |x|^n &\leq \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| |x|^{n-1} + \left| \frac{a_{n-2}}{a_n} \right| |x|^{n-2} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-3} \frac{i}{n-2} |x|^{n-2} + r \\ &= \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| |x|^{n-1} + \left(\left| \frac{a_{n-2}}{a_n} \right| + \frac{n-3}{2} \right) |x|^{n-2} + r \end{aligned}$$

$$\left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| = A, \quad \left| \frac{a_{n-2}}{a_n} \right| + \frac{n-3}{2} = B \text{ とおくと、}$$

$$|x|^n \leq A|x|^{n-1} + B|x|^{n-2} + r.$$

ゆえに、

$$|x|^n - A|x|^{n-1} - B|x|^{n-2} - r \leq 0.$$

ここで、

$$f(x) = |x|^n - A|x|^{n-1} - B|x|^{n-2} - r$$

とおくと、 $f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称であるから、 $x \geq 0$ の範囲で考えれば十分である。このとき、

$$f'(x) = nx^{n-1} - A(n-1)x^{n-2} - B(n-2)x^{n-3}$$

$$= x^{n-3}(nx^2 - A(n-1)x - B(n-2))$$

より、 $f'(x) = 0$ を解くと、

$$x = 0, \frac{(n-1)A \pm \sqrt{(n-1)^2 A^2 + 4n(n-2)B}}{2n}$$

が得られる。しかし、

$$\frac{(n-1)A - \sqrt{(n-1)^2 A^2 + 4n(n-2)B}}{2n} < 0$$

であるから、 $f'(x) = 0$ となるのは、

$$x = 0, \frac{(n-1)A + \sqrt{(n-1)^2 A^2 + 4n(n-2)B}}{2n}$$

のときである。

よって、 $f(x)$ のグラフは図 2 のようになる。

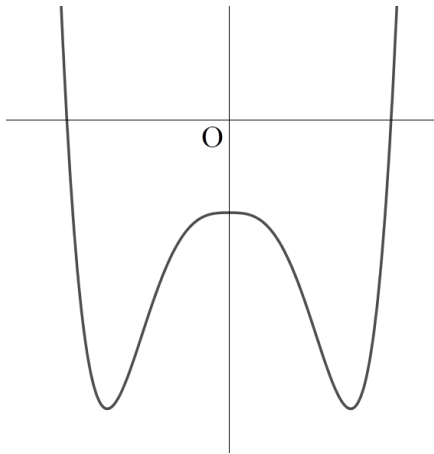


図 2

いま、

$$z = \frac{A + \sqrt{A^2 + 4B}}{2}$$

$$> \frac{(n-1)A + \sqrt{(n-1)^2 A^2 + 4n(n-2)B}}{2n}$$

であり、 $f(z) = -r < 0$ が成り立つ。よって、

点 $(z, -r)$ を接点とする $f(x)$ のグラフの接線と x 軸の交点を $(D, 0)$ とすると、

$$f(x) \leq 0 \text{ を満たすすべての } x \text{ は } |x| < D \text{ も}$$

満たす。

$(z, -r)$ を接点とする $f(x)$ のグラフの接線の傾きは、

$$f'(z) = z^{n-3}(n(z^2 - Az - B) + Az + 2B)$$

いま、 z は 2 次方程式 $t^2 - At - B = 0$ の解となっているので、 $z^2 - Az - B = 0$ が成り立つ。ゆえに、

$$f'(z) = z^{n-3}(n(z^2 - Az - B) + Az + 2B)$$

$$= z^{n-3}(Az + 2B)$$

よって、接線の方程式は、

$$y = z^{n-3}(Az + 2B)(x - z) - r$$

$y = 0$ を代入し、 x について解くと、

$$x = z + \frac{r}{z^{n-3}(Az + 2B)}$$

したがって、

$$|x| < z + \frac{r}{z^{n-3}(Az + 2B)}$$

$$= z + \frac{\sum_{i=0}^{n-3} \frac{n-2-i}{n-2} \left| \frac{a_i}{a_n} \right|^{\frac{n-2}{n-2-i}}}{z^{n-3} \left(\left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| z + 2 \left| \frac{a_{n-2}}{a_n} \right| + n - 3 \right)}$$

となる。(Q. E. D.)

6 次方程式

$$x^6 - 9x^5 + 5x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 10x - 100 = 0$$

について、定理 2 では $|x| < 15.78$ 、定理 3 で

は $|x| < 13.43$, 定理 4 では $|x| < 15.74$, 定理 6 では $|x| < 15.64$ が得られるが、定理 7 では $|x| < 9.68$ が得られる。実際の解は $|x| < 8.35$ であり、かなりよい精度である。

$\left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|$ がそれほど小さくなく、低い次数の係数が大きいとき、これまでの定理よりも精度のよい値が得られると考えられる。

しかし、 $\left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|$ の値が小さいとき、精度が悪くなる場合がある。例えば、6 次方程式 $x^6 - x^5 + 2x^4 + 100x^3 + 7x^2 + 10x - 3 = 0$ について、定理 2 からは $|x| < 11$ が得られるが、定理 7 からは $|x| < 183162.1$ が得られ、とても精度が悪い(実際の解は $|x| < 4.89$)。

定理 8

実数変数 x に関する n 次方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

について、 $M = \max_{0 \leq i \leq n-2} \left| \frac{a_i}{a_n} \right|$ とすると、

$$x \leq \max \left(\frac{1 - \frac{a_{n-1}}{a_n} + \sqrt{\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 + 4M}}{2}, 1 \right)$$

が成り立つ。

(証明)

$x > 1$ とする。このとき、方程式を以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} x^n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot x^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \left| \frac{a_i}{a_n} \right| x^i \\ &\leq -\frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot x^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} M x^i \\ &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot x^{n-1} + M \cdot \frac{x^{n-1} - 1}{x - 1} \\ &< -\frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot x^{n-1} + M \cdot \frac{x^{n-1}}{x - 1} \end{aligned}$$

これを x について解くと、

$$x < \frac{1 - \frac{a_{n-1}}{a_n} + \sqrt{\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 + 4M}}{2}$$

を得る。しかし、

$$\frac{1 - \frac{a_{n-1}}{a_n} + \sqrt{\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 + 4M}}{2} < 1$$

のときは $x > 1$ に矛盾するので、 $x \leq 1$ となる。ゆえに、

$$x \leq \max \left(\frac{1 - \frac{a_{n-1}}{a_n} + \sqrt{\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 + 4M}}{2}, 1 \right)$$

が成り立つ。(Q. E. D.)

6 次方程式

$$x^6 + 10x^5 + 2x^4 + 100x^3 + 7x^2 + 10x - 3 = 0$$

について、定理 2 からは $|x| < 16.47$ が得られる。定理 8 を用いると $x < 6.92$ を得るので、実数解の範囲は $-16.47 < x < 6.92$ であ

ることがわかる。実際の実数解は
 である。定理 8 は、 $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ の値が大きいほど
 有用である。

定理 9

複素数変数 x に関する n 次方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

について、 $|a_{n-2}| \leq |a_{n-3}| \leq \dots \leq |a_0|$ を満たす

とする。また、 $A = \frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n-2} \left| \frac{a_i}{a_n} \right|$ とするとき、

$$|x| \leq \max \left(\frac{1 + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \sqrt{\left(1 - \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|\right)^2 + 4A}}{2}, 1 \right)$$

が成り立つ。

(証明)

まず、以下の補題が成り立つ。

補題 3 (Chebyshev の不等式)

$$p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n, \quad q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_n \text{ なる}$$

実数 p_i, q_i について、以下の不等式が成り立つ。

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i q_{n+1-i} \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q_i \right)$$

証明は参考文献[5]を参照されたい。

方程式を変形して次を得る。

$$-10.69 < x < 0.2$$

$$|x|^n \leq \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| |x|^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \left| \frac{a_i}{a_n} \right| |x|^i$$

$|x| > 1$, $|a_{n-2}| \leq |a_{n-3}| \leq \dots \leq |a_0|$ のとき題 3

より、

$$\sum_{i=0}^{n-2} \left| \frac{a_i}{a_n} \right| |x|^i \leq \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=0}^{n-2} \left| \frac{a_i}{a_n} \right| \right) \left(\sum_{i=0}^{n-2} |x|^i \right)$$

$$= A \cdot \frac{|x|^{n-1} - 1}{|x| - 1}$$

$$< A \cdot \frac{|x|^{n-1}}{|x| - 1}.$$

ゆえに、

$$|x|^n < \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| |x|^{n-1} + A \cdot \frac{|x|^{n-1}}{|x| - 1}$$

両辺を $|x|^{n-1}$ で割り、 $|x|$ について解くと、

$$|x| < \frac{1 + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \sqrt{\left(1 - \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|\right)^2 + 4A}}{2}$$

を得る。ここで、

$$\frac{1 + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \sqrt{\left(1 - \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|\right)^2 + 4A}}{2} \leq 1$$

のときは、 $|x| \leq 1$ となり、 $|x| > 1$ に矛盾す

るので、 $|x| \leq 1$ である。ゆえに、

$$|x| \leq \max \left(\frac{1 + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \sqrt{\left(1 - \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|\right)^2 + 4A}}{2}, 1 \right)$$

となる。(Q. E. D.)

6 次方程式

$$x^6 - x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 10x - 100 = 0$$

について、定理 2 からは $|x| < 11$ を得るが、

定理 9 からは $|x| < 5.97$ が得られるので、定

理 2 よりも精度がよい(実際の解は

$|x| < 2.59$)。しかし、定理の適用には条件

式を満たす必要があるため、実際に用いる場面は少ないと思われる。

定理 9 とよく似た状況において、以下の定理が成り立つことが知られている。

定理 10 (掛谷の定理)

複素数変数 x に関する n 次方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

について、 $a_n > a_{n-1} > \cdots > a_0 > 0$ を満たす

とき、 $|x| < 1$ である。

4. 今後の課題

今回は、 n 次方程式の範囲についてある程度精度のよい公式を作ること成功したが、具体的な解については考察できなかった。今後は具体的な方程式について考えることや、整数解、有理数解なども調べてい

きたい。

5. 参考文献

- [1] web サイト「高精度計算サイト」
<http://keisan.casio.jp/exec/user/1401518475>
- [2] 「獲得金メダル！国際数学オリンピック一メダリストが教える解き方と技」、小林一章 監修、朝倉書店
- [3] 初歩的な不等式 I
http://izumi-math.jp/I_Yanagita/emath_ver1.1ps.pdf p402 - p403
- [4] web サイト「高校数学の美しい物語」
<https://mathtrain.jp/young>
- [5] web サイト「高校数学の美しい物語」
<https://mathtrain.jp/chebyshev>
- [6] 「掛谷の定理」の別証明
https://ci.nii.ac.jp/els/contentscinii_20180205003442.pdf?id=ART000061556
8

正五角形と黄金比Ⅲ

5年C組 古宮 昌典
指導教員 川口 慎二

1. 要約

サイエンス研究会数学班5年生は図形の性質について研究している。今回は、前回の研究([1]参照)で得られた結果を発展させ、新たに発見した図形の性質を証明することを目標とした。

キーワード 正五角形、黄金比、正多角形、外接円、1点で交わる

2. 研究の背景と目的

正多角形と円は、その対称性の高さなどから、「美しい」とよく言われる。前回の研究([1]参照)において、円と正多角形を用いて考案した図形の性質を考えた。今回は、正多角形の対称性を活かして新たに発見した図形の性質を考察することと、前回の研究で得られた結果の一般化について考えた。

■ $\sin 18^\circ$

$XY=XZ$, $\angle X=36^\circ$ である二等辺三角形 XYZ を考える。正五角形の1辺と対角線の長さの比は黄金比であることから、 XY と YZ の長さの比は黄金比である。 X から YZ に垂線を下ろすことで、 $\sin 18^\circ = \frac{1}{2\phi}$ が得られる。

3. 研究内容

3-1. 正五角形と黄金比

■黄金比

黄金比とは、 $1:\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ のことであり、

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ を ϕ で表すことが多い。黄金比は、

人が最も美しいと感じる比であるといわれ

ている。また、 ϕ は、 $\phi^2 = \phi + 1$, $\frac{1}{\phi} = \phi - 1$

という不思議な性質をもっている。正五角形の1辺と対角線の長さの比は黄金比であることは広く知られている。

前回の研究では、半径 R の円に内接する正多角形について、各頂点を中心とする半径 R の円をかいた図形について考察したが、さらに作図を加えることで、新たな性質が得られた。

定理1

点 O を中心とする円 Γ に内接する正五角形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ において、線分 A_2A_4 と A_3A_5 の交点を B_1 、線分 A_3A_5 と A_4A_1 の交点を B_2 、線分 A_4A_1 と A_5A_2 の交点を B_3 、線分 A_5A_2 と A_1A_3 の交点を B_4 、線分 A_1A_3 と A_2A_4 の交点を B_5 とする。また、 $\triangle B_1A_3A_4$ の外接円を Σ_1 、 $\triangle B_2A_4A_5$ の外

接円を Σ_2 , $\triangle B_3A_5A_1$ の外接円を Σ_3 ,
 $\triangle B_4A_1A_2$ の外接円を Σ_4 , $\triangle B_5A_2A_3$ の外
 接円を Σ_5 とし、 $1 \leq i \leq 5$ に対して、 Σ_i の中
 心を C_i とする。さらに、 Σ_i と直線 B_iC_i の交
 点のうち B_i でないほうを D_i とする。

このとき、 $1 \leq i \leq 5$ について、以下の 3 つ
 が成り立つ。

- (1) C_i は Γ 上に存在する。
- (2) Σ_i の半径と Γ の半径の比は黄金比で
 ある。
- (3) Γ の半径と OD_i の長さの比は黄金比
 である。

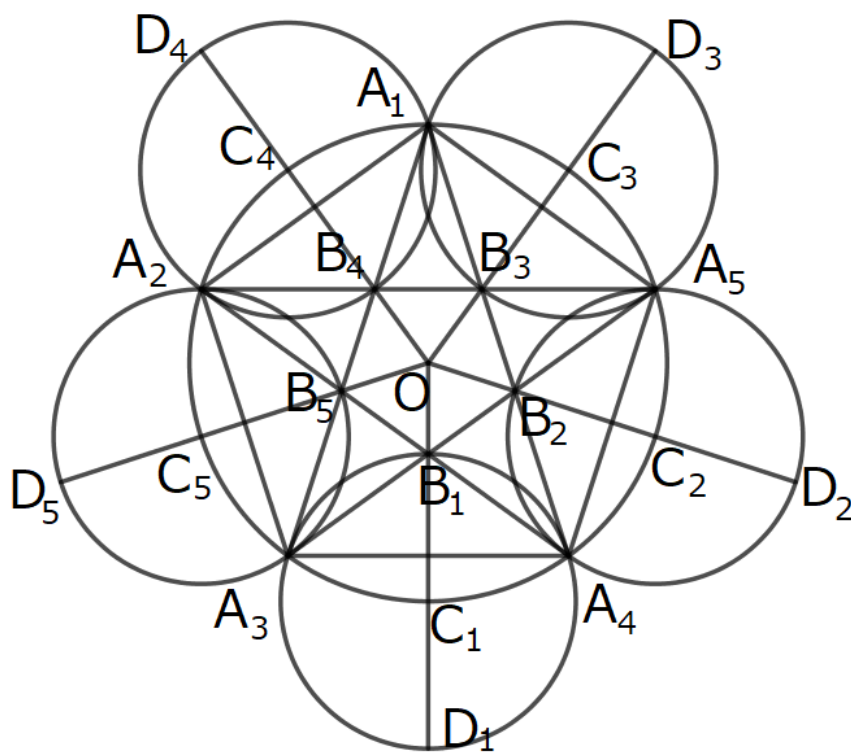


図 1

(証明)

(1) $\triangle B_1A_3A_4$ は $B_1A_3 = B_1A_4$ の二等
 辺三角形、 $\triangle A_1A_3A_4$ は $A_1A_3 = A_1A_4$ の
 二等辺三角形であり、 C_1 は $\triangle B_1A_3A_4$ の外
 心であるから、 B_1 と A_1 と C_1 はいずれも辺
 A_3A_4 の垂直二等分線上にあるので、これ
 らの点は同一直線上にある。ここで、 C_1 は
 $\triangle B_1A_3A_4$ の外心であるから、

$$\angle B_1C_1A_4 = 2\angle B_1A_3A_4 = 72^\circ,$$

$\angle A_1C_1A_4 = 72^\circ$ を得る。一方、弧 A_4A_1 に
 対する円周角は 72° であるから、円周角の
 定理の逆より、 C_1 は Γ 上に存在する。 C_2 から
 C_5 についても同様である。(Q. E. D.)

(2) 明らかに Σ_i ($1 \leq i \leq 5$) の半径はすべ
 て等しいので、 Σ_1 についてだけ考えればよ
 い。 Γ の半径を r とする。また、 O から
 A_3A_5 へおろした垂線の足を H とする。直

角三角形 OA_3H において、 $\angle OA_3H = 18^\circ$ 、 $OA_3 = r$ であるから、 $OH = r \sin 18^\circ$ 、また、直角三角形 OB_1H において、 $\angle OB_1H = 54^\circ$ であるから、

$$\sin 54^\circ = \frac{OH}{OB_1} = \frac{r \sin 18^\circ}{OB_1},$$

$$OB_1 = \frac{r \sin 18^\circ}{\sin 54^\circ}$$

ここで、

$$\sin(90^\circ - 2\theta) = \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$$

であるから、

$$\sin 54^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ = 1 - \frac{1}{2\phi^2}$$

を得る。ゆえに、

$$OB_1 = \frac{r \sin 18^\circ}{\sin 54^\circ} = \frac{r \cdot \frac{1}{2\phi}}{1 - \frac{1}{2\phi^2}} = \frac{r}{2\phi - \frac{1}{\phi}}$$

ϕ の性質 $\phi^2 = \phi + 1$ 、 $\frac{1}{\phi} = \phi - 1$ を用いるこ

とにより、

$$OB_1 = \frac{r}{2\phi - \frac{1}{\phi}} = \frac{r}{2\phi - (\phi - 1)}$$

$$= \frac{r}{\phi + 1} = \frac{r}{\phi^2}$$

を得る。(1)より、 $C_1B_1 = r - OB_1$ であるから、

$$C_1B_1 = r - \frac{r}{\phi^2} = r \left(1 - \frac{1}{\phi^2} \right)$$

$$= r \cdot \frac{\phi^2 - 1}{\phi^2} = r \cdot \frac{(\phi - 1)(\phi + 1)}{\phi^2}$$

再び、 ϕ の性質を用いることで、

$$C_1B_1 = r \cdot \frac{\frac{1}{\phi} \cdot \phi^2}{\phi^2} = r \cdot \frac{1}{\phi}$$

を得る。したがって、 Σ_1 の半径と Γ の半径の比は、

$$r \times \frac{1}{\phi} : r = 1 : \phi$$

より、黄金比である。(Q. E. D.)

(3) 明らかに OD_i ($1 \leq i \leq 5$) の長さはすべて等しいので、 D_1 についてだけ考えればよい。 Γ の半径を r とすると、(2)より、

$$C_1B_1 = r \cdot \frac{1}{\phi}$$

である。また、

$$OD_1 = OC_1 + C_1D_1 = r + C_1B_1$$

であるから、

$$OD_1 = r + \frac{r}{\phi} = \frac{r(\phi + 1)}{\phi} = \frac{r\phi^2}{\phi} = r\phi$$

したがって、 Γ の半径と OD_1 の長さの比は黄金比となる。(Q. E. D.)

また、次の定理が得られた。

定理 2

定理 1 の図形において、 $\triangle A_1B_3B_4$ の外接円を ω_1 、 $\triangle A_2B_4B_5$ の外接円を ω_2 、 $\triangle A_3B_5B_1$ の外接円を ω_3 、 $\triangle A_4B_1B_2$ の外接円を ω_4 、 $\triangle A_5B_2B_3$ の外接円を ω_5 とし、 $1 \leq i \leq 5$ に対して、 ω_i の中心を E_i とする。また、 A_1 を中心とし、 Γ の半径を半径とする円を O_i とし、 O_3 と O_4 の交点を D_1' 、 O_4 と O_5 の交点を D_2' 、 O_5 と O_1 の交点を D_3' 、 O_1 と O_2 の交点を D_4' 、 O_2 と O_3 の交点を D_5' とする。このとき、 $1 \leq i \leq 5$ 、 $1 \leq j \leq 5$ について、以下の 2 つが成り立つ。

- (1) ω_i の半径と Σ_j の半径の比は黄金比である。
- (2) Γ の半径と OD_i' の長さの比は黄金比である。

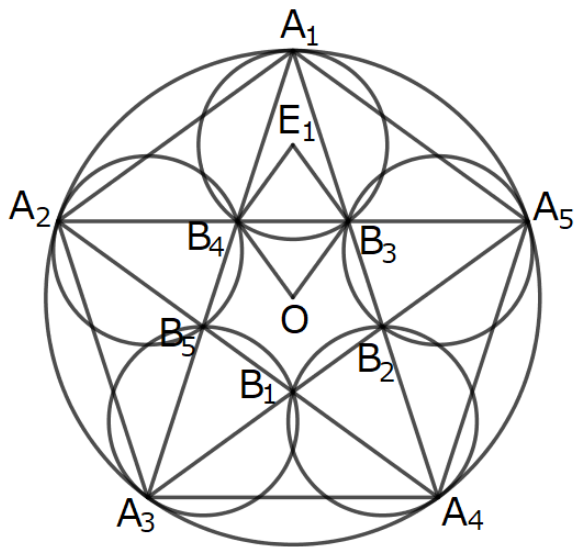


図 2

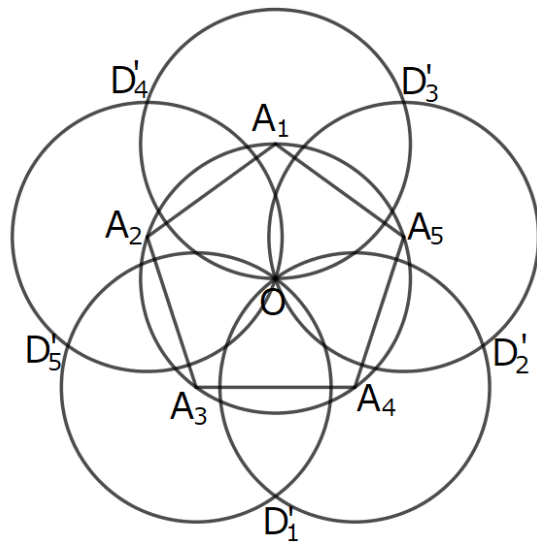


図 3

(証明)

(1) 図 2 を参照。

ω_1 の半径と Σ_1 の半径の比を調べれば十分である。 Γ の半径を r とする。定理 1 (2) より、 Σ_1 の半径は $r \cdot \frac{1}{\phi}$ である。 E_1 は ω_1 の

中心であるから、円周角の定理より、

$$\angle B_3 E_1 B_4 = 2 \cdot 36^\circ = 72^\circ$$

である。 $\triangle E_1 B_3 B_4$ と $\triangle O B_3 B_4$ は、頂角 72° の二等辺三角形で、底辺が $B_3 B_4$ であるから、 $\triangle E_1 B_3 B_4 \equiv \triangle O B_3 B_4$ を得る。ゆえに、 ω_1 の半径は

$$E_1 B_3 = O B_3 = \frac{r}{\phi^2}$$

である。ゆえに、 ω_1 の半径と Σ_1 の半径の比は、

$$\frac{r}{\phi^2} : \frac{r}{\phi} = 1 : \phi$$

より、黄金比である。(Q. E. D.)

(2) 図 3 を参照。

Γ の半径と OD_1' の長さの比を調べれば

十分である。 O_3, O_4, Γ の半径は等しいので、 $OA_4 = A_4 D_1' = D_1' A_3 = A_3 O$ ゆえに、四角形 $OA_4 D_1' A_3$ はひし形である。よって、 $\triangle A_4 O D_1'$ は $A_4 O = A_4 D_1'$ であり、頂角 108° の二等辺三角形である。これは、 $\triangle A_4 A_5 A_3$ と相似であり、正五角形の 1 辺と対角線の長さの比は黄金比であるから、 $A_4 O$ と OD_1' の長さの比も黄金比である。

(Q. E. D.)

定理 2 の図形についてさらに考察する。

定理 3

定理 2 の図形について、 Σ_3 と Σ_4 の交点のうち A_1 と異なるものを E_1' 、 Σ_4 と Σ_5 の交点のうち A_2 と異なるものを E_2' 、 Σ_5 と Σ_1 の交点のうち A_3 と異なるものを E_3' 、 Σ_1 と Σ_2 の交点のうち A_4 と異なるものを E_4' 、 Σ_2 と Σ_3 の交点のうち A_5 と異なるものを E_5' とする。また、 O_5 と O_2 の交点を E_1'' 、 O_1 と O_3 の交点を E_2'' 、 O_2 と O_4 の交点を E_3'' 、 O_3 と O_5 の交点を E_4'' 、 O_4 と

O_1 の交点を E_5'' とする。このとき、
 $1 \leq i \leq 5, 1 \leq j \leq 5$ について、以下の 3 つが成
 り立つ。

- (1) $D_i' = D_i$ である。
- (2) O_{i+1} と Σ_i (ただし $O_6 = O_1$ とする),
 O_j と Σ_{j+1} (ただし $\Sigma_6 = \Sigma_1$ とする)
 は外接する。
- (3) $E_i = E_i' = E_i''$ である。

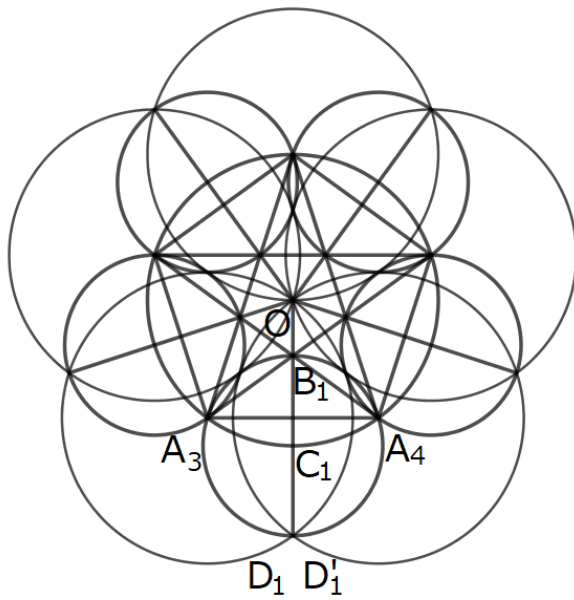


図 4

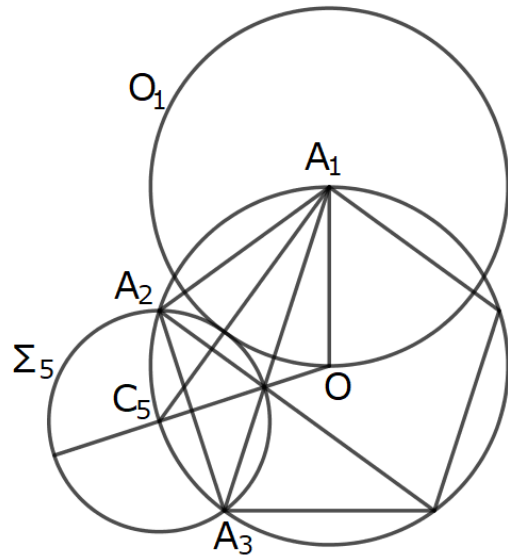


図 5

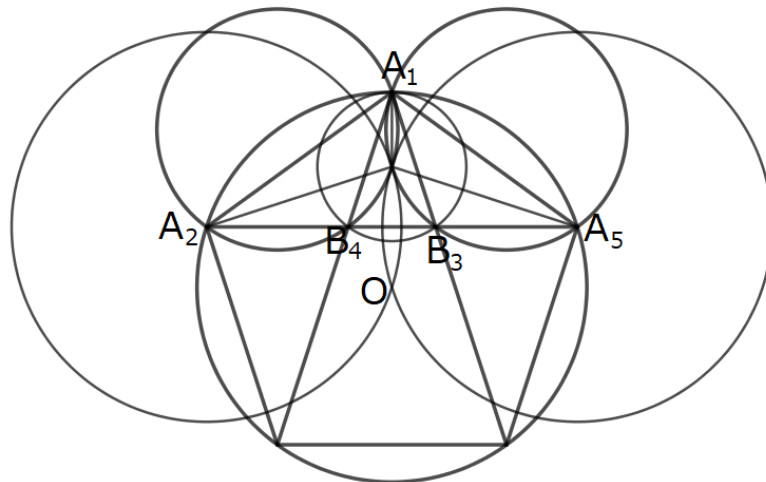


図 6

(証明)

(1) 図4を参照。

D_1' と D_1 の場合を考えれば十分である。
 B_1, C_1, D_1 は同一直線上にあり、 B_1, C_1 は線分 A_3A_4 の垂直二等分線上にあることから、 D_1 は線分 A_3A_4 の垂直二等分線上にある。また、四角形 $OA_4D_1'A_3$ はひし形であるから、 D_1' も線分 A_3A_4 の垂直二等分線上にある。ゆえに、3点 O, D_1, D_1' は同一直線上にある。定理1(3)と定理2(2)より、 $OD_1 = OD_1'$ であるから、 $D_1 = D_1'$ である。

(Q. E. D.)

(2) 図5を参照。

O_1 と Σ_5 について考える。 Γ の半径を r とする。定理1(2)より、 Σ_5 の半径は $\frac{r}{\phi}$ である。また、 O_1 の半径は r である。

ここで、 $\angle A_1OC_5 = 72^\circ + 36^\circ = 108^\circ$ であり、 $OA_1 = OC_5$ であるから、 OA_1 と A_1C_5 の長さの比は正五角形の一辺と対角線の比に等しい。ゆえに、 $A_1C_5 = r\phi$ となる。すると、

$$\frac{r}{\phi} + r = r \left(\frac{1}{\phi} + 1 \right) = r(\phi - 1 + 1) = r\phi$$

より、 Σ_5 の半径と O_1 の半径の和は中心間の距離に等しいので、 Σ_5 と O_1 は外接する。

(Q. E. D.)

(3) 図6を参照。

$\triangle E_1B_3B_4 \equiv \triangle OB_3B_4$ より、点 E_1 と点 O は線分 A_2A_5 に関して対称であるから、

$$\angle A_2E_1A_5 = \angle A_2OA_5 = 144^\circ$$

また、対称性より $\angle A_1E_1A_5 = \angle A_1E_1A_2$ なので、

$$\angle A_1E_1A_5 = \frac{1}{2}(360^\circ - 144^\circ) = 108^\circ$$

一方、 $\angle A_1B_3A_5 = 180^\circ - 36^\circ \times 2 = 108^\circ$ であるから、

$$\angle A_1E_1A_5 = \angle A_1B_3A_5$$

よって、円周角の定理より、点 E_1 は Σ_3 上にある。同様にして、点 E_1 は Σ_4 上にもある。いま、明らかに $E_1 \neq A_1$ であるから、 $E_1 = E_1'$ が成り立つ。

O_2 と O_5 はそれぞれ点 A_2 、点 A_5 を中心とする円であるから、図形 $O_2 \cup O_5$ は線分 A_2A_5 を軸として対称である。よって、点 E_1'' と点 O は線分 A_2A_5 を軸として対称なので、これは点 E_1 と等しい。

以上より、 $E_1 = E_1' = E_1''$ が示された。

(Q. E. D.)

定理3(2), (3)は一般の正多角形では成り立たない。図7は七角形の場合である。

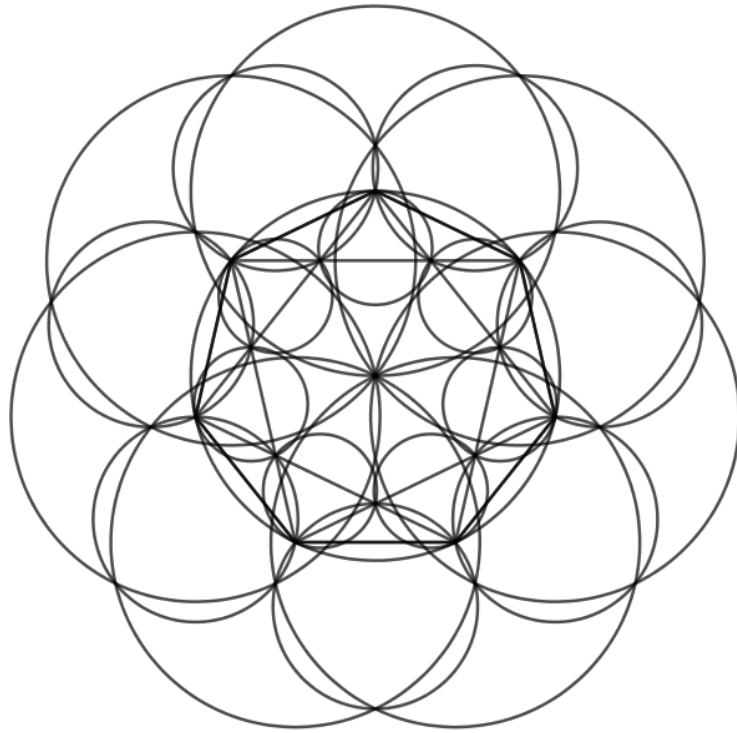


図 7

3-4. 五角形と円

五角形について、前回の研究の発展として、以下が成り立つことがわかった。

定理 4

半径 r , 中心 O の円に内接する五角形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ について、頂点 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 を中心とする、半径 r の円をそれぞれ $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$ とする。また、 Γ_3 と Γ_4 の交点を Q_1 , Γ_4 と Γ_5 の交点を Q_2 , Γ_5 と Γ_1 の交点を Q_3 , Γ_1 と Γ_2 の交点を Q_4 , Γ_2 と Γ_3 の交点を Q_5 とし (いずれも O とは異なる)、 Γ_5 と Γ_2 の交点を R_1 , Γ_1 と Γ_3 の交

点を R_2 , Γ_2 と Γ_4 の交点を R_3 , Γ_3 と Γ_5 の交点を R_4 , Γ_4 と Γ_1 の交点を R_5 とする。

そして、線分 R_3R_4 の中点を S_1 , 線分 R_4R_5 の中点を S_2 , 線分 R_5R_1 の中点を S_3 , 線分 R_1R_2 の中点を S_4 , 線分 R_2R_3 の中点を S_5 とし、線分 Q_2Q_5 の中点を T_1 , 線分 Q_1Q_3 の中点を T_2 , 線分 Q_2Q_4 の中点を T_3 , 線分 Q_3Q_5 の中点を T_4 , 線分 Q_4Q_1 の中点を T_5 とする。このとき、 $1 \leq i \leq 5$ について、以下の 2 つが成り立つ。

(1) $S_i = T_i$ が成り立つ。

(2) 五角形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ と五角形

$S_1S_2S_3S_4S_5$ は相似であり、相似比は $2:1$ である。

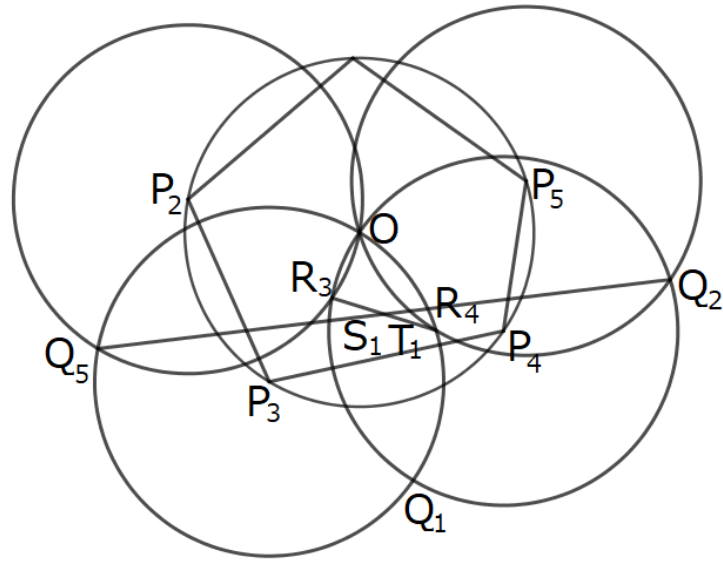


図 8

(証明)

(1) 図 8 を参照。

$S_1 = T_1$ を示す。他も同様である。

四角形 $OP_2Q_5P_3$ はひし形であるから、

$$\overline{OP_2} + \overline{OP_3} = \overline{OQ_5}$$

が成り立つ。同様にして、

$$\overline{OP_4} + \overline{OP_5} = \overline{OQ_2}$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} \overline{OT_1} &= \frac{\overline{OQ_5} + \overline{OQ_2}}{2} \\ &= \frac{\overline{OP_2} + \overline{OP_3} + \overline{OP_4} + \overline{OP_5}}{2} \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

を得る。

四角形 $OP_2R_3P_4$ はひし形であるから、

$$\overline{OP_2} + \overline{OP_4} = \overline{OR_3}$$

同様にして、

$$\overline{OP_3} + \overline{OP_5} = \overline{OR_4}$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} \overline{OS_1} &= \frac{\overline{OR_3} + \overline{OR_4}}{2} \\ &= \frac{\overline{OP_2} + \overline{OP_3} + \overline{OP_4} + \overline{OP_5}}{2} \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

を得る。

①, ②より、 $S_1 = T_1$ である。よって示された。(Q. E. D.)

(2) 先ほどの議論から、 $1 \leq i \leq 5$ に対して、

$$\overline{OS_i} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq k \leq 5 \\ k \neq i}} \overline{OP_k}$$

が成り立つ。

ここで、点 X を

$$\overline{OX} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^5 \overline{OP_k}$$

を満たす点とする。

このとき、線分 XP_i を 1:3 に外分する点を S_i' とすると、

$$\overline{OS_i'} = \frac{-3\overline{OX} + \overline{OP_i}}{1-3}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq k \leq 5 \\ k \neq i}} \overline{OP_k} = \overline{OS_i}$$

となり、 $\overline{OS_i}' = \overline{OS_i}$ が成り立つ。ゆえに、
五角形 $S_1S_2S_3S_4S_5$ は X を相似の中心として五角形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ と相似であり、相似比は $1:2$ となる。(Q. E. D.)

定理 4 (2) は一般の多角形では成り立たない。なぜなら、 $(2n+1)$ 角形においては、

$$\overline{OS_1} = \frac{\overline{OP_n} + \overline{OP_{n+1}} + \overline{OP_{n+2}} + \overline{OP_{n+3}}}{2}$$

が成り立つので、 $\overline{OS_1} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n+1 \\ k \neq 1}} \overline{OP_k}$ が成

り立つためには $2n+1=5$ が成り立つことが必要だからである。

4. 今後の課題

今回は、特に五角形について円と組み合わせた図形について考察を行うことができた。今後は、一般の多角形について考えることや、今回のように「ある多角形でしか成り立たない性質」に着目して研究を進めていきたい。また、考案した図形を反転幾何にも応用させていきたい。

5. 参考文献

- [1] 「正五角形と黄金比Ⅱ」、古宮昌典、奈良女子大学附属中等教育学校平成 26 年度 SSH 生徒研究論文集、p.55-64

6. 謝辞

今回の研究にあたりご指導くださった顧問の川口先生、ありがとうございました。

自己回避歩行の経路の総数に関する考察

5年C組 古宮 昌典

指導教員 川口 慎二

1. 要約

サイエンス研究会数学班5年生は離散数学について研究している。今回は、ある条件を満たす経路の総数を求めることに関して、様々なアプローチから調べていくことを目標とした。

キーワード 不等式、通る点、通る辺、一意性

2. 研究の背景と目的

参考文献[1]において、以下の問題について取り上げられていた。「 $n \times n$ のマス目において、左上端の点から右下端の点まで、同じ辺、点を2度通らずに行く(最短経路でなくてもよい)方法は何通りあるか。」

私はこの問題に興味をもち、経路の総数を数え上げる方法についていくつかのアプローチを用いて考えることにした。

3. 研究内容

参考文献[1]によれば、先ほど挙げた経路の総数の実際の値は、以下のようになっている。

n	経路の総数
1	2
2	12
3	184
4	8512
5	1262816
6	575780564
7	789360053252
8	3266598486981642
9	41044208702632496804

以下、たて n マス、横 k マスからできる $n \times k$ のマス目について、左上端の点から右下端の点まで同じ点、辺を2度通らずに行く経路(最短でなくてもよい)の総数を $P_{n \times k}$ と表すことにする。また、マス目について、図1のように頂点に名前をつける。

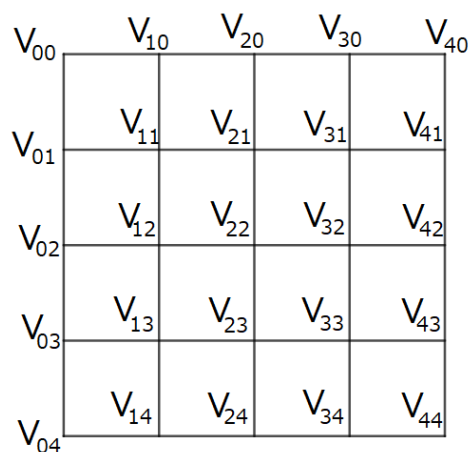


図1

3-1. 通る点を定めるアプローチ

通る点を定めることで、求める経路の一部を数えることができる。

定理 1

$$P_{n \times k} \geq (n+1)^k + (k+1)^n - {}_{n+k}C_n \text{ である。}$$

(証明)

点の集合 $\{V_{1i_1}, V_{2i_2}, \dots, V_{ki_k}\}$ (ただし、 $1 \leq m \leq k$ について、 $0 \leq i_m \leq n$ とする) を考える。図 2, 図 3 のように、これらの点を通る経路

$$V_{00} \rightarrow V_{0i_1} \rightarrow V_{1i_1} \rightarrow V_{1i_2} \rightarrow V_{2i_2} \rightarrow \dots \rightarrow V_{ki_k} \rightarrow V_{kk}$$

を定めることができる。

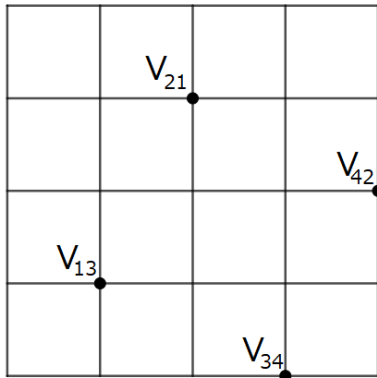


図 2 (点をとる)

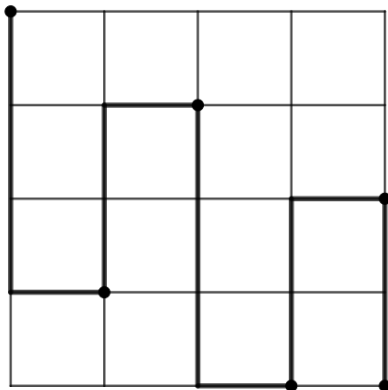


図 3 (経路を作る)

このようにして得られる経路の個数は、

組 (i_1, i_2, \dots, i_n) の個数を数えればよいので、

$$(k+1)^n \text{ 通り} \dots \text{①}$$

存在する。

同様に、点の集合 $\{V_{j_11}, V_{j_22}, \dots, V_{j_n n}\}$

(ただし、 $1 \leq m \leq n$ について、 $0 \leq j_m \leq k$ とする) に対して 1 つの経路を対応させることができる。その経路は、

$$(n+1)^k \text{ 通り} \dots \text{②}$$

存在する。

いま、①と②の和について、最短経路が 2 回数えられている。最短経路は、 ${}_{n+k}C_n$ 通り存在するので、

$$P_{n \times k} \geq (n+1)^k + (k+1)^n - {}_{n+k}C_n$$

が成り立つ。(Q. E. D.)

定理 1 より、 $n = k = 5$ とすることで

$$P_{5 \times 5} \geq 6^5 + 6^5 - {}_{10}C_5 = 15300$$

を得るが、実際の値 $P_{5 \times 5} = 1262816$ よりもかなり小さい値となっていて、評価が甘い。

3-2. 領域を分割するアプローチ

経路によって、マス目全体が 2 つの領域に分かれることを用いて、以下の定理を得た。

定理 2

n, k を偶数とすると、

$$P_{n \times k} \leq 14^{\frac{nk}{4}} - 2^{n+k-2} \times 14^{\frac{(n-2)(k-2)}{4}} + 2$$

が成り立つ。

(証明)

左上端のマスを S とする。マス目全体が経路によっていくつかの領域に分けられると考える。ある経路について、線分 $V_{00}V_{10}$ を含むか線分 $V_{00}V_{01}$ を含むかのどちらかが成り立つ。線分 $V_{00}V_{10}$ を含む場合、 S を含む領域を黒色で塗り、線分 $V_{00}V_{01}$ を含む場合、 S を含む領域を灰色で塗ることにする。そして、経路によって分けられた領域について、隣り合う領域は異なる色で塗るものとする。いま、経路上の格子点について、明らかに3つ以上の線分とはつながっていないので、すべての領域を黒色、灰色の2色で塗り分けることができる。

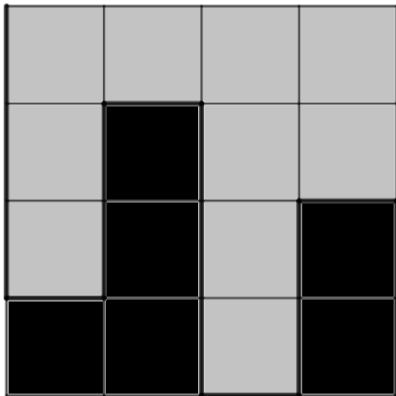


図 4

また、色の塗り分けから経路を復元することを考えると、色の境界線が経路の一部となり、マス目の内部については、経路は1つに決まる。また、マス目の周上においても、 S の色によって、経路が1つに決まる。つまり、色の塗り分けから経路を復元するとき、それはただ1通りに決まる。よって、求める経路の総数は、各マス目に対

して黒色か灰色を塗る塗り分け方よりも少ないので、

$$P_{n \times k} \leq 2^{n \times k}$$

が成り立つ。

n, k は偶数であるから、マス目全体を $\frac{n \times k}{4}$ 個の 2×2 のマス目に分けることができる。いま、 2×2 のマス目について、図5のような塗り分けを考える。色の境界が経路となるが、経路は同じ点、辺を2度通らないので、明らかに図5の塗り分けはマス目全体の中に含まれない。

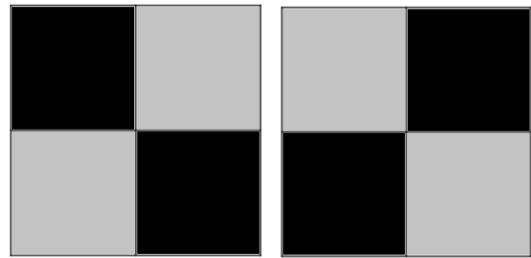


図 5

よって、 2×2 のマス目1つについて、図5の塗り分けを除いた $2^4 - 2 = 14$ (通り) があり得るので、

$$P_{n \times k} \leq 14^{\frac{n \times k}{4}}$$

が成り立つ。

さらに、左端および下端のマスがすべて灰色で塗られている場合を考える。この塗り分けに対して経路が存在したとすると、 S の色の決め方より、その経路は線分 $V_{00}V_{01}$ を含む。よって、この経路は図6のように

$$V_{00} \rightarrow V_{01} \rightarrow V_{02} \rightarrow \dots \rightarrow V_{0n} \rightarrow V_{1n} \rightarrow \dots \rightarrow V_{kn}$$

となるので、長方形 $V_{10}V_{1(n-1)}V_{k(n-1)}V_{k0}$ の内部に黒色のマスは存在しない。

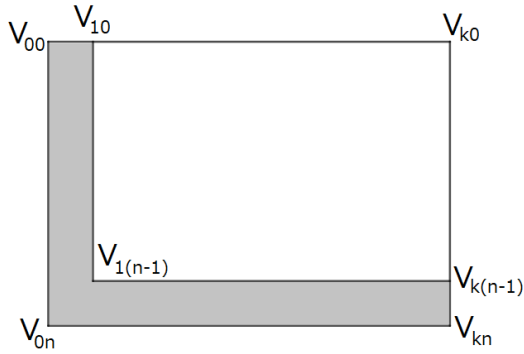


図 6

逆に、左端および下端のマスがすべて灰色で塗られており、さらに長方形 $V_{10}V_{1(n-1)}V_{k(n-1)}V_{k0}$ の内部に少なくとも1つの黒色のマスがあるような塗り分け方を考える。左端および下端のマスに接しているマスについては、黒色または灰色の2通りが考えられるので、 2^{n+k-3} 通りである。それ以外のマスについては、 2×2 のマス目に分けられており、1つの 2×2 のマス目につ

き14通りの塗り方があるので、 $14^{\frac{(n-2)(k-2)}{4}}$ 通りである。この中には、すべてのマスが灰色で塗られる場合が1通りあるので、

$2^{n+k-3} \times 14^{\frac{(n-2)(k-2)}{4}} - 1$ (通り)の塗り分けについては経路が存在しない。同様にして、上端および右端のマスが黒色で塗られている場合を考えると、さらに

$2^{n+k-3} \times 14^{\frac{(n-2)(k-2)}{4}} - 1$ (通り)の塗り分けについて経路が存在しないことがわかるので、

求める経路の総数について、

$$P_{n \times k} \leq 14^{\frac{nk}{4}} - 2 \left(2^{n+k-3} \times 14^{\frac{(n-2)(k-2)}{4}} - 1 \right)$$

$$= 14^{\frac{nk}{4}} - 2^{n+k-2} \times 14^{\frac{(n-2)(k-2)}{4}} + 2$$

が成り立つ。(Q. E. D.)

定理2において、 $n = k = 4$ とすると、

$$P_{4 \times 4} \leq 14^4 - 2^5 \times 14^1 + 2 = 37970$$

を得るが、実際の値 $P_{4 \times 4} = 8512$ よりもかなり大きい値となっている。

しかし、定理2の評価はさらに改良することができる。例えば、経路によって作られる色の塗り分けには、図7のようなものは含まれない。

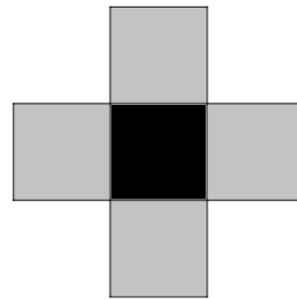


図 7

また、図8のように、マス目全体が左下、中央、右上の3つの領域に分かれている場合も経路が存在しない。

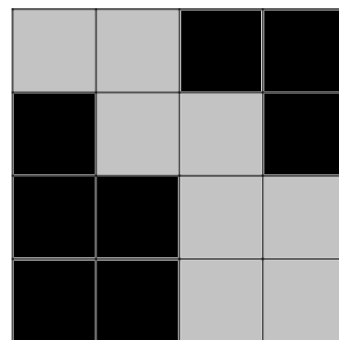


図 8

3-3. 通る辺を定めるアプローチ

条件を満たす経路について、通る辺に注目すると、以下が成り立つことがわかった。

定理 3

条件を満たす経路 X について、 X に含まれる線分で、 $V_{00}V_{10}$ に平行なものすべての集合を X' とする。このとき、 X' に対して、条件を満たす経路 X が一意に定まる。

(証明)

たて n マス、横 k マスのマス目について考える。 $0 \leq i \leq k-1, 0 \leq j \leq n$ について、

$\overline{V_{(i-1)j}V_{ij}} \in X'$ かつ $\overline{V_{ij}V_{(i+1)j}} \notin X'$ を満たす

$\overline{V_{(i-1)j}V_{ij}}$ において、点 V_{ij} の次に通る点が 1 つに定まることを示せばよい。

すべての $0 \leq m \leq j-1$ に対して $V_{im} \notin X'$ または、すべての $j+1 \leq l \leq n$ に対して $V_{il} \notin X'$ が成り立つときは、明らかに、

$\overline{V_{i0}V_{in}}$ 上で点 V_{ij} に最も近い点 $V_{ia} (a \neq j)$ がただ 1 つ存在し、それが次に通る点である。

ある $0 \leq m \leq j-1$ で $V_{im} \in X'$ となるものが 1 つ以上存在し、かつ、ある $j+1 \leq l \leq n$ で $V_{il} \in X'$ となるものが 1 つ以上存在する場合を考える。

$$L = \{ \overline{V_{i0}V_{(i+1)0}}, \overline{V_{i1}V_{(i+1)1}}, \dots, \overline{V_{in}V_{(i+1)n}} \}$$

$$M = \{ \overline{V_{i0}V_{(i+1)0}}, \overline{V_{i1}V_{(i+1)1}}, \dots, \overline{V_{i(j-1)}V_{(i+1)(j-1)}} \}$$

$$N = \{ \overline{V_{i(j+1)}V_{(i+1)(j+1)}}, \dots, \overline{V_{in}V_{(i+1)n}} \}$$

とおく。

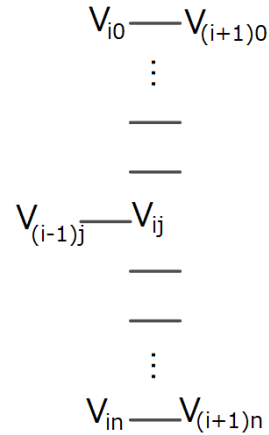


図 9

点 V_{ij} の次に通る点としてあり得るものが複数存在したと仮定すると、それらはすべて $\overline{V_{i0}V_{in}}$ 上にあるため、高々 2 つである。

1 つは $\overline{V_{i0}V_{i(j-1)}}$ 上に存在し、もう 1 つは $\overline{V_{i(j+1)}V_{in}}$ 上に存在して、どちらも X' に含まれる線分の端点のうち、 V_{ij} に最も近い点として選ばばよい。

点 V_{ij} の次に通る点が V_{ib} (ただし、 $0 \leq b \leq j-1$) であったとする。いま、点 V_{ij} と

点 V_{00} は 1 つの経路でつながっている。よって、点 V_{ib} から始めて、 M のいずれの元も通らずに N のある元を通る経路は存在しない。ゆえに、点 V_{ij} を通ってから初めて L のある元を通るとき、それは M の元である。

それを $\overline{V_{is}V_{(i+1)s}}$ とすると、明らかに

$V_{is} \rightarrow V_{(i+1)s}$ の順で通る。そして、 M の元の

うち最後に通るものを $\overline{V_{id}V_{(i+1)d}}$ とすると、

$V_{id} \rightarrow V_{(i+1)d}$ の順で通る。よって、点 V_{ij} を

通ってから通る M の元の個数は奇数である。

また、点 V_{ij} を通ってから初めて N の元

を通るとき、それを $\overline{V_{it}V_{(i+1)t}}$ とすると、

$V_{(i+1)t} \rightarrow V_{it}$ の順で通る。そして、 N の元の

うち最後に通るものを $\overline{V_{ie}V_{(i+1)e}}$ とすると、

$V_{ie} \rightarrow V_{(i+1)e}$ の順で通る。よって、点 V_{ij} を通

ってから通る N の元の個数は偶数である。

一方、点 V_{ij} の次に通る点が V_{ic} (ただし、

$j+1 \leq c \leq n$) であったとすると、同様の議

論より、点 V_{ij} を通ってから通る M の元の

個数は偶数、 N の元の個数は奇数となるが、

これは矛盾である。よって、点 V_{ij} の次に通

る点は 1 つに定まる。

以上より、条件を満たす経路が 1 つに定まることが示された。 (Q. E. D.)

定理 3 の証明について、 V_{00} から V_{ij} へ移

動するまでに L の元を通る回数は偶数となる

ので、 $|X' \cap L|$ は奇数であることがわかる。

つまり、マス目の各列には奇数本の、 X' に

含まれる線分が存在する。いま、マス目の各列から $V_{00}V_{10}$ に平行な線分を奇数本取り出すことを考える。

$$\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i C_i = 0, \sum_{i=0}^{n+1} C_i = 2^{n+1}$$

より、奇数本取り出す組合せは、 2^n 通り存在する。よって、

$$P_{n \times k} \leq (2^n)^k = 2^{n \times k}$$

を得る。

また、定理 1 は、各列から 1 本の X' に含まれる線分を与えていると捉えることができる。

条件を満たす経路 X について、 X に含まれる点だけを取り出したものを X' とするとき、一般に X' から X に戻すことはできない。例えば、図 10 の 2 つの経路について、通る点の集合はともに図 11 となり、一致するからである。

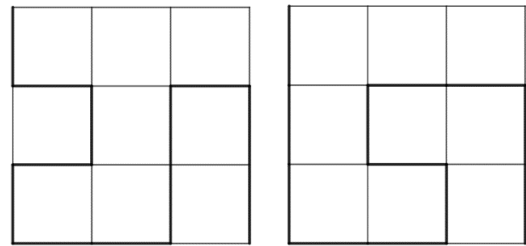


図 10

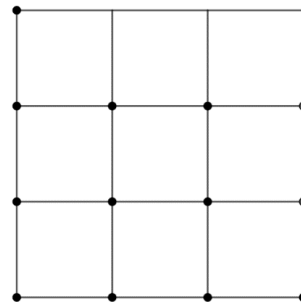


図 11

4. 今後の課題

今回の研究では必要条件についての考察が主となってしまったが、今後は十分条件についても考えていきたい。また、経路と経路に関する演算を導入し、新たな議論をすることも考えている。

5. 参考文献

[1]動画『『フカシギの教え方』おねえさんと
いっしょ！みんなで数えてみよう！』

<https://www.youtube.com/watch?v=Q4gTV4r0zRs>

数学オリンピックの問題に関する研究Ⅱ

5年C組 古宮 昌典
指導教員 川口 慎二

1. 要約

サイエンス研究会数学班5年生は数学オリンピックの問題について研究している。今回は、数学オリンピックの組合せ論、数論、関数方程式の問題に関して、一般化および考察を行うことを目標とした。

キーワード 数学オリンピック、一般化、条件を変える

2. 研究の背景と目的

数学オリンピックの問題は、難解であるとともに、数学的な美しさも併せもっている。しかし、数学オリンピックの予選問題などは、答えだけを求めるものであり、数学的な広がりをもっていない場合が多い。昨年度は、主に幾何の問題において考察を行った。今回は、組合せ論、数論、関数方程式の問題について考察を行った。

ある。この本を読むのに二郎君がかかる日数と三郎君がかかる日数の差として考えられる値のうち最小のものを求めよ。

[日本数学オリンピック 2006 予選]

この問題の一般化として、以下の問題について考えた。解法は例題1とほぼ同じである。

問題1

a, m, n は正の整数で、 n は $a(a+1)$ の倍数であり、 $n \geq a^2 m$ を満たしている。

m 章からなり、全部で n ページある数学書がある。この本を、A君は1日に a ページ読み、B君は1日に $(a+1)$ ページ読む。ただし二人とも、このページ数に満たなくても、章が終わったら、その日の勉強は終了する。このとき、A君が読むのにかかる日数とB君が読むのにかかる日数の差として考えられる値のうち最小のものを求めよ。

(解答)

第1章を p_1 ページ、第2章を p_2 ページ、

3. 研究内容

3-1. 日本数学オリンピック予選の問題

次の問題は参考文献[1]において「組合せ」に分類されている、いわゆる「ノンジャンル」の問題である。

例題1

ある数学書がある。二郎君は、この本を一日に2ページずつ読み、三郎君は、この本を一日に3ページずつ読む。ただし二人とも、このページ数に満たなくても、章が終わったら、その日の勉強は終了する。この本は10章からなり、全部で120ページ

…、第 m 章を p_m ページとする。ここで、 p ページの章を二人が読むのにかかる日数の差を $f(p)$ とし、

$$g(p) = f(p) - \frac{1}{a(a+1)}p$$

とする。このとき、

$$\sum_{i=1}^m f(p_i) = \frac{1}{a(a+1)} \sum_{i=1}^m p_i + \sum_{i=1}^m g(p_i)$$

となるので、 $\sum_{i=1}^m g(p_i)$ の最小値を求めれば

よい。ここで、 q ページの章について、 $q = ka(a+1) + r$, $0 \leq r < a(a+1)$ とおくと、

$$g(q) = \left\lceil \frac{ka(a+1)+r}{a} \right\rceil - \left\lceil \frac{ka(a+1)+r}{a+1} \right\rceil - \frac{ka(a+1)+r}{a(a+1)}$$

$$= k(a+1) + \left\lceil \frac{r}{a} \right\rceil - ka - \left\lceil \frac{r}{a+1} \right\rceil - k - \frac{r}{a(a+1)}$$

$$= \left\lceil \frac{r}{a} \right\rceil - \left\lceil \frac{r}{a+1} \right\rceil - \frac{r}{a(a+1)}$$

となる。 $r = sa$, $0 \leq s < a+1$ とかけるときを考えると、

$$g(q) = \left\lceil \frac{sa}{a} \right\rceil - \left\lceil \frac{sa}{a+1} \right\rceil - \frac{sa}{a(a+1)}$$

$$= s - \left\lceil \frac{s(a+1)-s}{a+1} \right\rceil - \frac{s}{a+1}$$

$$= s - \left\lceil s - \frac{s}{a+1} \right\rceil - \frac{s}{a+1}$$

$$= s - s - \frac{s}{a+1}$$

$$\geq -\frac{a}{a+1}$$

が成り立つ。 $r = ta + u$, $1 \leq u < a$ とかける

ときは、

$$\left\lceil \frac{r}{a} \right\rceil = \left\lceil \frac{ta+u}{a} \right\rceil = t+1$$

$$\left\lceil \frac{r}{a+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{ta+u}{a+1} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{t(a+1)}{a+1} \right\rceil = t$$

が成り立つので、

$$g(q) \geq (t+1) - t - \frac{r}{a(a+1)}$$

$$\geq 1 - \frac{a(a+1)-1}{a(a+1)}$$

$$= \frac{1}{a(a+1)} > -\frac{a}{a+1}$$

となる。よって、 $g(q)$ は $r = a^2$ のとき、最

小値 $-\frac{a}{a+1}$ をとる。ゆえに、

$$\sum_{i=1}^m g(p_i) \geq -\frac{ma}{a+1}$$

を得るので、

$$\sum_{i=1}^m f(p_i) \geq \frac{n}{a(a+1)} - \frac{ma}{a+1} = \frac{n - ma^2}{a(a+1)}$$

ゆえに、

$$\sum_{i=1}^m f(p_i) \geq \left\lceil \frac{n - ma^2}{a(a+1)} \right\rceil$$

が成り立つ。いま、 n は $a(a+1)$ の倍数なので、 $n = la(a+1)$ とおくと、

$$\left\lceil \frac{n - ma^2}{a(a+1)} \right\rceil = \left\lceil \frac{la(a+1) - ma^2}{a(a+1)} \right\rceil$$

$$= \left\lceil l - \frac{ma}{a+1} \right\rceil$$

$$= l - \left\lfloor \frac{ma}{a+1} \right\rfloor \dots \textcircled{1}$$

となる。

いま、 $p_1 = p_2 = \dots = p_{m-1} = a^2$,

$p_m = n - (m-1)a^2$ なる数学書が最小値をとることを示す。

$$f(a^2) = \left\lfloor \frac{a^2}{a} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{a^2}{a+1} \right\rfloor = 0$$

より、

$$\sum_{i=1}^m f(p_i) = f(p_m)$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} f(p_m) &= \left\lfloor \frac{n - (m-1)a^2}{a} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n - (m-1)a^2}{a+1} \right\rfloor \\ &= l(a+1) - (m-1)a - \left\lfloor la - \frac{(m-1)a^2}{a+1} \right\rfloor \\ &= l(a+1) - (m-1)a - \left(la - \left\lfloor \frac{(m-1)a^2}{a+1} \right\rfloor \right) \\ &= l - (m-1)a + \left\lfloor (m-1)a - \frac{(m-1)a^2}{a+1} \right\rfloor \\ &= l - (m-1)a + (m-1)a + \left\lfloor -\frac{(m-1)a}{a+1} \right\rfloor \\ &= l + \left\lfloor -\frac{(m-1)a}{a+1} \right\rfloor \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①と②が等しいことを示す。 $m-1$ が $a+1$ の倍数か否かで場合分けをする。

(i) $m-1$ が $a+1$ の倍数であるとき
 $m-1 = c(a+1)$ とかける。

①において、

$$\begin{aligned} l - \left\lfloor \frac{ma}{a+1} \right\rfloor &= l - \left\lfloor \frac{\{c(a+1)+1\}a}{a+1} \right\rfloor \\ &= l - \left\lfloor ca + \frac{a}{a+1} \right\rfloor \\ &= l - ca \end{aligned}$$

一方、②において、

$$\begin{aligned} l - \left\lfloor -\frac{(m-1)a}{a+1} \right\rfloor &= l + \left\lfloor -\frac{c(a+1)a}{a+1} \right\rfloor \\ &= l - ca \end{aligned}$$

よって、①と②は等しい。

(ii) $m-1$ が $a+1$ の倍数でないとき

$m-1 = d(a+1) + e$ ($1 \leq e < a+1$) とかける。

①において、

$$\begin{aligned} l - \left\lfloor \frac{ma}{a+1} \right\rfloor &= l - \left\lfloor \frac{\{d(a+1)+e+1\}a}{a+1} \right\rfloor \\ &= l - \left\lfloor da + \frac{ea}{a+1} + \frac{a}{a+1} \right\rfloor \\ &= l - da - \left\lfloor \frac{ea}{a+1} + \frac{a}{a+1} \right\rfloor \end{aligned}$$

ここで、 $e \neq 0$ より、 $\frac{ea}{a+1} - \left\lfloor \frac{ea}{a+1} \right\rfloor \geq \frac{1}{a+1}$

であるから、 $\left\lfloor \frac{ea}{a+1} + \frac{a}{a+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{ea}{a+1} \right\rfloor + 1$ が成り立つ。ゆえに、

$$l - \left\lfloor \frac{ma}{a+1} \right\rfloor = l - da - 1 - \left\lfloor \frac{ea}{a+1} \right\rfloor$$

一方、②において、

$$\begin{aligned} l + \left\lfloor -\frac{(m-1)a}{a+1} \right\rfloor &= l + \left\lfloor -\frac{\{d(a+1)+e\}a}{a+1} \right\rfloor \\ &= l + \left\lfloor -da - \frac{ea}{a+1} \right\rfloor \\ &= l - da + \left\lfloor -\frac{ea}{a+1} \right\rfloor \end{aligned}$$

ここで、 $e \neq 0$ より、

$\left\lfloor -\frac{ea}{a+1} \right\rfloor = -1 - \left\lfloor \frac{ea}{a+1} \right\rfloor$ が成り立つので、

$$l + \left\lfloor -\frac{(m-1)a}{a+1} \right\rfloor = l - da - 1 - \left\lfloor \frac{ea}{a+1} \right\rfloor$$

よって、①と②は等しい。

(i), (ii)より、①と②は等しいことが示さ

れた。

したがって、最小値は $\left\lceil \frac{n-ma^2}{a(a+1)} \right\rceil$ である。

(終)

この問題について、さらに条件を緩めると、最小値を評価することはできるが、どの場合に最小値をとるかはわからなかった。

3-2. 日本数学オリンピック本選の問題

次の問題について一般化および考察を行った。

例題 2

k を正の整数、 m を奇数とする。このとき、 $n^n - m$ が 2^k で割りきれられるような正の整数 n が存在することを示せ。

[日本数学オリンピック本選 2010]

この問題について、一般化した次の定理が成り立つことがわかった。証明方法は例題 2 とほとんど同じである。

定理 2

k, m を正の整数、 p を素数とする。このとき、 $n^n - (pm+1)$ が p^k で割り切れるような正の整数 n が存在する。

(証明)

k に関する数学的帰納法で示す。

$k=1$ のとき、 $n=1$ とすれば、

$$1^1 - (pm+1) = -pm$$

は $p^1 = p$ で割り切れる。

$k=t$ のとき、ある正の整数 n_0 が存在し

て、 $n_0^{n_0} - (pm+1)$ が p^t で割り切れると仮定する。このとき、 n_0 は p の倍数でない。

$k=t+1$ のとき、

$$n_0^{n_0} \equiv pm+1 \pmod{p^{t+1}}$$

であれば n_0 が条件を満たす。そうでないとき、 p の倍数でない正の整数 l が存在し、

$$n_0^{n_0} \equiv lp^t + pm+1 \pmod{p^{t+1}}$$

が成り立つ。

ここで、 n_0 と p は互いに素であるから、オイラーの定理より、

$$n_0^{\phi(p^{t+1})} \equiv 1 \pmod{p^{t+1}}$$

が成り立つ。

$$\phi(p^{t+1}) = p^{t+1} - p^t = p^t(p-1)$$

なので、

$$n_0^{p^t(p-1)} \equiv 1 \pmod{p^{t+1}}$$

ゆえに、

$$n_0^{p^t l(p-1)} = \left(n_0^{p^t(p-1)} \right)^l \equiv 1 \pmod{p^{t+1}}$$

が成り立つ。ここで、 $n = n_0 + p^t l(p-1)$ と

おくと、 $\text{mod } p^{t+1}$ において、

$$n^n = n^{n_0 + p^t l(p-1)}$$

$$\begin{aligned}
&= n^{n_0} \cdot n^{p^t l(p-1)} \equiv n^{n_0} \\
&= (n_0 + p^t l(p-1))^{n_0} \\
&= \sum_{i=0}^{n_0} C_i \{l(p-1)\}^i p^{ti} n_0^{n_0-i}
\end{aligned}$$

$i \geq 2$ において、 $p^{ti} \equiv 0$ であるから、

$$\begin{aligned}
n^n &\equiv {}_{n_0}C_1 \cdot l(p-1) p^t n_0^{n_0-1} + n_0^{n_0} \\
&= p^t l(p-1) n_0^{n_0} + n_0^{n_0} \\
&\equiv p^t l(p-1) n_0^{n_0} + l p^t + pm + 1 \\
&= p^t \{l(p-1) n_0^{n_0} + l\} + pm + 1
\end{aligned}$$

ここで、

$$n_0^{n_0} \equiv pm + 1 \pmod{p^{t+1}}$$

より、

$$n_0^{n_0} \equiv 1 \pmod{p}$$

であるから、

$$l(p-1)n_0^{n_0} + l \equiv l(p-1) + l \equiv 0 \pmod{p}$$

が成り立つ。ゆえに、

$$p^t \{l(p-1)n_0^{n_0} + l\} \equiv 0 \pmod{p^{t+1}}$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned}
n^n &\equiv p^t \{l(p-1)n_0^{n_0} + l\} + pm + 1 \\
&\equiv pm + 1 \pmod{p^{t+1}}
\end{aligned}$$

したがって、 $n^n - (pm + 1)$ は p^{t+1} で割り切

れる。

よって $k = t + 1$ について題意が示されたので、数学的帰納法より任意の正の整数 k について題意が示された。(終)

また、例題2の主張を用いると、以下の定理が得られた。

定理2

3以上の整数 k について、以下が成り立つ。

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2^k - 3)(2^k - 1) \equiv 1 \pmod{2^k}$$

(証明)

$\text{mod } 2^k$ で考える。奇数 a について、オイラーの定理より、

$$a^{2^{k-1}} \equiv 1$$

が成り立つので、

$$a^{2^k} = (a^{2^{k-1}})^2 \equiv 1$$

を得る。よって、

$$(a + 2^k)^{a+2^k} \equiv a^{a+2^k} = a^a \cdot a^{2^k} \equiv a^a$$

が成り立つ。ここで、例題2より、 a^a を 2^k で割った余りは 2^k 以下の任意の奇数をと

りえるので、 $1^1, 3^3, 5^5, \dots, (2^k - 1)^{2^k - 1}$ を 2^k

で割った余りの集合は $\{1, 3, 5, \dots, 2^k - 1\}$

に等しいことがわかる。また、

$$\begin{aligned}
a^a \cdot (2^k - a)^{2^k - a} &\equiv a^a \cdot (-a)^{2^k - a} \\
&= -a^{2^k} \equiv -1
\end{aligned}$$

が成り立つので、 $k \geq 3$ より、

$$1^1 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdots (2^k - 1)^{2^k - 1} \equiv (-1)^{2^k - 2} = 1$$

を得る。ゆえに、

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2^k - 3) \cdot (2^k - 1)$$

$$\equiv 1^1 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdots (2^k - 1)^{2^k - 1}$$

$$\equiv 1$$

となる。(終)

3-3. 国際数学オリンピックの問題

以下の関数方程式の問題について、条件式を変更することで、改題を作成し、解法がどう変わるのか調べた。

例題 3

実数に対して定義され実数を値にとる関数 f であって、任意の実数 x, y に対して、

$$f([x]y) = f(x)[f(y)]$$

が成り立つようなものをすべて求めよ。た

だし、 $[z]$ は z を超えない最大の整数を表すものとする。[国際数学オリンピック 2010]

(解答)

$$f([x]y) = f(x)[f(y)] \cdots (*) \text{ とする。}$$

まず、(*)に $x=0$ を代入して、

$$f(0) = f(0)[f(y)].$$

ゆえに、 $f(0)=0$ または $[f(y)]=1$ が成り

立つ。

(i) $f(0)=0$ のとき

(*)に $x=y=1$ を代入して、

$$f(1) = f(1)[f(1)].$$

ゆえに、 $f(1)=0$ または $[f(1)]=1$

(A) $f(1)=0$ のとき

(*)に $x=1$ を代入して、

$$f(y) = f(1)[f(y)] = 0$$

が成り立つ。逆に、任意の実数 y について

$f(y)=0$ が成り立つとき、条件を満たす。

(B) $[f(1)]=1$ のとき

(*)に $y=1$ を代入して、

$$f([x]) = f(x)[f(1)] = f(x).$$

ここで、 $x > 1$ のとき、 $0 < \frac{1}{[x]} < 1$ が成り

立つ。すると、(*)に $y = \frac{1}{[x]}$ を代入し、

$$f(1) = f(x) \left[f \left(\frac{1}{[x]} \right) \right]$$

$$= f(x) \left[f \left(\left[\frac{1}{[x]} \right] \right) \right]$$

$$= f(x)[f(0)]$$

$$= f(x) \cdot 0 = 0$$

を得るが、これは $[f(1)]=1$ に反する。よ

って条件を満たす関数は存在しない。

(ii) $[f(y)] = 1$ のとき

(*)より、

$$f([x]y) = f(x).$$

これに $y = 0$ を代入して、

$$f(x) = f(0).$$

よって、 $f(x) = C$ (C は $1 \leq C < 2$ を満たす定数) とかける。逆に、この関数は条件を満たす。

以上より、求める関数は

$$f(x) = C$$

(C は定数で、 $C = 0$ または $1 \leq C < 2$) となる。(終)

改題 1

実数に対して定義され実数を値にとる関数 f であって、任意の実数 x, y に対して、

$$f([x]y) = f(x) + [f(y)]$$

が成り立つようなものをすべて求めよ。

(解答)

条件式に $x = y = 0$ を代入して、

$$f(0) = f(0) + [f(0)],$$

$$[f(0)] = 0.$$

また、条件式に $y = 0$ を代入して、

$$f(0) = f(x) + [f(0)] = f(x)$$

を得る。よって、

$$f(x) = C \quad (C \text{ は定数で、} 0 \leq C < 1)$$

とかける。逆に、この関数は条件式を満たす。よって求める関数は、

$$f(x) = C \quad (C \text{ は定数で、} 0 \leq C < 1)$$

である。(終)

改題 2

実数に対して定義され実数を値にとる関数 f であって、任意の実数 x, y に対して、

$$f([x] + y) = f(x)[f(y)]$$

が成り立つようなものをすべて求めよ。

(解答)

条件式に $x = y = 0$ を代入して、

$$f(0) = f(0)[f(0)]$$

ゆえに、 $f(0) = 0$ または $[f(0)] = 1$ が成り立つ。

(i) $f(0) = 0$ のとき

条件式に $x = 0$ を代入して、

$$f(y) = f(0)[f(y)] = 0$$

となる。実際、定数関数 $f(x) = 0$ は条件を満たす。

(ii) $[f(0)] = 1$ のとき

$f(0) = \alpha, f(1) = k$ とおく。まず、条件式に $y = 0$ を代入して、

$$f([x]) = f(x)[f(0)] = f(x)$$

を得る。また、条件式に $x = 0$ を代入して、

$$f(y) = \alpha [f(y)]$$

$$[f(y)] = \frac{f(y)}{\alpha}$$

を得る。次に、条件式に $x = \alpha$ を代入し、得られた式を用いることで、以下を得る。

$$f([\alpha] + y) = f(\alpha) [f(y)]$$

$$f(y+1) = f([\alpha]) \cdot \frac{f(y)}{\alpha}$$

$$f(y+1) = \frac{f(1)}{\alpha} \cdot f(y)$$

$$f(y+1) = \frac{k}{\alpha} \cdot f(y)$$

$f(1) = k$ より、整数 n について以下が成り立つ。

$$f(n) = k \cdot \left(\frac{k}{\alpha}\right)^{n-1}$$

いま、条件式に $x = 0, y = 1$ を代入して、

$$k = \alpha [k]$$

$$\frac{k}{\alpha} = [k]$$

が成り立つので、

$$f(n) = k \cdot \left(\frac{k}{\alpha}\right)^{n-1} = k \cdot [k]^{n-1}$$

となる。ここで、条件式に $x = 1, y = n$ (n は整数) を代入して、

$$f(n+1) = k [f(n)]$$

$$k \cdot [k]^n = k \cdot [k \cdot [k]^{n-1}]$$

$$[k]^n = [k \cdot [k]^{n-1}]$$

ここで、

$$C = [k], \varepsilon = k - [k]$$

とおくと、

$$C^n = [(C + \varepsilon)C^{n-1}]$$

$$C^n = [C^n + \varepsilon \cdot C^{n-1}]$$

ここで、 $\varepsilon > 0$ かつ $|C| \geq 2$ と仮定すると、十分大きな整数 N が存在し、 $\varepsilon \cdot C^{N-1} \geq 1$ となるようにできる。このとき、

$$C^N = [C^N + \varepsilon \cdot C^{N-1}] \geq C^N + 1$$

となって矛盾が生じる。また、 $\varepsilon > 0$ かつ $C = -1$ のとき、 n を偶数とすると、 $C^n = 1$ だが、 $C^n + \varepsilon \cdot C^{n-1} < 1$ より矛盾する。ゆえに、 $\varepsilon = 0$ または $C = 0$ または $C = 1$ のときを考えればよい。

(I) $\varepsilon = 0$ のとき

$k = C$ であるから、整数 n について、

$$f(n) = k \cdot [k]^{n-1} = C^n$$

となる。また、任意の実数 x に対して、

$$f([x]) = f(x)$$

が成り立つので、任意の実数 x について、

$$f(x) = C^{[x]}$$

が成り立つ。逆に、 C を定数 (C は整数) とし、

$$f(x) = C^{[x]}$$

とするとき、条件式の左辺は、

$$f([x] + y) = C^{[[x]+y]} = C^{[x]+[y]}$$

右辺は

$$f(x)[f(y)] = C^{[x]} \cdot [C^{[y]}] = C^{[x]+[y]}$$

となるので、(左辺)=(右辺)を満たす。

(II) $C=0$ のとき

整数 n について、

$$f(n) = k \cdot [k]^{n-1} = 0$$

となる。また、任意の実数 x に対して、

$$f([x]) = f(x)$$

が成り立つので、任意の実数 x について、

$$f(x) = 0$$

が成り立つ。逆に、定数関数 $f(x) = 0$ は条件式を満たす。

(III) $C=1$ のとき

$$\frac{k}{\alpha} = [k] = C \text{ より、} k = \alpha \text{ である。よって}$$

整数 n について、

$$f(n) = k \cdot [k]^{n-1} = \alpha$$

となる。また、任意の実数 x に対して、

$$f([x]) = f(x)$$

が成り立つので、任意の実数 x について、

$$f(x) = \alpha$$

が成り立つ。逆に、

$$f(x) = \alpha \quad (\alpha \text{ は } 1 \leq \alpha < 2 \text{ である定数})$$

とするとき、条件式において、

$$\text{(左辺)} = f([x] + y) = \alpha$$

$$\text{(右辺)} = f(x)[f(y)] = \alpha \cdot [\alpha] = \alpha$$

より、(左辺)=(右辺)を満たす。

(I), (II), (III)より、求める関数は、

$$f(x) = \alpha$$

(α は定数で、 $\alpha = 0$ または $1 \leq \alpha < 2$)

または

$$f(x) = C^{[x]} \quad (C \text{ は整数})$$

である。(終)

改題3

実数に対して定義され実数を値にとる関数 f であって、任意の実数 x, y に対して、

$$f([x] + y) = f(x) + [f(y)]$$

が成り立つようなものをすべて求めよ。

(解答)

$$f([x] + y) = f(x) + [f(y)] \quad \dots \text{(#)}$$

とする。また、 $f(0) = a$ とおく。

(#)に $x = y = 0$ を代入して、

$$f(0) = f(0) + [f(0)].$$

ゆえに、 $[a] = 0$ が成り立つ。(#)に $x = 0$ を

代入して、

$$f(y) = a + [f(y)]$$

$$[f(y)] = f(y) - a \quad \dots \text{①}$$

を得る。また、(#)に $y = 0$ を代入して、

$$f([x]) = f(x) + [f(0)] = f(x) \quad \dots \text{②}$$

いま、整数 n について、 $-[n] = [-n] = -n$ が

成り立つ。(＃)に $x = n, y = -[n]$ を代入し、

①, ②を用いることで以下を得る。

$$f([n] - [n]) = f(n) + [f(-[n])]$$

$$a = f(n) + f([-n]) - a$$

$$f(n) + f(-n) = 2a \quad \dots \textcircled{3}$$

また、整数でない実数 p について、

$-[p] = [-p] + 1$ が成り立つので、(＃)に

$x = p, y = -[p] + z$ を代入して、

$$f([p] - [p] + z) = f(p) + [f(-[p] + z)]$$

$$f(z) = f(p) + f([-p] + z + 1) - a$$

ここで、(＃)と①より、

$$\begin{aligned} f([-p] + z + 1) &= f(-p) + [f(z + 1)] \\ &= f(-p) + f(z + 1) - a \end{aligned}$$

が成り立つので

$$\begin{aligned} f(z) &= f(p) + f([-p] + z + 1) - a \\ &= f(p) + f(-p) + f(z + 1) - 2a \end{aligned}$$

…④

を得る。また、(＃)に $x = a$ を代入して、

$$f([a] + y) = f(a) + [f(y)]$$

$$f(y) = f(a) + f(y) - a$$

$$f(a) = a \quad \dots \textcircled{5}$$

を得る。

$x = f(z)$ を代入して、

$$f([f(z)] + y) = f(f(z)) + [f(y)].$$

①より、

$$f(f(z) - a + y) = f(f(z)) + f(y) - a.$$

$y = f(-z)$ を代入して、

$$f(-a) = f(f(z)) + f(-f(z)) - a.$$

⑤より、

$$\begin{aligned} f(-a) &= f(f(z)) + f(-f(z)) - f(a) \\ &\dots \textcircled{6} \end{aligned}$$

が成り立つ。

(i) ある実数 t が存在して、 $f(t)$ が整数となるとき。

$f(t) = m$ (m は整数) とおく。③より、

$f(m) + f(-m) = 2a$ であるから、⑥より、

$$f(-a) = f(f(t)) + f(-f(t)) - f(a) = a$$

となる。

(I) $a \neq 0$ のとき

$a \neq 0$ のとき、 a は整数ではないから、④において $p = a$ を代入して、

$$f(z) = f(a) + f(-a) + f(z + 1) - 2a$$

$$= a + a + f(z + 1) - 2a$$

$$= f(z + 1)$$

を得る。 $f(0)=a$ より、任意の整数 n について $f(n)=a$ が成り立つ。ここで、(＃)に $y=n$ を代入すると、

$$\begin{aligned} f([x]+n) &= f(x)+[f(n)] \\ &= f(x)+[a] \\ &= f(x) \end{aligned}$$

いま、 $[x]+n$ は整数であるから、

$$f([x]+n)=a$$

ゆえに、任意の実数 x について

$$f(x)=a$$

が成り立つ。しかし、これはある実数 t に対して $f(t)$ が整数となることに反する。よって、条件を満たす関数は存在しない。

(II) $a=0$ のとき

整数 n について、③より、

$$f(n)+f(-n)=2a=0 \quad \dots \textcircled{7}$$

となる。また、整数ではない p において、④より、

$$\begin{aligned} f(z) &= f(p)+f(-p)+f(z+1)-2a \\ &= f(p)+f(-p)+f(z+1) \quad \dots \textcircled{8} \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで⑧に $z=-\frac{1}{2}$, $p=\frac{1}{2}$ を代入して、

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right).$$

ゆえに

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=0.$$

⑧について、 $p=\frac{1}{2}$ より、

$$\begin{aligned} f(z) &= f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(-\frac{1}{2}\right)+f(z+1) \\ &= f(z+1)+f\left(-\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

ゆえに、

$$f(z+1)-f(z)=-f\left(-\frac{1}{2}\right).$$

ここで、②, ⑦より、

$$-f\left(-\frac{1}{2}\right)=-f(-1)=f(1)$$

であるから、

$$f(z+1)-f(z)=f(1).$$

ここで、 $f(1)=C$ とおくと、

$$f(z+1)-f(z)=C$$

であり、 $f(0)=a=0$ であるから、整数 n について、

$$f(n)=nC$$

が成り立つ。また、②より、任意の実数 x に対して、

$$f(x)=[x]C$$

が成り立つ。よって、(＃)より、

$$[[x]+y]C=[x]C+[[y]C].$$

任意の実数 x, y に対して

$$[[x]+y]=[x]+[y]$$

が成り立つので、

$$[x]C+[y]C=[x]C+[[y]C],$$

$$[y]C=[[y]C]$$

を得る。よって、 $[y]C$ は整数であるから、

C は整数である。逆に、 C を定数 (C は整数) とし、

$$f(x)=C[x]$$

とするとき、(♯)において、

$$\text{(左辺)}=f([x]+y)$$

$$=C[[x]+y]$$

$$=C([x]+[y])$$

$$\text{(右辺)}=f(x)+[f(y)]$$

$$=C[x]+[C[y]]$$

$$=C([x]+[y])$$

より、等式を満たす。

(ii) すべての実数 t に対して $f(t)$ が整数

ではないとき

④, ⑥より、

$$f(-a)=f(f(t))+f(-f(t))-f(a)$$

$$=f(z)-f(z+1)+2a-a$$

$$=f(z)-f(z+1)+a \quad \cdots \textcircled{9}$$

⑨に $z=0$ を代入して、

$$f(-a)=a-f(1)+a=2a-f(1) \quad \cdots \textcircled{10}$$

⑩を⑨へ代入して、

$$2a-f(1)=f(z)-f(z+1)+a,$$

$$f(z+1)-f(z)=f(1)-a \quad \cdots \textcircled{11}$$

$f(1)=D$ とおく。(♯)に $y=1$ を代入すると、

②, ⑩より、

$$f([x]+1)=f(x)+[f(1)]$$

$$f([x])+f(1)-a=f(x)+[D]$$

$$f(x)+D-a=f(x)+[D]$$

$$D-a=[D]$$

⑩より、

$$f(z+1)-f(z)=D-a=[D]$$

$f(0)=a$ より、整数 n について、

$$f(n)=[D]n+a$$

とかける。ただし、すべての実数 t に対して

$f(t)$ が整数ではないことから、 $0 < a < 1$ で

ある。よって②より、任意の実数 x に対して、

$$f(x)=[D][x]+a$$

とかける。逆に、 a, E を定数

($0 < a < 1$, E は整数)として、

$$f(x) = E[x] + a$$

とするとき、(＃)において、

$$\text{(左辺)} = f([x] + y)$$

$$= E[[x] + y] + a$$

$$= E([x] + [y]) + a$$

$$\text{(右辺)} = f(x) + [f(y)]$$

$$= E[x] + a + [E[y] + a]$$

$$= E([x] + [y]) + a$$

より、等式を満たす。

(i), (ii)より、求める関数は、

$$f(x) = A[x] + a$$

(a, A は定数で、 $0 \leq a < 1, A$ は整数)である。

(終)

3-4. 海外の数学オリンピックの問題

次の問題も関数方程式であるが、与えられている式が不等式である。

例題 4

実数で定義され、実数の値をとる関数 f であって、任意の実数 x, y に対して次の式を満たすようなものをすべて求めよ。

$$f(x+y) + y \leq f(f(f(x)))$$

[Benelux Mathematical Olympiad 2013]

(解答)

条件式に $y = 0$ を代入して、

$$f(x) \leq f(f(f(x))) \quad \dots \textcircled{1}$$

また、条件式に $y = f(f(x)) - x$ を代入して、

$$f(f(f(x))) + f(f(x)) - x \leq f(f(f(x)))$$

$$f(f(x)) \leq x \quad \dots \textcircled{2}$$

②に $x = f(z)$ を代入して、

$$f(f(f(z))) \leq f(z).$$

①より、

$$f(f(f(z))) = f(z) \quad \dots \textcircled{3}$$

条件式より、

$$f(x+y) + y \leq f(f(f(x))) = f(x)$$

...④

④に $x = 0$ を代入して、

$$f(y) + y \leq f(0) \quad \dots \textcircled{5}$$

また、④に $y = -x$ を代入して、

$$f(0) - x \leq f(x),$$

$$f(0) \leq f(x) + x \quad \dots \textcircled{6}$$

⑤, ⑥より、

$$f(x) + x = f(0).$$

$f(0) = C$ とおくと、

$$f(x) = -x + C.$$

逆に、 C を定数として、 $f(x) = -x + C$ と

するとき、条件式において、

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= f(x+y) + y \\ &= -(x+y) + C + y \\ &= -x + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= f(f(f(x))) \\ &= f(f(-x+C)) \\ &= f(-(-x+C) + C) \\ &= f(x) \\ &= -x + C\end{aligned}$$

より、不等式を満たす。

よって求める関数は、

$$f(x) = -x + C \quad (C \text{ は定数})$$

である。(終)

この問題に関しても改題を作成した。

改題

実数で定義され、実数の値をとる関数 f であって、任意の実数 x, y に対して次の式を満たすようなものをすべて求めよ。

$$f(x+y) \cdot y \leq f(f(f(x)))$$

(解答)

$$f(x+y) \cdot y \leq f(f(f(x))) \quad \dots(**) \text{ とす}$$

る。(**) に $y = 0$ を代入して、

$$0 \leq f(f(f(x))) \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで、以下の2つの命題が成り立つ。

命題1

ある実数 t に対して、

$$f(f(f(t))) = 0$$

が成り立つ。

(命題1の証明)

背理法で示す。いま、任意の実数 x に対して、

$$0 < f(f(f(x)))$$

が成り立つと仮定する。(**) に

$$y = f(f(x)) - x \text{ を代入して、}$$

$$f(f(f(x)))(f(f(x)) - x) \leq f(f(f(x)))$$

仮定より、両辺を $f(f(f(x)))$ で割ること

ができるので、

$$f(f(x)) - x \leq 1,$$

$$f(f(x)) \leq x + 1.$$

よって、

$$f(f(f(f(x)))) \leq f(f(x)) + 1 \leq x + 2$$

が成り立つ。ここで、 $x \leq -2$ とすれば、

$$f(f(f(f(x)))) \leq 0$$

が成り立つ。しかし、これは仮定に反する。

よって、ある実数 t に対して、

$$f(f(f(t))) \leq 0$$

となる。よって、①より、

$$f(f(f(t))) = 0$$

が成り立つ。(終)

命題2

$f(0) \leq 0$ が成り立つ。

(命題2の証明)

背理法で示す。 $f(0) > 0$ が成り立つと仮定する。(**)に $y = -x$ を代入して、

$$f(0) \cdot (-x) \leq f(f(f(x)))$$

いま、 $f(0) > 0$ より、 $z < 0$ に対して、

$$0 < f(0) \cdot (-z) \leq f(f(f(z)))$$

が成り立つ。ここで、(**)に $x = z$ 、

$y = f(f(z)) - z$ を代入して、

$$f(f(f(z)))(f(f(z)) - z) \leq f(f(f(z)))$$

$0 < f(f(f(z)))$ より、

$$f(f(z)) \leq z + 1$$

を得る。ここで、 $z < -2$ とすると、

$$f(f(z)) < -1$$

となるので、

$$f(f(f(f(z)))) \leq f(f(z)) + 1 < 0$$

を得る。しかし、これは①に反する。よって

$f(0) \leq 0$ が成り立つ。(終)

(解答のつづき)

命題1より、ある実数 t に対して、

$f(f(f(t))) = 0$ となるので、①より、

$$f(0) = f(f(f(f(t)))) \geq 0$$

が成り立つ。よって命題2より、

$$f(0) = 0$$

を得る。(**)に $x = 0$ を代入して、

$$f(y) \cdot y \leq f(f(f(0))) = 0$$

を得る。よって、 $f(0) = 0$ と合わせて、

$$\begin{cases} y \geq 0 \text{ のとき } f(y) \leq 0 \\ y \leq 0 \text{ のとき } f(y) \geq 0 \end{cases} \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。よって、 $w > 0$ に対して、

$$f(w) \leq 0, f(f(w)) \geq 0, f(f(f(w))) \leq 0$$

が成り立つ。一方、①より、

$$f(f(f(w))) \geq 0$$

であるから、

$$f(f(f(w))) = 0$$

を得る。いま、任意の $w > 0$ に対して、

$$p > 0, q < 0, p + q = w$$

を満たす実数 p, q が存在する。(**)に

$x = p, y = q$ を代入して、

$$f(w) \cdot q \leq f(f(f(p)))$$

②より、 $f(w) \leq 0, f(f(f(p))) = 0$ で

あるから、

$$0 \leq f(w) \cdot q \leq f(f(f(p))) \leq 0$$

ゆえに、

$$f(w) \cdot q = 0$$

$q < 0$ より、

$$f(w) = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

を得る。よって、②より $z < 0$ について、

$$f(z) \geq 0$$

が成り立つので、

$$f(f(z)) = 0, f(f(f(z))) = 0$$

が成り立つ。いま、 $z < 0$ に対して、

$$i < 0, j > 0, i + j = z$$

を満たす実数 i, j が存在する。(**)に

$x = i, y = j$ を代入して、

$$f(z) \cdot j \leq f(f(f(i)))$$

いま、②より、 $f(z) \geq 0, f(f(f(i))) = 0$

であるから、

$$0 \leq f(z) \cdot j \leq f(f(f(i))) = 0$$

ゆえに、

$$f(z) \cdot j = 0$$

$j > 0$ より、

$$f(z) = 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

を得る。 $f(0) = 0$ と合わせて、任意の実数

x に対して、

$$f(x) = 0$$

が成り立つ。よって求める関数は、

$$f(x) = 0$$

である。実際、この関数は(**)を満たす。

(終)

4. 今後の課題

今回は、組合せ論、数論、関数方程式の問題について考えたが、あまり深いところまで考察できなかった。今後は一般化だけでなく、問題間のつながりを調べ、そこから新たな議論ができればよいと考えている。

5. 参考文献

- [1] 「数学オリンピック 2006~2010」 数学オリンピック財団監修、日本評論社
- [2] 「5th Benelux Mathematical Olympiad」
<http://www.bxmo.org/problems/bxmo-problems-2013-en.pdf>

連続する数について

5年C組 古宮 昌典

指導教員 川口 慎二

1. 要約

サイエンス研究会数学班5年生は数論について研究している。今回は、ある条件を満たす連続する整数について自ら課題を設定し、それらの問題を解くことを目標とした。また、その目標のために数論における有名な定理について学習した。

キーワード 素数、不足数、完全数、過剰数、原始過剰数、累乗数

2. 研究の背景と目的

参考文献[1]に、「2以上の任意の整数 n において、連続する n 個の合成数が存在することを示せ」という問題が記載されていた。では、他の特徴をもつ数について、連続するものは存在するのか、あるいは存在しないのかについて考え、本稿にまとめることにした。

くらでも大きい値をとりえる」と言い換えることができる。

次に、素数の分布について、2, 3以外の素数はすべて $6n-1$ または $6n+1$ とかける。そこで、次の命題について考えた。

命題1

正の整数 n について、 $6n-1$ または $6n+1$ は素数である。

3. 研究内容

3-1. 素数

先ほど挙げた問題は以下のように証明できる。

この命題は、 $n=1, 2, \dots, 19$ で条件を満たすが、 $n=20$ に対して、 $121=11^2$ 、 $119=7 \times 17$ であるので、偽である。

では、 $n=20$ のときのように $6n-1$ と $6n+1$ がどちらも合成数となるような n はどれだけ存在するのかについて考えたところ、以下の定理を得た。

定理1

2以上の任意の整数 n において、連続する n 個の合成数が存在する。

(証明)

$n \geq 2$ において、連続する n 個の整数 $(n+1)!+2, (n+1)!+3, \dots, (n+1)!+(n+1)$ はすべて合成数である。(Q. E. D.)

定理2

正の整数 n であって、 $6n-1$ と $6n+1$ がともに合成数であるようなものが無数に存在する。

定理1は、「素数とその次の素数の差はい

(証明)

任意の非負整数 k について、

$$\begin{aligned}6(20+77k)-1 &= 119+6\times 77k \\ &= 7(17+66k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}6(20+77k)+1 &= 121+6\times 77k \\ &= 11(11+42k)\end{aligned}$$

より、 $n = 20 + 77k$ とすれば条件を満たすので、求める n は無数に存在する。

(Q. E. D.)

また、 $6n-1$ と $6n+1$ のうち一方だけが素数であるような n についても以下の結果を得た。

定理 3

正の整数 n であって、 $6n-1$ と $6n+1$ のうち一方だけが素数であるようなものが無数に存在する。

この証明には、以下の補題を用いる。

補題 1 (ディリクレの算術級数定理)

初項 a 、公差 d (a と d は互いに素) の等差数列には素数が無数に含まれる。

(証明)

いま、任意の非負整数 k について、

$$\begin{aligned}6(20+7k)-1 &= 119+6\times 7k \\ &= 7(17+6k)\end{aligned}$$

は合成数である。このとき、

$$6(20+7k)+1 = 121+42k$$

となる。補題より、数列 $\{121+42k\}$ には素数が無数に現れるので、 $n = 20 + 7k$ とすれば、一方だけが素数であるようなものが無数に存在することがわかる。(Q. E. D.)

では、 $6n-1$ と $6n+1$ がともに素数となる場合を考えると、これらは双子素数であるため、双子素数予想(未解決)と同値である。

3-2. 不足数、完全数、過剰数

不足数、完全数、過剰数については以下の定理が成り立つことがわかった。

定理 4

- (1) 連続する a 個の不足数が存在するよ
うな a の最大値は 5 である。
- (2) 連続する b 個の完全数が存在するよ
うな b は存在しない。
- (3) 2 以上の任意の整数 c について、連続
する c 個の過剰数が存在する。

(証明)

(1) まず、以下の補題が成り立つ(参考文献[2]参照)。

補題 2

過剰数の倍数は過剰数であり、完全数の倍数は自身を除いて過剰数である。

(補題 2 の証明)

過剰数 N の約数を

$$1 = d_0, d_1, d_2, \dots, d_m = N$$

とする。このとき、以下が成り立つ。

$$d_0 + d_1 + d_2 + \dots + d_m > 2N$$

両辺を k 倍 (k は自然数) して、

$$kd_0 + kd_1 + kd_2 + \dots + kd_m > 2kN$$

いま、 $0 \leq i \leq m$ において d_i は N を割り切る
ので、正の整数 k において kd_i は kN を割り
切る。すなわち kd_i は kN の約数であるから、
 kN の約数の総和は $2kN$ より大きい。つまり、
過剰数の倍数 kN は過剰数である。

完全数については、

$$kd_0 + kd_1 + kd_2 + \dots + kd_m = 2kN$$

となるが、 $k \geq 2$ のとき、 $kd_0 = k \neq 1$ であるから、 $kd_0, kd_1, kd_2, \dots, kd_m$ の中に kN の約数である 1 は含まれていない。よって、 kN の約数の総和は $2kN$ よりも大きいので完全数の倍数(自身を除く)は過剰数である。

(Q. E. D.)

6 が完全数であることは容易に確認できるので、補題 2 より、6 以外の 6 の倍数はすべて過剰数である。6 の倍数は連続する 6 個の数の中に 1 つだけ含まれるので、 a は 5 以下である。実際、7, 8, 9, 10, 11 は連続する 5 個の不足数である。つまり a の最大値は 5 である。(Q. E. D.)

(2) まず、以下の補題が成り立つ(参考文献[3]参照)。

補題 3

偶数の完全数はすべて $2^{m-1}(2^m - 1)$ (ただし、 $2^m - 1$ は素数) の形で表される。

(補題 3 の証明)

偶数の完全数 N において 2 以上の整数 m と 3 以上の奇数 k が存在して、

$$N = 2^{m-1}k$$

とかける。また、正の整数 n の正の約数の総和を $\sigma(n)$ と表すことにすると、 N は完全数であるから、

$$2N = \sigma(N)$$

$$= \sigma(2^{m-1})\sigma(k) = (2^m - 1)\sigma(k)$$

が成り立つ。ゆえに、

$$2 \cdot 2^{m-1}k = (2^m - 1)\sigma(k)$$

$$\sigma(k) = k + \frac{k}{2^m - 1}$$

を得る。ここで、 $\sigma(k)$ と k はどちらも整数なので、 $\frac{k}{2^m - 1}$ は整数である。つまり、

$2^m - 1$ は k の約数であることがわかるの

で、 $\frac{k}{2^m - 1}$ も k の約数である。したがって、

k の約数は k と $\frac{k}{2^m - 1}$ だけである。よって

$$\frac{k}{2^m - 1} = 1, \text{ すなわち } N = 2^{m-1}(2^m - 1) \text{ と}$$

かける。さらに、 $k = 2^m - 1$ は 1 と自身以外の約数を持たないので、 $2^m - 1$ は素数である。(Q. E. D.)

連続する完全数が存在しないことを背理法で示す。それには $b = 2$ のときを考えれば十分である。いま、連続する 2 つの完全数が存在したと仮定すると、補題 3 より、ある正の整数 p が存在し、

$$2^{p-1}(2^p - 1) + 1 \text{ または } 2^{p-1}(2^p - 1) - 1$$

が完全数である。

(I) $2^{p-1}(2^p - 1) + 1$ が完全数である場合

$$2^{p-1}(2^p - 1) + 1 = A \text{ とおく。補題 3 より、}$$

$2^p - 1$ は素数である。いま、 p が合成数であると仮定すると、2 以上の整数 d, e によって $p = de$ と表すことができる。すると、

$$2^p - 1 = 2^{de} - 1 = (2^d)^e - 1$$

が成り立つが、これは $2^d - 1 > 1$ で割り切れるので矛盾が生じる。つまり p は素数でなくてはならない。

$p = 2$ のとき、 $2^{p-1}(2^p - 1) = 6$ であるが、

$A = 7$ は完全数でない。

p が奇素数であるとき、

$$A = 2^{p-1}(2^p - 1) + 1$$

$$\equiv (-1)^{p-1} \{(-1)^p - 1\} + 1$$

$$\equiv 1 \pmod{3} \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。

いま、 A の正の約数を $f_1 < f_2 < \dots < f_\alpha$ とおく。 A は奇数であるから、 $f_1, f_2, \dots, f_\alpha$ はすべて奇数である。

ここで、 A が平方数であると仮定すると、 α は奇数であるから、約数の総和は奇数となる。しかし A は完全数であるから約数の総和は $2A$ に等しくなければならず、これは矛盾である。

よって A は平方数ではなく、 α は偶数で

ある。ここで、 $\frac{\alpha}{2} = t$ とおくと

$$A = f_1 f_\alpha = f_2 f_{\alpha-1} = \dots = f_t f_{t+1}$$

が成り立つ。いま、 $1 \leq j \leq t$ の任意の整数 j

において、 $(f_j, f_{\alpha+1-j})$ という組合せは

$\text{mod } 3$ において $(1, 1), (1, -1), (-1, -1)$ のいずれかと等しいが、 $\textcircled{1}$ より、2 数の積は -1 と合同である必要があり、それは

$(1, -1)$ でのみ実現されるので $(f_j, f_{\alpha+1-j})$

の組合せは $(1, -1)$ と等しい。ゆえに、

$$f_j + f_{\alpha+1-j} \equiv 1 - 1 = 0 \pmod{3}$$

が成り立つので、 A の約数の総和

$$f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_\alpha$$

は 3 の倍数となる。これは $\textcircled{1}$ に矛盾する。

ゆえに、 A は完全数でない。

(II) $2^{p-1}(2^p - 1) - 1$ が完全数である場合

$$2^{p-1}(2^p - 1) - 1 = B \text{ とおく。} (I) \text{ と同様の}$$

議論により、 p が奇素数である場合を考えればよい。このとき、 $p \geq 3$ であるから

$$B = 2^{p-1}(2^p - 1) - 1$$

$$\equiv -1 \pmod{4} \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。

B の正の約数を

$$g_1 < g_2 < g_3 < \dots < g_\beta$$

とする。再び (I) と同じ議論により B は平方数ではなく、 β は偶数であることがわかる。

$\frac{\beta}{2} = s$ とおくと、

$$B = g_1 g_\beta = g_2 g_{\beta-1} = \dots = g_s g_{s+1}$$

が成り立つ。

いま、 $1 \leq u \leq s$ の任意の整数 u において、

$(g_u, g_{\beta+1-u})$ という組合せは、 $\text{mod } 4$ にお

いて、 $(1, 1), (1, -1), (-1, -1)$ のいずれかと等しいが、 $\textcircled{1}$ より、2 数の積は -1 と合同である必要があり、それは $(1, -1)$ でのみ実

現されるので、 $(g_u, g_{\beta+1-u})$ の組合せは

$(1, -1)$ と等しい。ゆえに、

$$g_u + g_{\beta+1-u} \equiv 1-1=0 \pmod{4}$$

が成り立つので、 B の約数の総和

$$g_1 + g_2 + g_3 + \cdots + g_\beta$$

は 4 の倍数となる。これは②に矛盾する。
ゆえに B は完全数でない。

(I), (II)より、連続する完全数は存在しない。(Q. E. D.)

(3) まず、以下の補題を示す。

補題 4

任意の正の整数 n において、 n と互いに素な過剰数が存在する。

(補題 4 の証明)

i 番目の素数を p_i とかくことにする。
 n の最大の素因数を p_m とする。ここで、
 $m+1$ 以上の整数 N において、

$$T_N = \prod_{k=m+1}^N p_k$$

とおくと、 T_N の正の約数の総和は

$$\sigma(T_N) = \prod_{k=m+1}^N (p_k + 1)$$

となるので、 T_N がもし過剰数であるとする
と、次が成り立つ。

$$2T_N < \prod_{k=m+1}^N (p_k + 1)$$

両辺を $T_N = \prod_{k=m+1}^N p_k$ で割って、

$$2 < \prod_{k=m+1}^N \left(1 + \frac{1}{p_k}\right)$$

を得る。逆に、

$$2 < \prod_{k=m+1}^N \left(1 + \frac{1}{p_k}\right)$$
 を満たすような整数 N

が存在することを示せば、 n と互いに素な過剰数 T_N が存在することが導かれる。

さらに、これは

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{p_k}\right) = \infty$$

となることを示せば十分である。なぜなら、

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{p_k}\right) = \infty$$
 であるとき、

$$\prod_{k=m+1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{p_k}\right) = \infty$$

が成り立つので、 $2 < \prod_{k=m+1}^N \left(1 + \frac{1}{p_k}\right)$ を満た

すような整数 N が存在することが示されるからである。

まず、素因数分解の一意性により以下が成り立つ (参考文献[3]を参照)。

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \cdots\right) > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p_n}$$

ここで、左辺は等比級数の和の公式より

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{p_k - 1}\right)$$

と変形できる。一方、素数は無限にあるため、右辺は限りなく大きくなる。ゆえに、

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{p_k - 1}\right) = \infty$$

が成り立つので、

$$\prod_{k=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{p_k - 1}\right) = \infty \quad \cdots \textcircled{3}$$

を得る。ここで、任意の正の整数 d において $p_{d+1} - 1 \geq p_d$ が成り立つので、

$$\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{p_k - 1}\right) \leq \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{p_k}\right)$$

である。よって、 $\textcircled{3}$ より $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{p_k}\right) = \infty$ が

成り立つことが示された。したがって題意は示された。(Q. E. D.)

88 と 945 がどちらも過剰数であることは容易に確かめられる。また、88 の素因数は 2 と 11 であり、945 の素因数は 3 と 5 と 7 であるからこの 2 数は互いに素である。ここで、不定方程式

$$88x - 945y = 1$$

を考える。この等式を満たす整数の組 (x, y) は無数に存在するが、そのうちの 1 つを求めると、 $(x, y) = (247, 23)$ という組が得られる。このとき、

$$88x = 21736, \quad 945y = 21735$$

である。(1)の補題 2 より、それぞれは過剰数であるから、21735, 21736 は連続する 2 つの過剰数である。

2 以上の任意の整数 c について、連続する c 個の過剰数が存在することを数学的帰納法により示す。

$c = 2$ の場合は先に示した通りである。

$c = k$ のとき、条件を満たす k 個の過剰数 $a, a+1, a+2, \dots, a+k-1$ が存在したと仮定する。

ここで、 $a+k$ が過剰数であれば、それを

含めた $k+1$ 個が $k+1$ 個の連続する過剰数となる。

$a+k$ が過剰数でないとき、

$$\text{LCM}(a, a+1, a+2, \dots, a+k-1) = A$$

とする。このとき、任意の正の整数 n において(1)の補題 2 より

$$a+nA, a+nA+1, \dots, a+nA+k-1$$

は k 個の連続する過剰数となっている。

いま、補題 4 より A と互いに素な過剰数が存在し、そのうちの 1 つを B とする。ここで、 B 個の数

$$a+k+A, a+k+2A, \dots, a+k+BA$$

を考える。

この中に B の倍数が存在しないと仮定すると、鳩の巣原理よりこの B 個の数の中に B で割った余りが等しい 2 数

$$a+k+iA, a+k+jA \quad (i < j)$$

が存在する。すると

$$(a+k+jA) - (a+k+iA) = (j-i)A$$

は B の倍数となるはずだが、 $0 < j-i < B$ であり、 B は A と互いに素であるから、 $(j-i)A$ は B の倍数でない。これは矛盾である。

よって B 個の数

$$a+k+A, a+k+2A, \dots, a+k+BA$$

の中に B の倍数が存在し、それを $a+k+tA$ とする。すると

$$a+tA, a+tA+1, \dots, a+tA+k$$

の $k+1$ 個の数は連続する $k+1$ 個の過剰数となっている。

よって、数学的帰納法より 2 以上の任意の整数 c において連続する c 個の過剰数が存在することが示された。(Q. E. D.)

定理 4 から、以下がわかる。

定理 5

- (1) 不足数とその次の不足数の差に上限はない。
- (2) 完全数とその次の完全数の差に上限はない。
- (3) 他の過剰数の倍数でも、完全数の倍数でもない過剰数を「原始過剰数」([2])とよぶとき、原始過剰数とその次の原始過剰数の差に上限はない。

(証明)

(1)および(2)は、定理4の(3)より、明らかに成り立つ。

(3) 任意の正の整数 d について、連続する d 個の正の整数であって、そのいずれも原始過剰数でないものが存在することを示せばよい。定理4より、連続する d 個の過剰数が存在し、それらを a_1, a_2, \dots, a_d とおく。ここで、 a_1, a_2, \dots, a_d の総乗を A とおくと、 $A+a_1, A+a_2, \dots, A+a_d$ はそれぞれ a_1, a_2, \dots, a_d の倍数(自身でない)であるため原始過剰数でない。

よって、 $A+a_1, A+a_2, \dots, A+a_d$ は原始過剰数でない d 個の連続する整数である。よって、原始過剰数とその次の原始過剰数の差に上限はないことが示された。

(Q. E. D.)

原始過剰数についてさらに調べると、以下が成り立つことがわかった。

定理 6

互いに素な正の整数 a, d について、初項 a 、公差 d の等差数列には原始過剰数が無数に現れる。

(証明)

ディリクレの算術級数定理(補題1)より、初項 a 、公差 d の等差数列には素数が無数に現れる。そのうちの1つを p_0 とする。また、初項 1、公差 d の等差数列について、 p_0 よりも大きい素数を小さい順に並べたものを p_1, p_2, \dots とする。いま、ディリクレの算術級数定理において、現れる素数の逆数和は発散するので、

$$\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots = \infty$$

が成り立つ。よって、

$$\prod_{i=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{p_i}\right) > \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{p_i} = \infty$$

が成り立つので、ある正の整数 N が存在して、

$$\prod_{i=0}^{N-1} \frac{p_i + 1}{p_i} < 2 \quad \text{かつ} \quad \prod_{i=0}^N \frac{p_i + 1}{p_i} > 2$$

を満たす。すなわち、 $\prod_{i=0}^{N-1} p_i$ は不足数であり、 $\prod_{i=0}^N p_i$ は過剰数であるから、参考文献

[2]の命題8より、 $\prod_{i=0}^N p_i$ は原始過剰数である。また、

[2]の命題8より、 $\prod_{i=0}^N p_i$ は原始過剰数である。また、

$$\prod_{i=0}^N p_i \equiv a \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = a \pmod{d}$$

より、 $\prod_{i=0}^N p_i$ は初項 a 、公差 d の等差数列に含まれる。いま、 p_0 の選び方は無数にあるので、同様の議論により、初項 a 、公差 d の等差数列には原始過剰数が無数に含まれることが示された。(Q. E. D.)

定理6において、 $a=1$ 、 d を過剰数とす

ること、過剰数と原始過剰数が連続する
ようなものが無数に存在することがわかる。

3-3. 累乗数

累乗数 ($k \geq 2$ を用いて m^k とかける数)
が連続するかどうかについて、参考文献[4],
[5]を参考にして以下の結果を得た。

定理 7

$x^t = y^2 + 1$ を満たす自然数 x, t, y
($t \geq 2$) は存在しない。

(証明)

t を 4 で割った余りで場合分けをする。

(i) $t \equiv 0, 2 \pmod{4}$ のとき

このとき、 t は偶数であるから、 x^t は平方
数である。すると 2 つの平方数の差が 1
となるが、これはありえない。

(ii) $t \equiv 3 \pmod{4}$ のとき

$t = 4n + 3$ ($n \geq 0$) とかける。条件式の右
辺を変形して、以下を得る。

$$x^t = (y+i)(y-i)$$

ここで、ガウス整数環における 2 つのガ
ウス整数 $y+i, y-i$ について、それらの最
大公約数を g とすると、 g は

$$(y+i) - (y-i) = 2i$$

を割り切るので、 g としてあり得る数は
 $1, i, 2, 2i$ である。いま、 g が 2 または $2i$ に
等しいとすると、 $y^2 + 1 = (y+i)(y-i)$ が 4
の倍数となるが、 $y^2 + 1 \equiv 1, 2 \pmod{4}$ で
あるため、矛盾する。ゆえに、 g は 1 また
は i であるから、 $y+i$ と $y-i$ は互いに素で
ある。ここで、任意のガウス整数はガウス

素数の積で一意に表されることから、ある
整数 a, b によって

$$y+i = (a+bi)^{4n+3}$$

とかける。右辺を展開して整理すると、

$$\begin{aligned} y+i &= \sum_{k=0}^{4n+3} {}_{4n+3}C_k a^{4n+3-k} (bi)^k \\ &= \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k {}_{4n+3}C_{2k} a^{4n+3-2k} b^{2k} \\ &\quad + \left(\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k {}_{4n+3}C_{2k+1} a^{4n+2-2k} b^{2k+1} \right) i \end{aligned}$$

となるので、

$$\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k {}_{4n+3}C_{2k+1} a^{4n+2-2k} b^{2k+1} = 1$$

得る。この式の左辺は b で割り切れること
から、 b は 1 または -1 である。また、

$$\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k {}_{4n+3}C_{2k+1} a^{4n+2-2k} b^{2k} = \pm 1$$

であり、 $b^{2k} = 1$ なので、

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k {}_{4n+3}C_{2k+1} a^{4n+2-2k} = 0, 2 \dots \textcircled{1}$$

を得る。ここで、 a を奇数と仮定すると、
 $\text{mod } 2$ において、

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k {}_{4n+3}C_{2k+1} a^{4n+2-2k} \\ &\equiv \sum_{k=0}^{2n} {}_{4n+3}C_{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n {}_{4n+3}C_{2k+1} + \sum_{k=n+1}^{2n} {}_{4n+3}C_{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n {}_{4n+3}C_{2k+1} + \sum_{k=1}^n {}_{4n+3}C_{2k} \\ &= \sum_{k=1}^{2n+1} {}_{4n+3}C_k = \frac{2^{4n+3} - 2}{2} \\ &= 2^{4n+2} - 1 \equiv 1 \end{aligned}$$

となり矛盾する。ゆえに a は偶数である。
すると $\textcircled{1}$ の左辺は 4 で割り切れるので、

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k {}_{4n+3}C_{2k+1} a^{4n+2-2k} = 0$$

を得る。

$n=0$ のとき、 ${}_3C_1 a^2 = 0$ より $a=0$ であるので、 $y=0$ となるが、これは y が自然数であることに反する。

$n \geq 1$ のとき、

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k {}_{4n+3}C_{2k+1} a^{4n+2-2k} = 0$$

の両辺を $a^2 \neq 0$ で割って、

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k {}_{4n+3}C_{2k+1} a^{4n-2k} = 0$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k {}_{4n+3}C_{2k+1} a^{4n-2k} \\ &= -{}_{4n+3}C_{4n+1} \\ &= -\frac{(4n+3)(4n+2)}{2} \\ &= -(4n+3)(2n+1) \end{aligned}$$

ここで、 a は偶数なので左辺は偶数であるが、右辺は奇数であるから矛盾する。以上より、条件を満たす整数 a, b は存在しないので、 x, y も存在しない。

(iii) $t \equiv 1 \pmod{4}$ のとき

$t = 4m+1$ (m は自然数) とかける。(ii) と同様の議論により、 $y+i = (c+di)^{4m+1}$ とかくことができる。また、 d は1または-1であり、

$$\sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^k {}_{4n+1}C_{2k+1} c^{4m-2k} = 0$$

が成り立つので、

$$\sum_{k=0}^{2m} (-1)^k {}_{4n+1}C_{2k+1} c^{4m-2k} d^{2k} = 1$$

を得る。いま、

$$d \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k {}_{4n+1}C_{2k+1} c^{4m-2k} d^{2k} = 1$$

が成り立つので、 $d=1$ である。ゆえに、

$$y+i = (c+i)^{4m+1}$$

が成り立つ。よって、

$$|y+i| = |(c+i)^{4m+1}|$$

したがって、

$$\sqrt{y^2+1} = (\sqrt{c^2+1})^{4m+1} = \sqrt{(c^2+1)^{4m+1}}.$$

両辺を2乗して、

$$y^2+1 = (c^2+1)^{4m+1} \dots \textcircled{2}$$

を得る。

いま、 t が合成数であるとする、ある素数 p が存在して、 $t = ps$ とかける。すると、

$y^2+1 = x^t = (x^s)^p$ となるので、結局 t が素数である場合に条件を満たす x, y が存在しないことを示せば十分である。 $t \equiv 3 \pmod{4}$ のときはすでに示されているので、

$4m+1$ が素数である場合を考えれば十分である。

$4m+1 = q$ とおく。また、(ii) の議論により、 c は偶数であるから、 $c = 2u$ とかける。 $\textcircled{2}$ にこれらを代入して、

$$y^2+1 = (4u^2+1)^q$$

右辺を展開して、 $y^2+1 = \sum_{k=0}^q {}_qC_k (4u^2)^k$

である。ゆえに、

$$y^2 = \sum_{k=1}^q {}_qC_k (4u^2)^k \dots \textcircled{3}$$

ここで、 q は素数であるから、 ${}_qC_k$ は q で割り切れる。よって、 y^2 は q で割り切れる

ので、 y は q で割り切れる。すると、②において、

$$(\text{左辺}) \equiv 1 \pmod{q}$$

$$(\text{右辺}) \equiv 4u^2 + 1 \pmod{q}$$

(ここで、フェルマーの小定理を用いた)が成り立つので、 $4u^2 \equiv 0 \pmod{q}$ を得る。 q は奇数であるから、 u は q で割り切れる。いま、 u は q で r 回割り切れるとする。ここで、③を

$$\begin{aligned} y^2 &= \sum_{k=1}^q C_k (4u^2)^k \\ &= \sum_{k=2}^q C_k (4u^2)^k + q \cdot 4u^2 \end{aligned}$$

と変形すると、 $\sum_{k=2}^q C_k (4u^2)^k$ は q で $4r+1$ 回以上割り切れるが、 $q \cdot 4u^2$ は q でちょうど $2r+1$ 回割り切れるので、右辺は q でちょうど $2r+1$ 回割り切れることがわかる。しかし、左辺は q で偶数回割り切れる必要があるので矛盾している。ゆえに、条件を満たす自然数 x, y は存在しない。

(i), (ii), (iii)より、条件を満たす自然数 x, t, y は存在しないことが示された。

(Q. E. D.)

定理7の一般化として次が成り立つことが知られている。

カタラン予想

以下の式を満たす正の整数 x, a, y, b は $(x, a, y, b) = (3, 2, 2, 3)$ のみである。

$$x^a - y^b = 1$$

4. 今後の課題

今回は素数、不足数、完全数、過剰数、原始過剰数、累乗数について調べたが、階

乗数など、他の整数にも注目していきたい。また、今回の研究において、「連続する原始過剰数は存在するか」という問題について考えたが解くことはできなかったの、すでに知られている定理を調べながら、解決の糸口を探っていきたい。

5. 参考文献

- [1] 「数論の精選104問」、Titu Andreescu, Dorin Andrica, Zuming Feng 著、小林一章、鈴木晋一 監訳、清水俊宏、西本将樹 訳(朝倉書店)
- [2] 「約数の総和についてII」、小椋晃一、奈良女子大学附属中等教育学校平成28年度SSH生徒研究論文集、p.68-78
- [3] webサイト「高校数学の美しい物語」、<https://mathtrain.jp/perfectnumber>
- [4] webサイト「IMOmATH」、<http://www.imomath.com/index.php?option=375&lmm=0>
- [5] webサイト「高校数学の美しい物語」、<https://mathtrain.jp/gaussianint>

6. 謝辞

今回の研究にあたり、ご指導くださいました顧問の川口先生ありがとうございました。

三角形の垂心とトロコイド

5年C組 古宮 昌典
指導教員 川口 慎二

1. 要約

サイエンス研究会数学班 5年生は図形の性質について研究している。今回は、ある条件下での三角形の垂心の軌跡に関する考察を行い、参考文献を用いてトロコイドについて学習した。

キーワード 円、垂心、トロコイド、一定の長さの線分

2. 研究の背景と目的

円に内接する三角形に対して、独自に考察した操作を施すことで、円の中に三角形を無限に作り出すことができる。そして、それらの垂心の軌跡を図形描画ソフトで描くと、トロコイド曲線との関係が見られた。今回は、その曲線を数式で表すことが目標である。

れる回数は p である。よって、 $p \geq 3$ のとき、葉数は図形的に見える葉の枚数と等しい。

また、ハイポトロコイドは以下の方程式で表される。ただし、 θ は媒介変数である。

$$x = (p - q) \cos \theta + r \cos \left(\frac{p - q}{q} \theta \right)$$
$$y = (p - q) \sin \theta - r \sin \left(\frac{p - q}{q} \theta \right)$$

3. 研究内容

3. 1 トロコイド

トロコイドにはいくつかの種類があるが、本稿では特にハイポトロコイドについて扱う。

定義

p と q は互いに素な正の整数で、 $p > q$ とする。半径 p の円 C_1 に半径 q の円 C_2 が内接しながら滑ることなく転がるときの、円 C_2 に固定した点 D の軌跡を葉数 p のハイポトロコイドと呼ぶ。

D がハイポトロコイドを描く間に C_2 は p 回転するので、 D が C_1 の中心から最も離

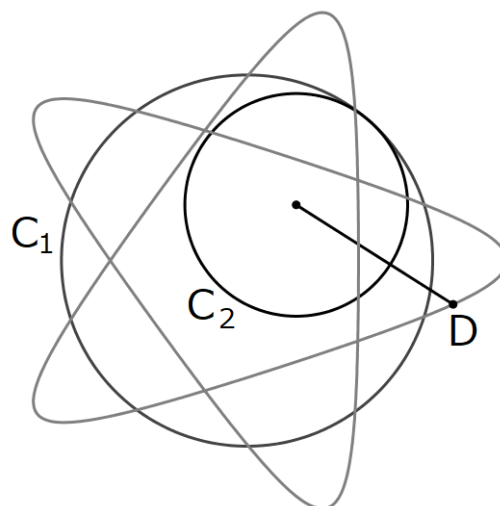


図1 ハイポトロコイドの例
($p = 5, q = 3, r = 5$)

3. 2 垂心の軌跡

昨年度の研究において、円に内接している $\triangle A_0B_0C_0$ に対して、各辺の垂直二等分線を引き、それぞれの円との交点を取り、新しく $\triangle A_1B_1C_1$ をつくる操作について考察した。 $\triangle A_1B_1C_1$ に対しても同様の操作を行い $\triangle A_2B_2C_2$ をつくる、これを繰り返して得られる $\triangle A_nB_nC_n$ は、操作を無限に繰り返すと、正三角形に近づくことを証明した。

今回は、上述の操作における「各辺の垂直二等分線」を「各頂点から対辺へ下した垂線」に代えて考察した。このとき、新しくできる三角形の垂心を H_1, H_2, H_3, \dots とする。辺 B_0C_0 を固定して、点 A_0 を円周上で動かしたときの垂心の軌跡を調べたところ、次のようになった。

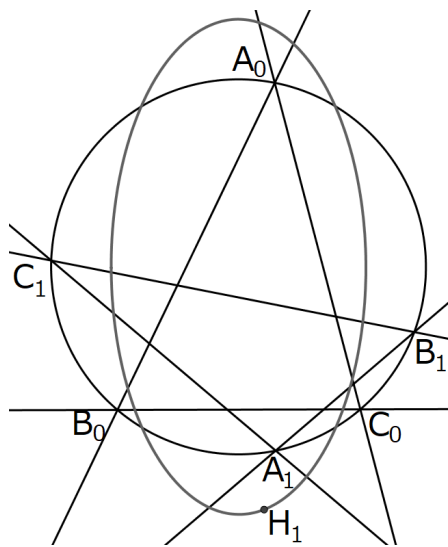


図3 H_1 の軌跡

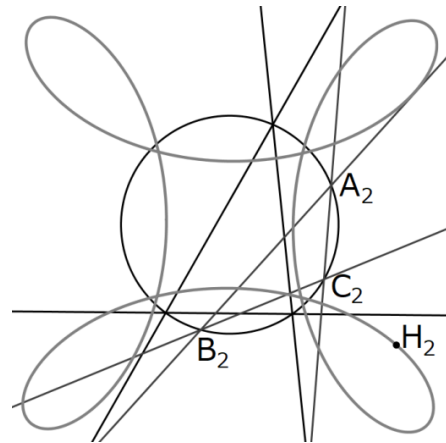


図4 H_2 の軌跡

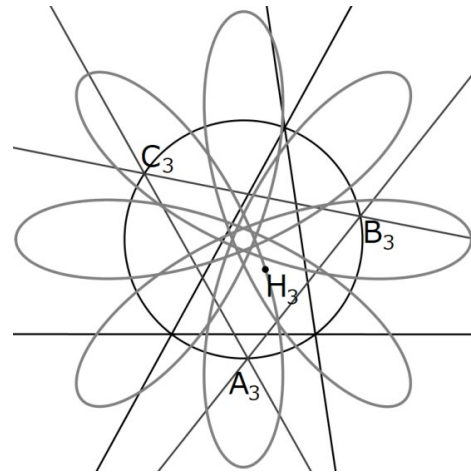


図5 H_3 の軌跡

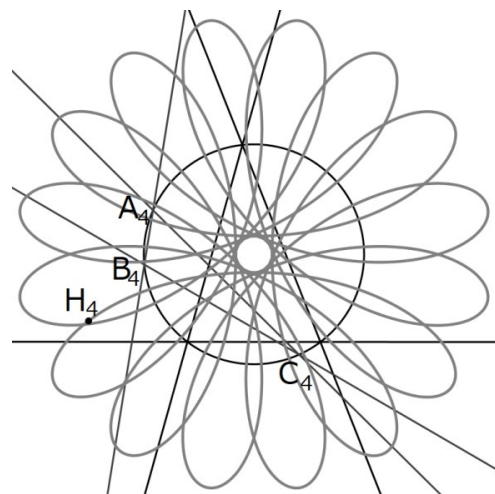


図6 H_4 の軌跡

これらの曲線がハイポトロコイドであると予想し、極座標を用いて証明した。

定理 1

点 O を中心とする円に内接する $\triangle A_0 B_0 C_0$ について、点 A_0 から直線 $B_0 C_0$ へ降ろした垂線と円の交点のうち、 A_0 でない方の点を A_1 、点 B_0 から直線 $C_0 A_0$ へ降ろした垂線と円の交点のうち、 B_0 でない方の点を B_1 、点 C_0 から直線 $A_0 B_0$ へ降ろした垂線と円の交点のうち、 C_0 でない方の点を C_1 とする。この操作で

得られた $\triangle A_1 B_1 C_1$ の垂心を H_1 とする。そして、 $\triangle A_1 B_1 C_1$ においても同様の操作を繰り返すということを無限に繰り返すと、各三角形の垂心 H_1, H_2, H_3, \dots が得られる。辺 $B_0 C_0$ を固定し、点 A_0 を円周上で動かしたとき垂心 H_n (n は正の整数) の軌跡は葉数 2^n のハイポトロコイドを描く。

(証明)

点 O を通り $B_0 C_0$ に平行な直線と円の交点のうち、辺 $B_0 C_0$ の垂直二等分線に関して点 C_0 側であるのを X とする。また、 $\angle B_0 A_0 C_0 = a$, 半直線 OX を始線としたときの動径 OA_n, OB_n, OC_n (n は非負整数) の表す角をそれぞれ $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ とする。ここで、辺 $B_0 C_0$ は固定しているため、 a は定数である。

点 A_1 は直線 OX に関して点 A_0 と対称な位置にあるので、 $\alpha_1 = -\alpha_0$ が成り立つ。

また、 $\angle A_0 B_0 B_1 = 90^\circ - a$ より、

$$\angle A_0 O B_1 = 180^\circ - 2a$$

であるから、

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_0 + (360^\circ - \angle A_0 O B_1) \\ &= \alpha_0 - 2a + 180^\circ \end{aligned}$$

を得る。同様にして

$$\gamma_1 = \alpha_0 - 2a + 180^\circ$$

となる。

$\beta_1 = \alpha_0 - 2a + 180^\circ \equiv \alpha_0 - 2a - 180^\circ \pmod{360^\circ}$ であるから、以下、 $\beta_1 = \alpha_0 - 2a - 180^\circ$ として計算する。

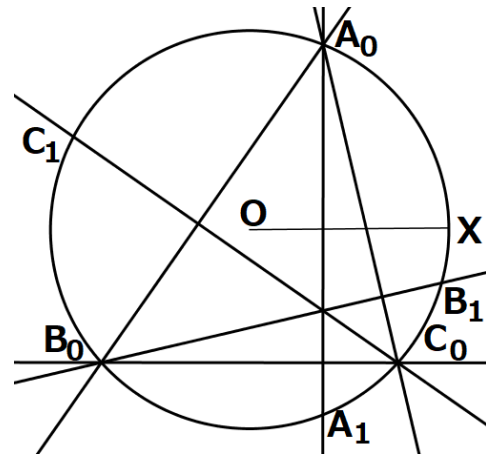


図 7

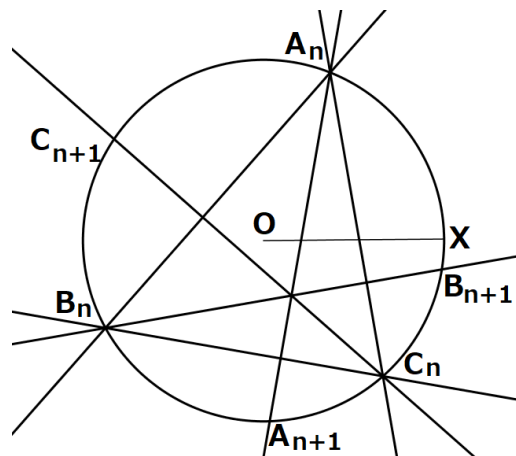


図 8

上図のように、 $\triangle A_n B_n C_n$ と点 A_{n+1} ,

B_{n+1}, C_{n+1} を考える。

いま、 $\angle A_n O B_n = \beta_n - \alpha_n$ とかけるので、
円周角の定理より

$$\angle A_n C_n B_n = \frac{1}{2}(\beta_n - \alpha_n)$$

である。ゆえに、

$$\angle A_{n+1} A_n C_n = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta_n + \frac{1}{2}\alpha_n$$

であるから、再び円周角の定理より

$$\angle A_{n+1} O C_n = 180^\circ - \beta_n + \alpha_n$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \angle X O A_{n+1} \\ &= \angle X O C_n - \angle A_{n+1} O C_{n+1} \\ &= \gamma_n - (180^\circ - \beta_n + \alpha_n) \\ &= -\alpha_n + \beta_n + \gamma_n - 180^\circ \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

を得る。同様にして、

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} &= \alpha_n - \beta_n + \gamma_n + 180^\circ, \\ \gamma_{n+1} &= \alpha_n + \beta_n - \gamma_n + 180^\circ \end{aligned}$$

を得る。ここで、

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} &= \alpha_n - \beta_n + \gamma_n + 180^\circ \\ &\equiv \alpha_n - \beta_n + \gamma_n - 180^\circ \\ \gamma_{n+1} &= \alpha_n + \beta_n - \gamma_n + 180^\circ \\ &\equiv \alpha_n + \beta_n - \gamma_n - 180^\circ \end{aligned} \quad (\text{mod } 360^\circ)$$

であるから、以下、

$$\beta_{n+1} = \alpha_n - \beta_n + \gamma_n - 180^\circ \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\gamma_{n+1} = \alpha_n + \beta_n - \gamma_n - 180^\circ \quad \dots \textcircled{3}$$

として計算する。

②+③より、 $\beta_{n+1} + \gamma_{n+1} = 2\alpha_n - 360^\circ$ なるので、この式を①へ代入して、

$$\alpha_{n+1} = -\alpha_n + 2\alpha_{n-1} - 540^\circ$$

この漸化式を解くと、

$$\alpha_n = \frac{1 - (-2)^{n+1}}{3} \alpha_0 + 180^\circ(n-1)$$

$$+ 360^\circ \cdot \frac{1 - (-2)^{n-1}}{3}$$

が得られる。

$$\alpha_n = \frac{1 - (-2)^{n+1}}{3} \alpha_0 + 180^\circ(n-1)$$

$$+ 360^\circ \cdot \frac{1 - (-2)^{n-1}}{3}$$

$$\equiv \frac{1 - (-2)^{n+1}}{3} \alpha_0 + 180^\circ(n-1)$$

$$(\text{mod } 360^\circ)$$

であるから、以下、

$$\alpha_n = \frac{1 - (-2)^{n+1}}{3} \alpha_0 + 180^\circ(n-1) \quad \dots \textcircled{X}$$

として計算する。

$$\beta_n - \gamma_n = (-2)^n(-2a + 180^\circ) \quad \dots \textcircled{\#}$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す。

$n=1$ のとき、

$$\begin{aligned} \beta_1 - \gamma_1 &= (\alpha_0 + 2a - 180^\circ) - (\alpha_0 - 2a + 180^\circ) \\ &= 4\alpha_0 - 360^\circ \end{aligned}$$

より、成り立つ。

$n=k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$\beta_k - \gamma_k = (-2)^k(-2a + 180^\circ) \text{ が成り立つ。}$$

$n=k+1$ のとき、

$$\begin{aligned} \beta_{k+1} - \gamma_{k+1} &= (\alpha_k - \beta_k + \gamma_k - 180^\circ) \\ &\quad - (\alpha_k + \beta_k - \gamma_k + 180^\circ) \\ &= -2(\beta_k - \gamma_k) \\ &= (-2)^{k+1}(-2a + 180^\circ) \end{aligned}$$

よって、 $n=k+1$ でも成り立つので、示された。

(X)と(#)より、

$$\begin{aligned} \beta_n &= \alpha_{n-1} - (\beta_{n-1} - \gamma_{n-1}) - 180^\circ \\ &= 180^\circ(n-2) + \frac{1-(-2)^n}{3}\alpha_0 \\ &\quad - (-2)^{n-1}(-2a+180^\circ) - 180^\circ \\ &= \frac{1-(-2)^n}{3}\alpha_0 - (-2)^n a \\ &\quad + 180^\circ \{n-3 + (-2)^{n-1}\} \dots(\text{Y}) \end{aligned}$$

同様にして、

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{1-(-2)^n}{3}\alpha_0 + (-2)^n a \\ &\quad + 180^\circ \{n-3 + (-2)^{n-1}\} \dots(\text{Z}) \end{aligned}$$

が得られる。

n の偶奇で場合分けをする。

(i) n が奇数のとき

$$\begin{aligned} &(\text{X})\text{において、} \\ &180^\circ(n-1) \equiv 0^\circ \pmod{360^\circ} \end{aligned}$$

である。また、(Y)と(Z)において、

$$180^\circ \{n-3 + (-2)^{n-1}\} \equiv 0^\circ \pmod{360^\circ}$$

なので、 H_n の x 座標は、

$$\begin{aligned} &\cos \alpha_n + \cos \beta_n + \cos \gamma_n \\ &= \cos \left(\frac{1-(-2)^{n+1}}{3} \alpha_0 \right) \\ &\quad + \cos \left(\frac{1-(-2)^n}{3} \alpha_0 + (-2)^n a \right) \\ &\quad + \cos \left(\frac{1-(-2)^n}{3} \alpha_0 - (-2)^n a \right) \\ &= \cos \left(\frac{1-(-2)^{n+1}}{3} \alpha_0 \right) \end{aligned}$$

$$+ 2 \cos((-2)^n a) \cos \left(\frac{1-(-2)^n}{3} \alpha_0 \right)$$

とかける。

同様に、 y 座標は

$$\begin{aligned} &\sin \alpha_n + \sin \beta_n + \sin \gamma_n \\ &= \sin \left(\frac{1-(-2)^{n+1}}{3} \alpha_0 \right) \end{aligned}$$

$$+ 2 \cos((-2)^n a) \sin \left(\frac{1-(-2)^n}{3} \alpha_0 \right)$$

とかける。

$$\text{ここで、} \frac{1-(-2)^{n+1}}{3} \alpha_0 = \theta \text{ とおくと } H_n$$

の座標は以下のように表される。

$$x = \cos \theta + 2 \cos(2^n a) \cos \left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta \right)$$

$$y = \sin \theta - 2 \cos(2^n a) \sin \left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta \right)$$

さらに、 $\cos(2^n a)$ の正負で場合分けをする。

(I) $\cos(2^n a) > 0$ のとき

$$x = \cos \theta + 2 \cos(2^n a) \cos \left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta \right)$$

$$y = \sin \theta - 2 \cos(2^n a) \sin \left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta \right)$$

である。これは、ハイポトロコイドの方程式において、

$$p = \frac{3 \cdot 2^n}{2^n + 1}, \quad q = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n + 1}, \quad r = 2 \cos(2^n a)$$

としたときの式であるから、この座標はトロコイドを描くことがわかる。

また、 $p:q = 2^n : \frac{1 - (-2)^{n+1}}{3}$ であり、

$\frac{1 - (-2)^{n+1}}{3}$ は 2 で割り切れないので、 2^n と

$\frac{1 - (-2)^{n+1}}{3}$ は互いに素である。ゆえに、こ

のトロコイドの葉の数は 2^n となる。

(II) $\cos(2^n a) < 0$ のとき

$$x = \cos \theta - (-2 \cos(2^n a)) \cos\left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta\right)$$

$$y = \sin \theta + (-2 \cos(2^n a)) \sin\left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta\right)$$

である。ここで、この座標を角度 t だけ回転させたときの x 座標は、以下のようになる。

$$x \cos t - y \sin t = \cos \theta \cos t - (-2 \cos(2^n a)) \cos\left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta\right) \cos t$$

$$- \sin \theta \sin t - (-2 \cos(2^n a)) \sin\left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta\right) \sin t$$

$$= \cos(\theta + t) + (-2 \cos(2^n a)) \cos\left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta - t + 180^\circ\right)$$

ここで、 $t = \frac{2^{n+1} - 1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ$ とすると、

$$\begin{aligned} \frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta - \frac{2^{n+1} - 1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ + 180^\circ &= \frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta + \frac{2^n + 1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ \\ &= \frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta + \frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \cdot \frac{2^n + 1}{3 \cdot 2^n} \cdot \frac{1 - 2^{n+1}}{-2^n - 1} \cdot 180^\circ \\ &= \frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \left(\theta + \frac{2^{n+1} - 1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ \right) \end{aligned}$$

と変形できるので、もとの座標を $\frac{2^{n+1} - 1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ$ だけ回転させたときの x 座標は

$$\cos\left(\theta + \frac{2^{n+1} - 1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ\right) + (-2 \cos(2^n a)) \cos\left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \left(\theta + \frac{2^{n+1} - 1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ\right)\right)$$

同様に計算することで、もとの座標を $\frac{2^{n+1}-1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ$ だけ回転させたときの y 座標は

$$\sin\left(\theta + \frac{2^{n+1}-1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ\right) - (-2 \cos(2^n a)) \sin\left(\frac{-2^n-1}{1-2^{n+1}} \left(\theta + \frac{2^{n+1}-1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ\right)\right)$$

となる。

ここで、 $\theta + \frac{2^{n+1}-1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ = u$ とおくと、
座標は

$$x = \cos u + (-2 \cos(2^n a)) \cos\left(\frac{-2^n-1}{1-2^{n+1}} u\right)$$

$$y = \sin u - (-2 \cos(2^n a)) \sin\left(\frac{-2^n-1}{1-2^{n+1}} u\right)$$

となり、これはトロコイドの式において

$$p = \frac{3 \cdot 2^n}{2^n + 1}, \quad q = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n + 1},$$

$$r = -2 \cos(2^n a)$$

としたときであるから、この軌跡はトロコイドを描くことがわかる。葉の数は (I) と同様である。

(ii) n が偶数のとき

n が偶数のときも (i) と同じように示すことができる。

(X)において、

$$180^\circ(n-1) \equiv 180^\circ \pmod{360^\circ}$$

である。また、(Y)と(Z)において、

$$180^\circ \{n-3+(-2)^{n-1}\} \equiv 180^\circ \pmod{360^\circ}$$

なので、 H_n の x 座標は、

$$\cos \alpha_n + \cos \beta_n + \cos \gamma_n$$

$$= \cos\left(\frac{1-(-2)^{n+1}}{3} \alpha_0 + 180^\circ\right)$$

$$+ \cos\left(\frac{1-(-2)^n}{3} \alpha_0 + (-2)^n a + 180^\circ\right)$$

$$+ \cos\left(\frac{1-(-2)^n}{3} \alpha_0 - (-2)^n a + 180^\circ\right)$$

$$= -\cos\left(\frac{1-(-2)^{n+1}}{3} \alpha_0\right)$$

$$-2 \cos((-2)^n a) \cos\left(\frac{1-(-2)^n}{3} \alpha_0\right)$$

とかける。同様に、 y 座標は

$$\sin \alpha_n + \sin \beta_n + \sin \gamma_n$$

$$= -\sin\left(\frac{1-(-2)^{n+1}}{3} \alpha_0\right)$$

$$-2 \cos((-2)^n a) \sin\left(\frac{1-(-2)^n}{3} \alpha_0\right)$$

とかける。

$$\text{ここで、} \frac{1-(-2)^{n+1}}{3} \alpha_0 = \theta \text{ とおくと } H_n$$

の座標は以下のように表される。

$$x = \cos \theta + 2 \cos(2^n a) \cos\left(\frac{-2^n-1}{1-2^{n+1}} \theta\right)$$

$$y = \sin \theta - 2 \cos(2^n a) \sin\left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta\right)$$

$r = 2 \cos(2^n a)$ としたときの式であるから、
この座標はトロコイドを描くことがわかる。

$\cos(2^n a)$ の正負で場合分けをする。

(II) $\cos(2^n a) < 0$ のとき

(I) $\cos(2^n a) > 0$ のとき

$$x = \cos \theta + 2 \cos(2^n a) \cos\left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta\right)$$

$$x = \cos \theta - (-2 \cos(2^n a)) \cos\left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta\right)$$

$$y = \sin \theta - 2 \cos(2^n a) \sin\left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta\right)$$

$$y = \sin \theta + (-2 \cos(2^n a)) \sin\left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta\right)$$

である。これは、ハイポトロコイドの方程

である。ここで、この座標を角度 t だけ回転させたときの x 座標は、

式において、 $p = \frac{3 \cdot 2^n}{2^n + 1}$, $q = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n + 1}$,

$$x \cos t - y \sin t = \cos \theta \cos t - (-2 \cos(2^n a)) \cos\left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta\right) \cos t$$

$$- \sin \theta \sin t - (-2 \cos(2^n a)) \sin\left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta\right) \sin t$$

$$= \cos(\theta + t) + (-2 \cos(2^n a)) \cos\left(\frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta - t + 180^\circ\right)$$

ここで、 $t = \frac{2^{n+1} - 1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ$ とすると、

$$\begin{aligned} \frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta - \frac{2^{n+1} - 1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ + 180^\circ &= \frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta + \frac{2^n + 1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ \\ &= \frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \theta + \frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \cdot \frac{2^n + 1}{3 \cdot 2^n} \cdot \frac{1 - 2^{n+1}}{-2^n - 1} \cdot 180^\circ \\ &= \frac{-2^n - 1}{1 - 2^{n+1}} \left(\theta + \frac{2^{n+1} - 1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ \right) \end{aligned}$$

と変形できるので、もとの座標を $\frac{2^{n+1}-1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ$ だけ回転させたときの x 座標は

$$\cos\left(\theta + \frac{2^{n+1}-1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ\right) + (-2 \cos(2^n a)) \cos\left(\frac{-2^n-1}{1-2^{n+1}} \left(\theta + \frac{2^{n+1}-1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ\right)\right)$$

同様に計算することで、もとの座標を $\frac{2^{n+1}-1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ$ だけ回転させたときの y 座標は

$$\sin\left(\theta + \frac{2^{n+1}-1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ\right) - (-2 \cos(2^n a)) \sin\left(\frac{-2^n-1}{1-2^{n+1}} \left(\theta + \frac{2^{n+1}-1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ\right)\right)$$

となる。

ここで、 $\theta + \frac{2^{n+1}-1}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ = u$ とおくと、
座標は

$$x = \cos u + (-2 \cos(2^n a)) \cos\left(\frac{-2^n-1}{1-2^{n+1}} u\right)$$

$$y = \sin u - (-2 \cos(2^n a)) \sin\left(\frac{-2^n-1}{1-2^{n+1}} u\right)$$

となり、これはトロコイドの式において

$$p = \frac{3 \cdot 2^n}{2^n + 1}, \quad q = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n + 1},$$

$$r = -2 \cos(2^n a)$$

としたときであるから、この軌跡はトロコイドを描くことがわかる。葉の数は (I) と同様である。

以上より、垂心 H_n 軌跡は葉の数 2^n のハイポトロコイドを描くことが示された。

(Q. E. D.)

ただちに、以下が示される。

系 1-1

定理 1 において、点 A_0 を動かしたときの

$\triangle A_n B_n C_n$ の重心 G_n の軌跡は葉数 2^n の

ハイポトロコイドである。

証明

オイラー線の関係から、重心は外心と垂心を $1:2$ に内分する点である。いま、外心 O は固定されている。ゆえに、重心 G_n の軌

跡は垂心 H_n の軌跡を $\frac{1}{3}$ に縮小した図形と

なる。よって、重心 G_n の軌跡は葉数 2^n の

ハイポトロコイドである。(Q. E. D.)

3-2. 幾何的な考察

計算によって、垂心の軌跡がハイポトロコイドとなることが示されたが、幾何的にはどのような構造になっているのかを調べた。

定理 2-1

定理 1 において、辺 $B_n C_n$ と線分 $A_n H_n$ の長さは A_0 の位置によらずそれぞれ一定である。

(証明)

辺 $B_n C_n$ の長さが一定であることを数学的帰納法で示す。

$n=0$ のとき、辺 $B_0 C_0$ は一定である。

$n=k$ のとき、辺 $B_k C_k$ が一定の長さであると仮定し、辺 $B_{k+1} C_{k+1}$ の長さが一定であることを示す。次図において、

$\angle C_k A_k B_k = a$ とおくと、 a は定数である。また、 H_k から辺 $C_k A_k$ 、 $A_k B_k$ へ降ろした垂線の足をそれぞれ P 、 Q とする。

$$\begin{aligned} \angle B_{k+1} A_{k+1} A_k &= \angle B_{k+1} B_k A_k \\ &= 90^\circ - \angle P A_k B_k \\ &= 90^\circ - a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle A_k A_{k+1} C_{k+1} &= \angle A_k C_k C_{k+1} \\ &= 90^\circ - \angle Q A_k C_k \\ &= 90^\circ - a \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} \angle B_{k+1} A_{k+1} C_{k+1} &= \angle B_{k+1} A_{k+1} A_k + \angle A_k A_{k+1} C_{k+1} \\ &= 180^\circ - 2a \end{aligned}$$

となるので、辺 $B_{k+1} C_{k+1}$ の長さは一定である。 $\triangle A_k B_k C_k$ が鈍角三角形であるときも同様である。よって示された。

ここで、円の中心を O 、辺 $B_n C_n$ の中点を M とすると、辺 $B_n C_n$ の長さは一定なので、線分 OM の長さも一定である。いま、一般に、 $A_n H_n = 2OM$ が成り立つので、線分 $A_n H_n$ の長さも一定であることがわかる。

(Q. E. D.)

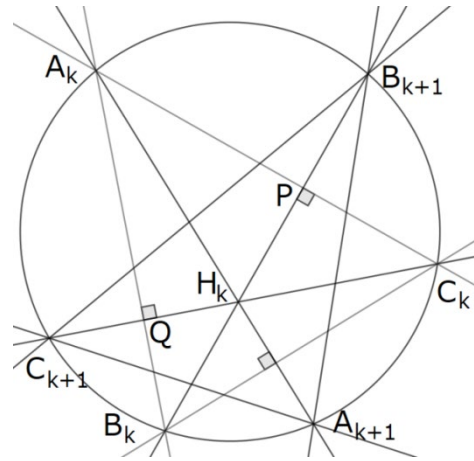


図 9

定理 2-2

定理 1 において、点 A_0 が円周上を回転するとき、点 A_n が θ だけ回転したとき、辺

$B_n C_n$ は逆向きに $\frac{-1+(-2)^n}{1-(-2)^{n+1}} \theta$ 回転する。

(証明)

定理 1 の証明において、

$$\alpha_n = \frac{1-(-2)^{n+1}}{3} \alpha_0 + 180^\circ(n-1)$$

$$\beta_n = \frac{1-(-2)^n}{3} \alpha_0 - (-2)^n a$$

$$+ 180^\circ \{n-3+(-2)^{n-1}\}$$

$$\gamma_n = \frac{1-(-2)^n}{3} \alpha_0 + (-2)^n a$$

$$+ 180^\circ \{n-3+(-2)^{n-1}\}$$

である。ここで、点 A_n 、辺 $B_n C_n$ の回転の方向はそれぞれ α_n 、 β_n の式における α_0 の係数の符号で決まる。

$$n \text{ が奇数のとき、} \frac{1-(-2)^{n+1}}{3} < 0$$

$\frac{1-(-2)^n}{3} > 0$. また、 n が偶数のとき、
 $\frac{1-(-2)^{n+1}}{3} > 0$, $\frac{1-(-2)^n}{3} < 0$ なので、 α_0
 の係数の符号は異なる。ゆえに、点 A_n と辺
 B_nC_n の回転の方向は逆である。よって、点
 A_0 が θ 回転すると、点 A_n が $\frac{1-(-2)^{n+1}}{3}\theta$
 回転し、辺 B_nC_n は逆向きに $-\frac{1-(-2)^n}{3}\theta$
 だけ回転するので、点 A_n が θ 回転するとき、
 辺 B_nC_n は逆向きに $\frac{-1+(-2)^n}{1-(-2)^{n+1}}\theta$ 回転する。
 (Q. E. D.)

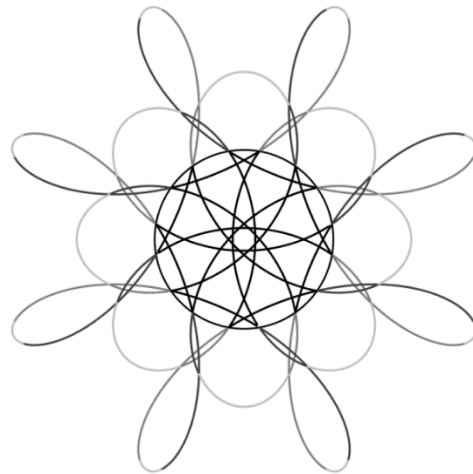


図10 $n=3$ のとき

この図形は以下のように葉数4のハイポトロコイドが4つ重なっている。

4. 今後の課題

今回は円に内接する三角形について、垂線を下す操作において、垂心の軌跡を求めたが、ほかにもさまざまな操作が考えられる。

予想1

定理1において、 $\triangle A_n B_n C_n$ の内心の軌跡を I_n^* , 傍心 $I_{A_n}, I_{B_n}, I_{C_n}$ の軌跡をそれぞれ

$I_{A_n}^*, I_{B_n}^*, I_{C_n}^*$ とすると、

$$I_n^* \cup I_{A_n}^* \cup I_{B_n}^* \cup I_{C_n}^*$$

は葉数 2^{n-1} のハイポトロコイドが4つ重なった図形である。

実際に描くと以下のようなになる。

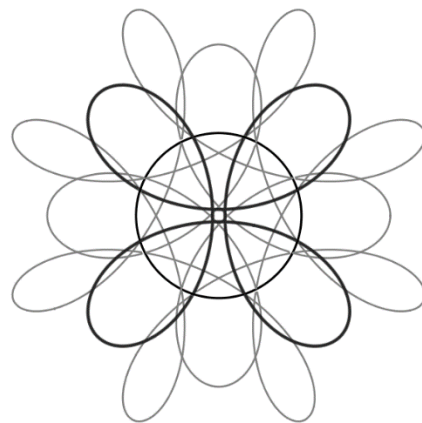


図11 ハイポトロコイド①

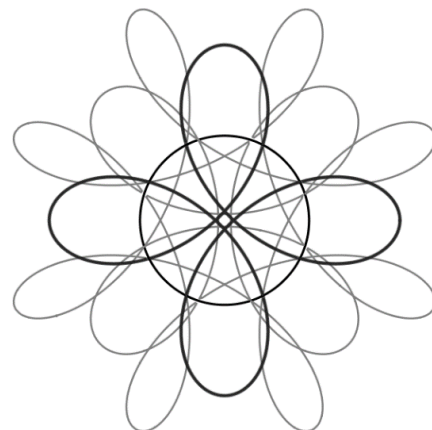


図12 ハイポトロコイド②

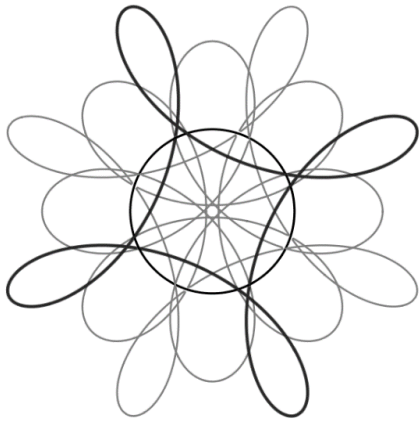


図 13 ハイポトロコイド③

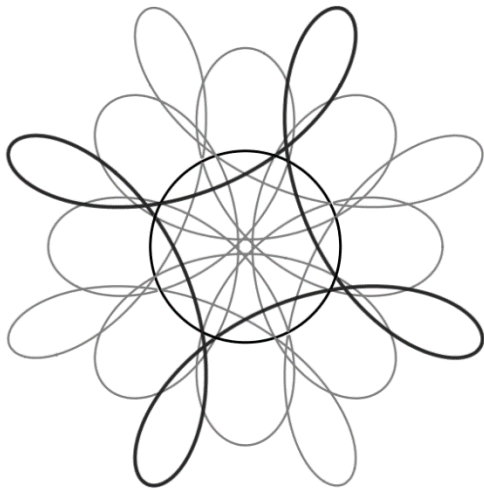


図 14 ハイポトロコイド④

予想 2

定理 1 において、 A_n, H_n をそれぞれ $A_n^{(0)}, H_n^{(0)}$ とかくことにする。辺 B_0C_0 に平行な始線 OX を引く。 $m \geq 1$ について、以下の 2 つの操作を加えることを考える。

操作 σ_+ : 点 X を通り直線 $A_0^{(0)}A_m^{(k)}$ に平行な

直線と円との交点を $A_m^{(k+1)}$ とする。

そして、三角形 $A_m^{(k+1)}B_mC_m$ の垂

心を $H_m^{(k+1)}$ とする。

操作 σ_- : 点 A_0 を通り直線 $A_0A_m^{(k)}$ に平行な

直線と円との交点を $A_m^{(k-1)}$ とする。

そして三角形 $A_m^{(k-1)}B_mC_m$ の垂心

を $H_m^{(k-1)}$ とする。

このとき、2 以上のすべて整数 i について、点 A_0 を円周上で動かしたときの点 $H_q^{(p)}$ の軌跡が葉数 i のハイポトロコイドとなるような整数 p, q が存在する。

例えば、垂心 $H_2^{(1)}, H_2^{(-1)}$ の軌跡はそれぞれ次のようになる。

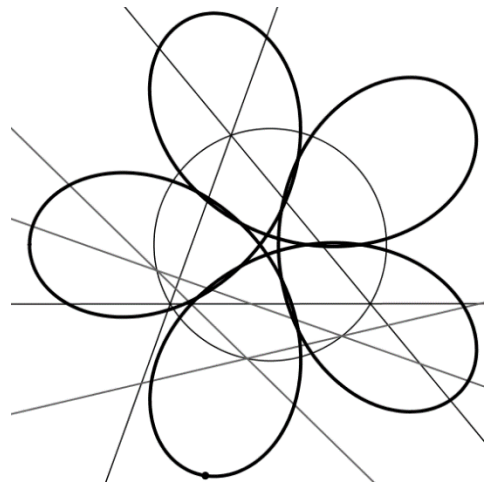


図 15 点 $H_2^{(1)}$ の軌跡

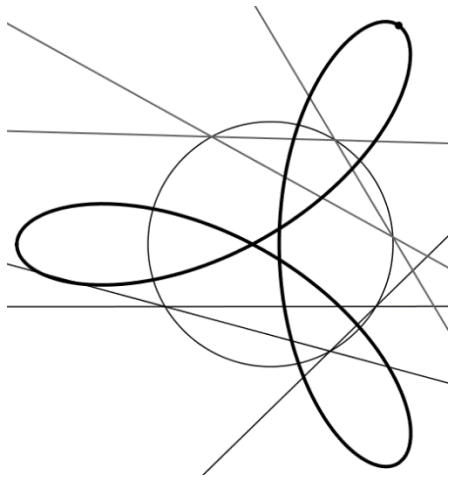


図 16 点 $H_2^{(-1)}$ の軌跡

このように、点 $H_2^{(1)}, H_2^{(-1)}$ の軌跡はそれぞれ 5 枚、3 枚であり、これは点 $H_2^{(0)}$ の軌跡の葉数 4 からそれぞれ +1, -1 したものであると考えられる。よって、操作 σ_+ で軌跡の葉数が 1 増え、操作 σ_- で軌跡の葉数が 1 減ると予想できるが、これは一般には成り立たない。

例えば、 $H_3^{(-2)}$ の軌跡の葉数は、予想からは 4 であるが、実際は 2 (楕円) である。

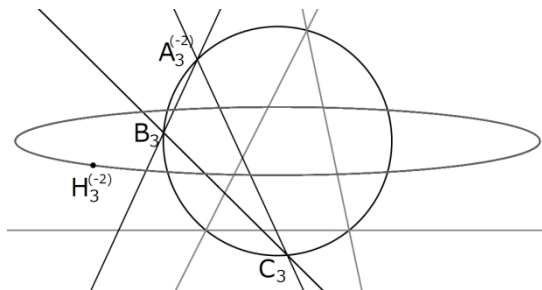


図 17

ほかにも、さまざまな操作が考えられる。

課題 1

点 O を中心とする円に内接する $\triangle D_0E_0F_0$ について、点 D_0 を通る中線と円の交点のうち、 D_0 でない方の点を D_1 、点 E_0 を通る中線と円の交点のうち、 E_0 でない方の点を E_1 、点 F_0 を通る中線と円の交点のうち、 F_0 でない方の点を F_1 とする。この操作で得られた $\triangle D_1E_1F_1$ の重心を G_1 とする。そ

して、 $\triangle D_1E_1F_1$ においても同様の操作を繰り返すということを無限に繰り返すと、各三角形の重心 G_1, G_2, G_3, \dots が得られる。

辺 E_0F_0 を固定し、点 D_0 を円周上で動かしたとき重心 G_n (n は正の整数) の軌跡はどうか。

実際に図を描くと以下のようなになる。

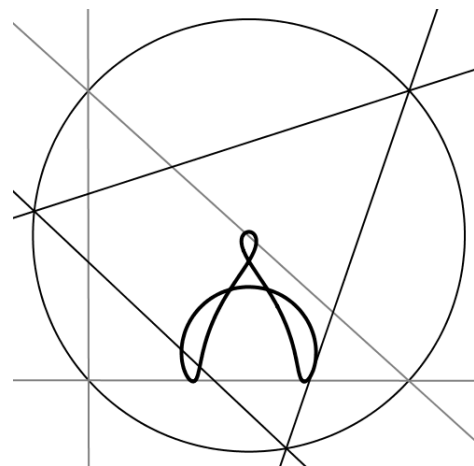


図 18 点 G_1 の軌跡

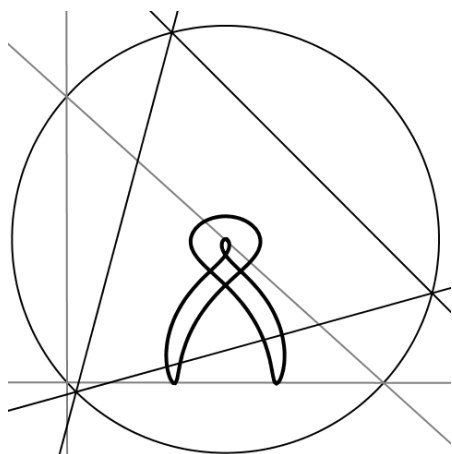


図 19 点 G_2 の軌跡

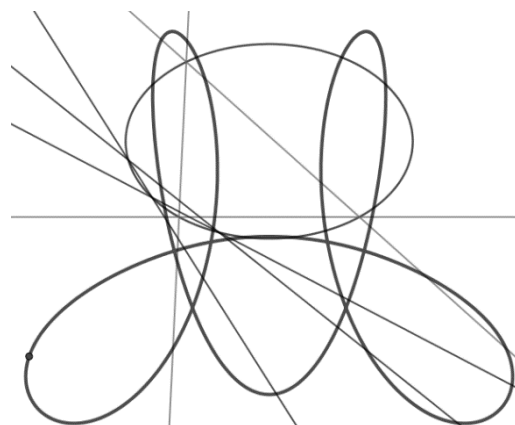


図 21 円を楕円に変えたときの H_2 の軌跡

また、操作を二等分線にし、内心の軌跡をとることも考えられる。

また、放物線 $y = x^2$ に変えると以下のようになる。

課題 2

定理 1 やその他の操作について、円を他の二次曲線に代えて操作を行うと軌跡はどうなるか。

例えば、定理 1 において、円を楕円 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ に変えると、軌跡は以下のようになる。

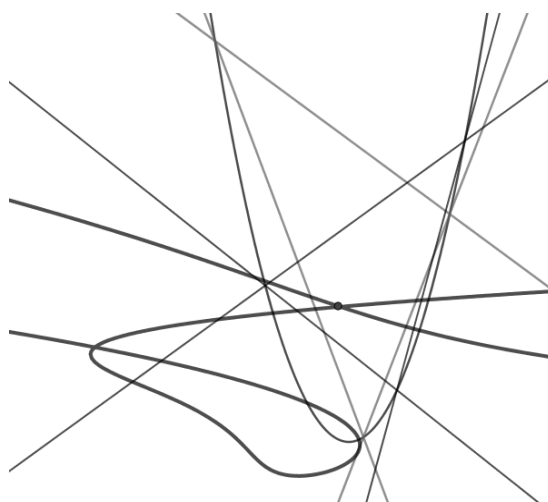


図 23 円を放物線に変えたときの H_1 の軌跡

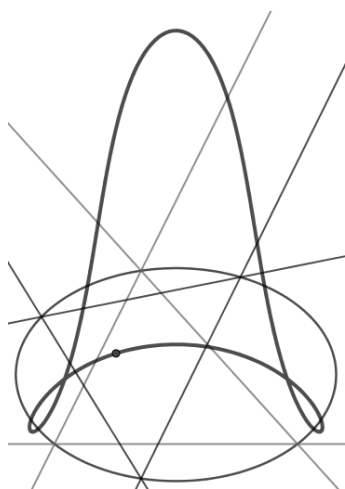


図 20 円を楕円に変えたときの H_1 の軌跡

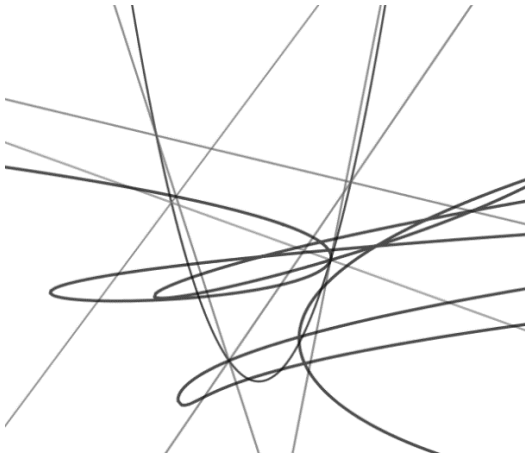


図 24 円を放物線に変えたときの
 H_2 の軌跡

特に、放物線に変えた場合の軌跡はとても複雑であることがわかる。

このように、「外接する曲線」、「操作」、「どの点の軌跡をとるか」という条件をそれぞれ変えていくことでいくつものパターンが考えられる。今後は特に上で挙げたような操作について考え、そこから五心のつながりなども見出していきたい。

5. 参考文献

- [1] webサイト「ハイポトロコイド (hypotrochoid)」
<http://www.phoenix-c.or.jp/~tokioka/hypotrochoid/hypotrochoid.html>

6. 謝辞

今回の研究にあたり、ご指導下さいました顧問の川口先生ありがとうございました。

カプレカー変換に関する考察(4)

6年C組 市田 美玲
指導教員 川口 慎二

1. 要約

サイエンス研究会数学班 6年生は3年間カプレカー変換について学習し、今年度はSS課題研究という授業の取り組みとして研究を継続している。今回は、これまでの研究結果をまとめたので紹介する。

キーワード カプレカー変換、カプレカー定数、ソート、収束、循環

2. 研究の背景と目的

カプレカー変換とは自然数に対して、各桁の数字を並びかえて作ることのできる最大の数から最小の数を引く操作のことである。この変換を続けると1つの値に収束するか、複数の値で循環することが知られている。しかし、どのような場合に収束するのかあるいは循環が表れるのか、どのような値を経由して収束、循環にたどりつくのか、カプレカー定数はどのような値なのかについては明らかになっていない。そこで、今回はこれまで研究してきた2, 3, 4, 5, 6, 7桁における、収束、循環の過程とカプレカー定数についての考察をまとめた。なお、各桁におけるカプレカー変換や、カプレカー定数についての詳しい考察は、参考文献[1], [2], [3]にまとめている。

3. 研究内容

3-1. 基本事項

自然数において、各桁の数字を並びかえて作ることのできる最大の数から最小の数を引く操作を**カプレカー変換**という。以降、これを単に「変換」とよぶことにする。

ただし、ぞろ目は最初の変換で0になる

ので、除いて考える。また、 n 桁の変換を考える際に変換により1桁減ってしまったとしても、 n 桁とみなして考える。

また、各桁の数字を並びかえて、最大の数にする操作をソートといい、1回の変換によって、値が変化しない自然数のことを**カプレカー定数**という。

3-2. 2~7桁のカプレカー変換

■2桁のカプレカー変換

すべての2桁の自然数は変換を繰り返すと、 $81 \rightarrow 63 \rightarrow 27 \rightarrow 45 \rightarrow 9 \rightarrow \dots$ と循環する。この循環に入るまでに最大2回の変換が必要である。

また、循環の過程は図1の樹形図のように表される。ある自然数を1回変換すると、樹形図中のいずれかの数になる。さらに、その数を変換すると線でつながれている右側の数になる。例えば、「 $81-63$ 」は81を1回変換すると、63に変換されることを表している。

なお、2桁のカプレカー定数は存在しない。

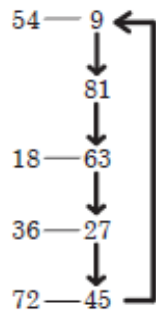


図1 2桁の数の変換

■3桁のカプレカー変換

すべての3桁の自然数は変換を繰り返すと、495に収束し、最大6回の変換が必要である。収束の過程は次のように表される。

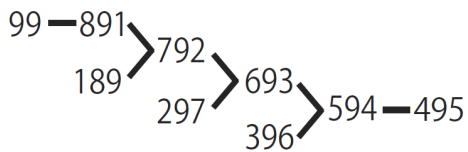


図2 3桁の数の変換

なお、3桁のカプレカー定数は495である。495は変換を行っても495のまま変わらないので、数の右側に線がない表記になっている。

■4桁のカプレカー変換

すべての4桁の自然数は変換を繰り返すと、6174に収束し、最大7回の変換が必要である。なお、4桁のカプレカー定数は6174である。収束の過程は、図3ように表される。

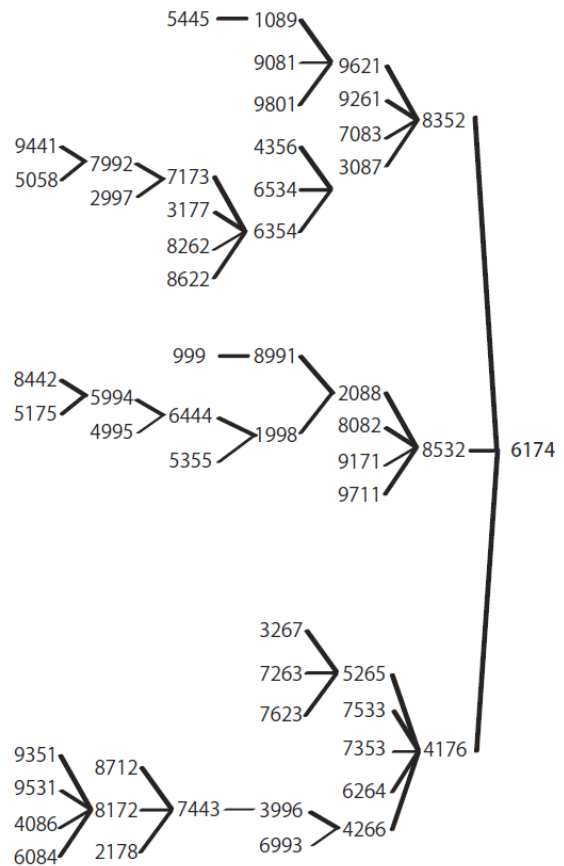


図3 4桁の数の変換

■5桁のカプレカー変換

すべての5桁の自然数は変換を繰り返すと、次の3パターンのいずれかで循環する。

- ①74943→62964→71973→83952→…
- ②75933→63954→61974→82962→…
- ③59994→53955→…

①, ②は最大で6回の変換を行うと循環に入り、③は最大で2回の変換を行うと循環に入る。なお、5桁のカプレカー定数は存在しない。循環の過程は、図4のように表される。

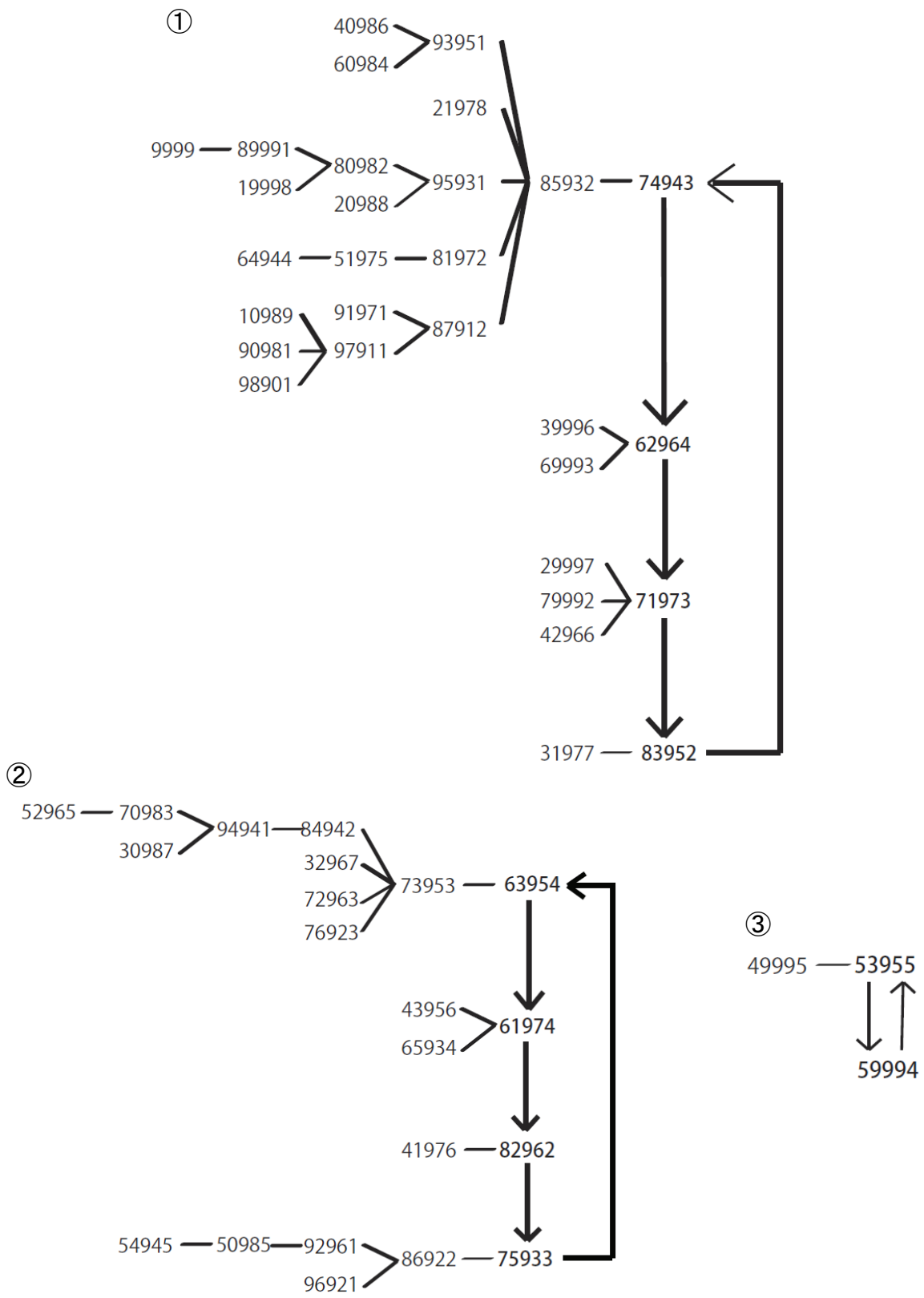


図4 5桁の数の変換

■ 6桁のカプレカー変換

6桁の自然数は変換を繰り返すと、次の3パターンのいずれかで循環または収束する。

① 420876 → 851742 → 750843 → 840852
→ 860832 → 862632 → 642654
→ 420876…

② 631764

③ 549945

さらに①は最大で13回の変換で循環に入り、②は最大で4回、③は最大で1回の変換で収束する。なお、6桁のカプレカー定数は、631764と549945である。循環または収束の過程は、図5のように表される。

■ 7桁のカプレカー変換

7桁の自然数は変換を繰り返すと、

8649432 → 7519743 → 8429652
→ 7619773 → 8439552 → 750843
→ 9529641 → 8719722

と循環し、最大で13回の変換が必要である。なお、7桁のカプレカー定数は存在しない。循環の過程は、図6のように表される。

3—3. カプレカー定数について

次のパターンで表される数はカプレカー定数である。

① 55 … 549 … 94 … 45

② 63 … 3176 … 64

9 … 9 のように…の両端が同じ数のとき、…の間にある数はすべて両端の数(ここでは9)であることを表わしている。

①について、4, 5, 9は同じ個数であり、 $3k$ 桁のとき成立する(これ以降、 k は自然数である)。

②について、3 … 3と6 … 6の3, 6は

同じ個数であり、 $2k+2$ 桁のとき成立する。

この法則を用いると、7桁より大きな桁数のカプレカー定数を予想することができる。たとえば、8桁のカプレカー定数は
 $76664331 - 13346667 = 63317664$
より、63317664である。

$3k$ 桁、 $2k+2$ 桁のカプレカー定数が存在するので、 $3k$ 桁、 $2k+2$ 桁ではこれらのカプレカー定数に収束する数が存在する。

この詳細については、参考文献[3]を参照されたい。また、参考文献[4]によると、31桁までの整数において、カプレカー定数は14パターンに分類された257個存在することがわかっている。各パターンには、ただ1つの種になるカプレカー定数があり、それに特定の桁だけ数字を加えることによって、他のカプレカー定数が生成される。

3—4. 循環と収束について

変換を続けると、2桁と5桁と7桁の自然数は循環、3桁と4桁の自然数は収束、6桁の自然数は循環も収束もあり得るということがわかった。

カプレカー変換は、何回操作を行っても桁数が変わらないので、発散することはない、循環または収束のどちらかに辿り着く。さらに、収束するということは、変換を繰り返してカプレカー定数に変換されると、何回変換を行っても値が変わらないということである。

したがって、収束が起こるためには、その桁数でカプレカー定数が存在する必要がある。また、桁数が大きくなるにつれ、その桁数がとり得る変換後の値も増える。カプレカー定数が存在するとしても、その桁数のすべての数がカプレカー定数に収束す

るとは限らない。たとえば、6桁では、変換後にとり得る値が219通りあり、そのすべての値が2つのカプレカー定数に辿り着くわけではない。

よって、桁数が大きくなるにつれて、循環も収束もあり得る可能性が高いと予想できる。また、桁数が大きくなるにつれて、2桁や7桁のようにすべての数が1種類の循環に入るわけではなく、5桁のように複数の循環のパターンが存在する可能性も高い。

参考文献[4]によると、2桁から31桁において、循環や収束のパターンが1つしかない、つまり、その桁のすべての数が同じ結果に辿り着くのは、2, 3, 4, 7桁のみである。8桁以上は、複数の循環のパターンをもち、カプレカー定数も1つ以上存在することがわかっている。

4. 今後の課題

今回、2, 3, 4, 5, 6, 7桁のカプレカー変換とカプレカー定数についての考察についてまとめた。しかし、以前から考察したいと考えていた収束、循環の過程の値の規則性については、手掛かりが見つからず、考察できなかった。また、桁数が大きくなるにつれて、変換を繰り返した結果や過程の値が複雑になる。今回は、SS課題研究の授業時間を7桁の樹形図を完成させるのに費やしたため、十分な考察ができなかったということも反省点である。

5. 参考文献

[1] 「カプレカー変換に関する考察」, 市田美玲, 2013年度奈良女子大学附属中等教育学校サイエンス研究会生徒研究論文集

[2] 「カプレカー変換に関する考察(2)」, 市田美玲, 2014年度奈良女子大学附属中等教育学校サイエンス研究会生徒研究論文集

[3] 「カプレカー変換に関する考察(3)」, 市田美玲, 2015年度奈良女子大学附属中等教育学校サイエンス研究会生徒研究論文集

[4] 「高次桁のカプレカ変換1」, 平田郁美, <http://www.kyoai.ac.jp/college/ronshuu/no-05/hirata.pdf>

6. 謝辞

今回の研究にあたりご指導くださった顧問の川口先生、ありがとうございます。長い期間、研究が進まないときも見守ってくださいました。また、研究を行ってきた6年間を通して、卒業されたサイエンス研究会の先輩、後輩の方々にもご協力いただきました。ありがとうございます。

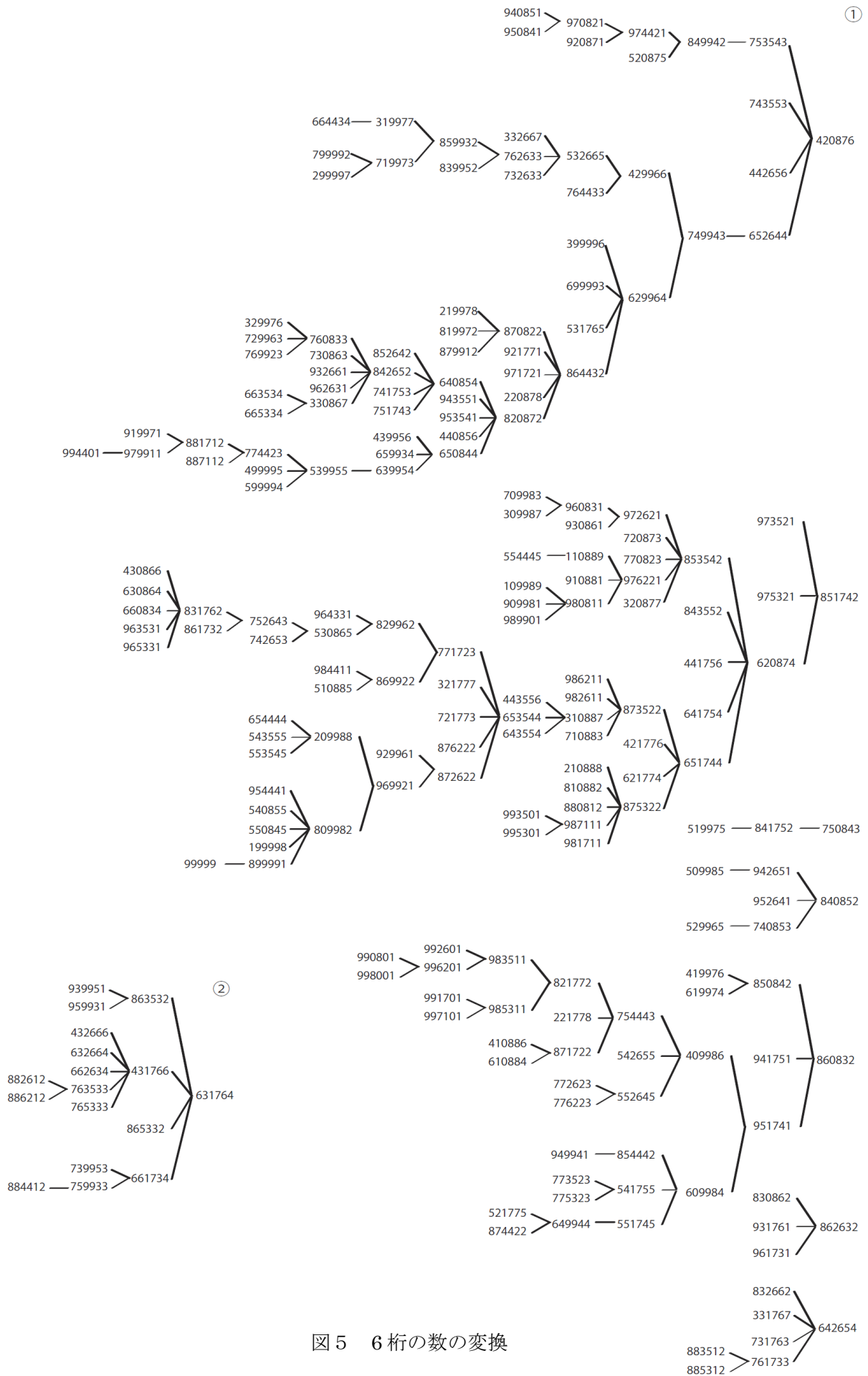


図5 6桁の数の変換

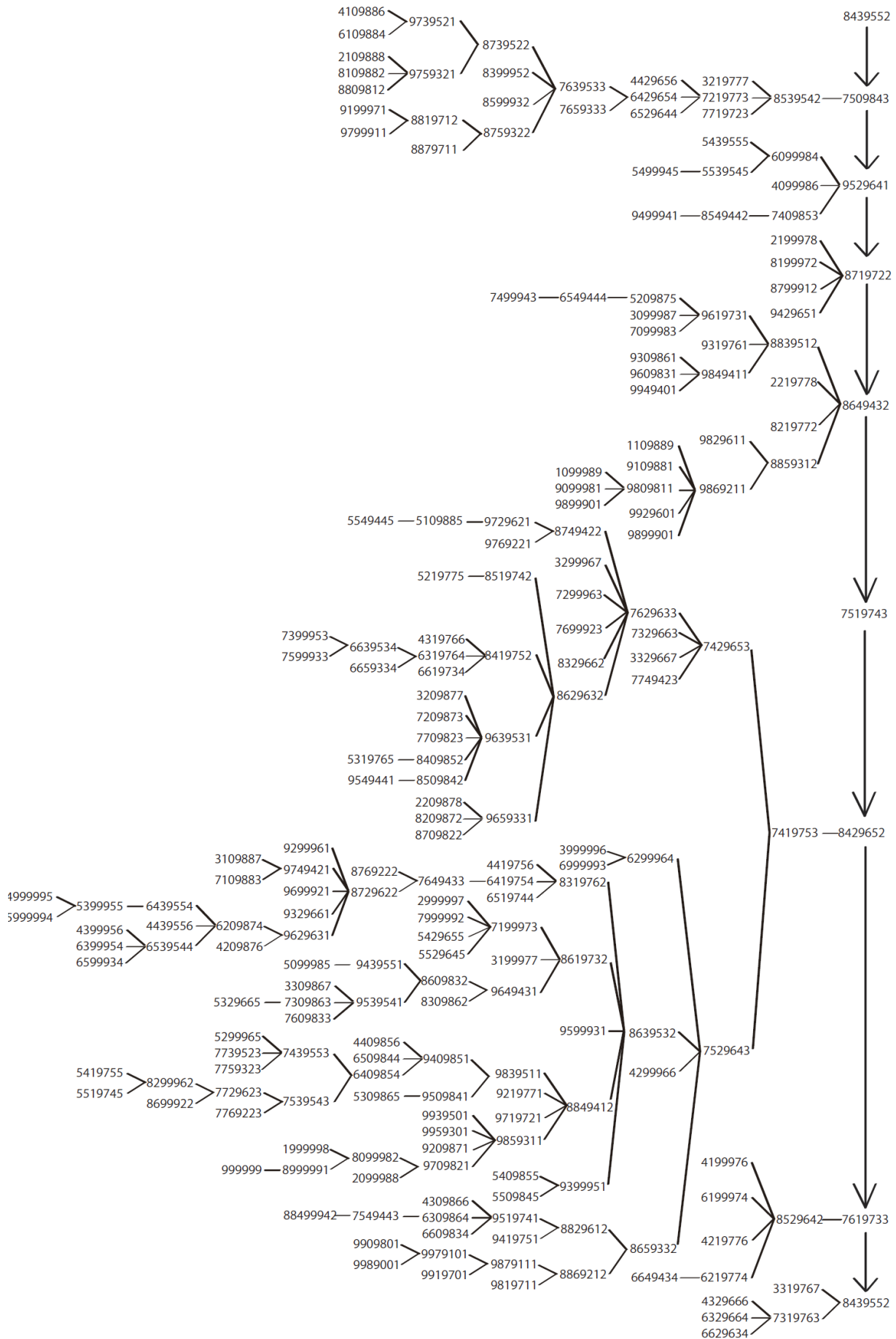


図6 7桁の数の変換

身近なものを使った時間を測る装置の作成

2年A組 中野 光貴
2年B組 安藤 陽史
2年C組 大塚 雄大
2年C組 坂本 一眞
指導教諭 藤野 智美

1. 要約

私たちは、100円均一ショップで購入できる身近なものを使って時間を測るための装置を制作した。また、その実験装置に使われている周期運動の周期の長さを変化させ、誤差との関係を調べた。

キーワード ハンドミキサー、周期運動、電圧による回転数の変化

2. 研究の背景と目的

私たちは今年度よりサイエンス研究会物理班として活動している。研究手法を学ぶための導入として、「百円均一の商品で十秒を正確に計る装置を作成する」という課題に取り組むとともに、より正確に時を刻むための条件について探究した。



図1

3. 研究内容

3. 1 実験装置の作成

実験装置の作成前に、私たちは時計に必要な要素として以下の3つを考えた。

<時計に必要な要素>

- ① 周期運動の発生
- ② 周期運動の周期の測定
- ③ 時間が算出できる値の表示

今回の実験装置では、上記の①をハンドミキサー(3V)、②をハンドミキサー(以下、ミキサー)と歩数計の接触回数、③を歩数計によって実現することとし、図1のような実験装置を組み立てた。

<工夫点>

歩数計とミキサーの接触回数を自動表示するために、歩数計を分解し、回数をカウントする端子にミキサーへの接触コードをはんだ付けした。この接触コードがミキサーと接触すると、その接触回数が自動的に歩数計に表示されるように工夫した。

3. 2 装置を用いた測定

3-2-1 実験内容

○目的

ハンドミキサーの回転数と時間の関係を調べる。

- ・周期運動にかかる時間の長さが、算出した時間の不確かさに与える影響を調べる

- ・電圧と回転数の関係について調べる

○仮説

- ・ミキサの回転数が多いほど一回転あたりの誤差が及ぼす全体の回転数への影響が少なくなることから、ミキサの回転数が増えるほど時計が正確になると考える。

- ・電圧と回転数は比例の関係にある。

○実験方法

①ミキサを電源装置につなぎ、2V から4V の間で、出力する電圧値を 0.5V ずつ変化させる。

② 100 秒あたりの回転数を調べるということを 10 回続け、平均値を求めるとともに、五数要約による分布図の作成を行う。

③ ②のデータをもとに、電流値とミキサの回転数の関係を調べる。

3-2-2 実験結果

表 1 に電圧による回転数の変化、図 1 に五数要約による箱ひげ図を示す。

<実験結果>

- ・電圧が上がっても、四分位範囲が狭まっているとは言えない。

- ・電圧が上がっても回転数が比例して増えているとは言えない。

- ・ 最大値と最小値の範囲は電圧を上げるにつれて小さくなっている。

電源の電圧[V]	ミキサと歩数計の端子の 100秒あたりの接触回数[回/100秒]					四分位範囲
	平均	中央値	最大値 (①)	最小値 (②)	差 (①-②)	
2.5V	418	422	432	385	47	6.3
3.0V	414	416	423	391	32	8.5
3.5V	433	433	442	421	21	11
4.0V	443	443	449	434	15	3.5

表 1

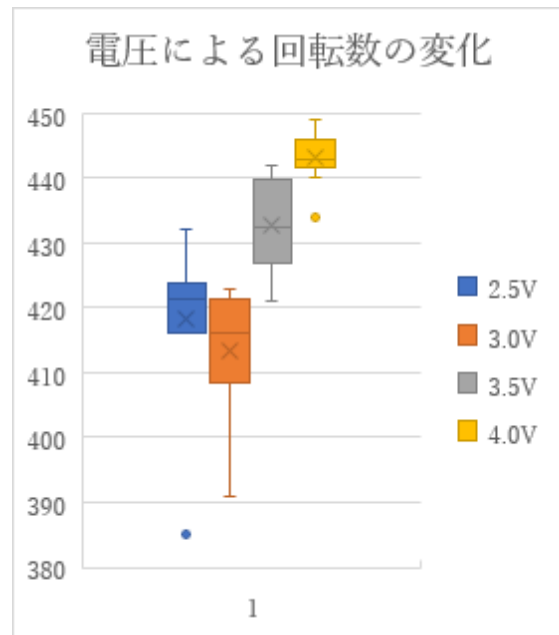


図 1

4. 考察

今回の実験では前述した仮説は証明されなかった。しかし、最大値と最小値の差と電圧の間には規則性がみられたことから、この実験のデータをさらに増やせば、四分位範囲などでも規則性がみられると考えられる。

5. 今後の展望

今回使用した装置は接触部のエナメル線による物理的抵抗や歩数計の処理スピードが遅いなどの不安定な要素があったため、不確かさが増しているため、改善していきたい。また、実験データの個数を増やし、さらにデータの信頼性を上げていきたい。

6. 謝辞

本研究におきまして、指導して下さった顧問の藤野先生、アドバイスをくださった先生方に深く感謝申し上げます。

画像認識の開発と応用

3年A組 中盛 楓也

3年A組 小林 望

3年B組 望月 草馬

指導教員 藤野 智美

1. 要約

私たちはハードウェアに搭載することを目的とした画像認識システムについて研究を行っている。研究の第一段階として、形や色が単純であるピンポン球の認識を試みた。その手法は、webカメラでピンポン球を映し、その映像データを Processing と OpenCV を用いて解析することで色や形、座標を求めるというものである。さらに、これらの技術を使用し、画像認識システムを用いた「移動可能型 VR」の開発を行ったので、ここで報告する。

キーワード 画像認識、webカメラ、物体の色と形、VR

2. 研究の背景と目的

私たちは画像認識システムに興味をもち、研究を開始した。今回はロボコン等で多用されているピンポン球を認識し、座標を求めるシステムの開発を行った。また、ここで得た画像認識の技術を使って VR への応用が可能なのではないかと考え、移動可能型 VR への応用を試みた。

3. 研究内容

3. 1 画像認識システムの必要な要素

今回目指した画像認識システムは、webカメラから得られた画像データのみから物体を認識し、座標を特定できるシステムである。この技術を用いると、画像認識システムを VR に応用する際、コントローラーによる操作無しで人間の動き（人間の位置情報）が感知できると考える。そこで、webカメラに物体を写し、得られた画像データのうち、「物体の色」、「物体の形」、「物体の座標」の3要素に着目して目的とする物体

のみを認識できる画像認識システムの開発を試みた。認識を行う物体には、色合い及び形状のシンプルさを考え、オレンジ色のピンポン球を用いることとした。

3. 1. 1 色の認識

オレンジ色のピンポン球は、単色であり、かつ環境色として少ないという点でその色に特徴がある。この色を正確に認識できるシステムが開発できれば、色の認識からピンポン球を特定できる可能性がある。プログラム上で以下の方法を組み込み、webカメラに写し出されたピンポン球の色の認識を試みた。なお、プログラミング言語には processing というオープンソースプロジェクトと、processing の追加ライブラリである OpenCV を用いた。

<方法>

1. webカメラでピンポン球を写し、画像データを得る。
2. 各ピクセルがオレンジ色かどうかを確かめるために、1で得られた画像データの

色の判定に用いる条件式を以下のように決める。

○オレンジ色の判定を行う条件式

<R,G,B>の色の値に対して、

$$R > G \times 1.5 \text{ かつ } R > B \times 1.5$$

なお、この条件式は、webカメラに様々なオレンジ色の物体を写し、それらの画像から得られたピクセルデータを分析して割り出した条件式である。つまり、この条件を満たす物体は、オレンジ色であると判断できる。

3. 1 で得られた画像データの画面上のすべてのピクセルを 2 の手法を用いて判定し、オレンジと判定されたピクセルの座標を平均化する。この平均座標をピンポン球の中心として認識する。

<結果>

図 1 はプログラムの実行画面である。なお、オレンジ色と認識しているピクセルは黒で表示されており、ピンポン球の中心位置を表しているのが白い正方形である。この手法を用いた結果、オレンジ色である物体すべてに反応してしまい、ピンポン球だけを認識することはできなかった。また、図 1 のようにオレンジ色の物体が複数ある場合、座標の平均を算出しているため、それらの物体の間をさしてしまう。

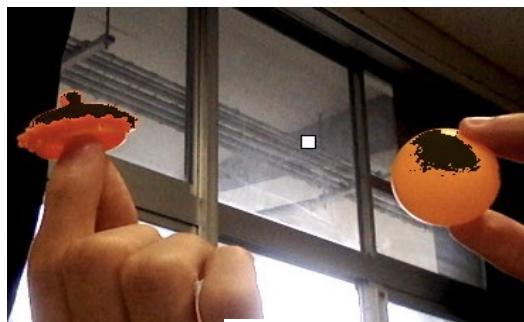


図 1

<考察>

オレンジ色であるという条件だけではピンポン球のみを認識することができなかった。よって、色以外の他の要素を追加することでピンポン球の認識を行う必要がある。

3. 1. 2 形の認識

先述したように、色の認識のみではピンポン球だけを認識することはできなかった。そこで、色の認識に加えて、形を認識することができれば、ピンポン球以外のオレンジ色の物体を除外することができるのではないかと考えた。そこで、研究の次段階として、ピンポン球の円という形に注目し、プログラム上で以下の方法を組み込み、ピンポン球の形の認識を試みた。

<方法>

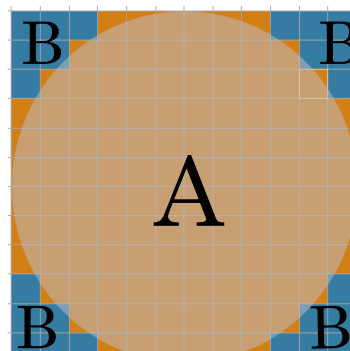


図 3

1. 先述した色の認識の手法を利用し、画像のピクセルを上から順番に横一列にオレンジ色かどうかを確かめる、そして、オレンジが何ピクセル連続しているか記

録する。

2. 1で求めたオレンジ色の連続したピクセルの数が一番多いところを円の直径と定義し、この直線から円の中心と半径を求める。

3. 2で求めた円の中心から上下左右に半径の長さを伸ばし、正方形を作る。正方形の中に円があると仮定すると図2のように、正方形内で場所によってオレンジのピクセルの数が変わる。四隅付近はオレンジ色ではないが、中心付近はオレンジ色になっている。そのため、ピンポン球の判定条件として、正方形の四隅の角付近にはオレンジが少なく、中心付近にはオレンジが多いという条件を設定する。図2の領域Aにおけるオレンジのピクセル数が5割以上、領域Bにおけるオレンジのピクセル数が5割未満であれば、これを円と認識し、ピンポン球として判定した。

<結果>

この手法を用いると、オレンジ色の物体全てに反応することなく、ピンポン球のみに反応するようになった。また、図3のように複数のオレンジ色の物体がカメラに写っても、ピンポン球のみを認識することができた。しかし、オレンジ色で円形の物体であれば、ピンポン球でなくても反応してしまうことがわかった。

<考察>

確実にピンポン球のみを認識することはできないが、webカメラ一台のみでは平面でしか物体を認識することができないためこれ以上の認識精度向上が望めないと考えた。なお、ここまでの色の認識と形の認識によって、平面での物体の特定と認識は概ね可能になった。

3. 1. 3 座標の認識

次に、認識したピンポン球の座標を求める方法を考える。図4はカメラとピンポン球の位置関係を上から見たものである。

この考え方では、webカメラとピンポン球の距離をカメラの正面方向の距離(a)とwebカメラから見たピンポン球の左右方向のずれ(c)によってピンポン球の座標のずれを算出しようと考えている。

上図の a と r の関係式の算出方法として、webカメラとピンポン球との距離の係数に注目した。ピンポン球をwebカメラに近づけたり遠ざけたりすると、画面上に写し出されたピンポン球の大きさと実際のピンポン球の大きさの比率が変化する。このような遠近法の考え方から、 a を求められるのではないかと考えた。以下にその方法を示す。なお、プログラム上で、先述している色および形の認識のシステムを適用した上で、以下の方法を追加している。

①webカメラとピンポン球との正面方向の距離の算出 (a と r の関係式の算出)

<方法>

1. webカメラでピンポン球を写し、画像データを得る。
2. webカメラとピンポン球の正面方向の距離(a)と画面上のピンポン球のサイズ(r)

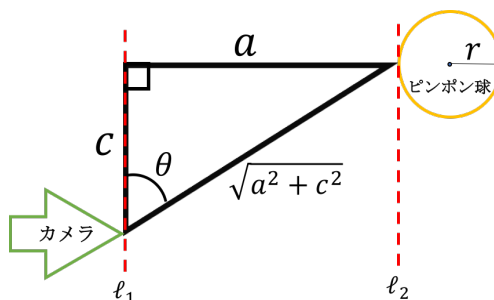


図 4

との関係を見つけるために、webカメラと

ピンポン球の間の距離をメジャーを用いて実測する。

3. この値を様々に変化させたとき、画面上のピンポン球の大きさがどのように変化するかを記録する。この段階で、いくつかのデータから、これらが反比例の関係になっていることが予測できた。よって、以下の手順では反比例の比例定数を導くことにする。

4. 3で予測した反比例の関係が成り立っていることを確かめるために、webカメラとピンポン球の正面方向の距離が15.00cmと30.00cmの2パターンで画面上のピンポン球の半径を測定し、比例定数の値を求める。

5. 4で求めた比例定数を反映させ、 a と r の関係式を算出する。この関係式の妥当性を検証するために、 a の値を15.00cmから2.00cmずつ増やし、 r の値を測定することで、理論値と実験値の差を検証した。

<結果>

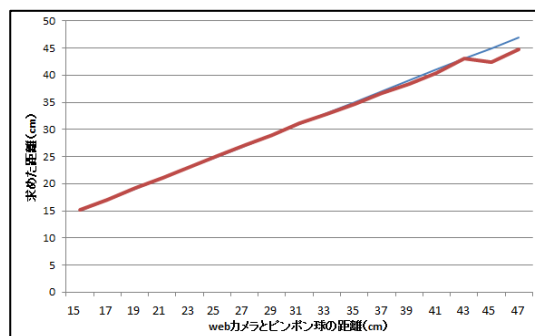
- webカメラとピンポン球の距離が15.00cmのとき、画面上のピンポン球の半径は82ピクセルであった。
- webカメラとピンポン球の距離が30.00cmのとき、画面上のピンポン球の半径は41ピクセルであった。

これらの結果より、webカメラとピンポン球との距離を a (cm)、画面上のピンポン球の半径を r (px)としたとき(図4参照)、以下の関係式が成り立つことが分かった。

$$a = \frac{1230}{r}$$

この関係式をプログラムに代入して a の値を変えながら r を測定した結果が図5である。なお、グラフ上の青線が理論値、赤線が実測値である。

なお、距離 (cm) の有効数字は小数第2位までとする。



距離 (cm)	ピクセル直径	$\frac{2460}{2r}$
15	163	15.09202
17	144	17.08333
19	128	19.21875
21	117	21.02564
23	107	22.99065
25	98	25.10204
27	91	27.03297
29	85	28.94118
31	79	31.13924
33	75	32.8
35	71	34.64789
37	67	36.71642
39	64	38.4375
41	61	40.32787
43	57	43.15789
45	58	42.41379
47	55	44.72727

図 5

<考察>

結果からわかるように、webカメラとピンポン球の距離 a と、画面上のピンポン球のサイズ r の関係を示す反比例の式を定義することができた。比例定数の値は、実験結果から1230であると定義でき、これはカメラによって変わる値であると考えられる。この関係式を用いれば、今回の実験とは逆の流れとなる、画面上のピンポン球のサイズの情報から逆算して、webカメラからどれだけ離れた位置にピンポン球があるかを算出できることになる。

②webカメラとピンポン球との左右方向のずれの算出 (a と c の関係式の算出)

次に、webカメラとピンポン球の正面方向の距離を変化させたとき、左右方向のず

れがどのように変化するか（図4のc）を以下の方法から求める。

<方法>

1. webカメラとピンポン球の距離をメジャーで測定し、20.00cmになるようにピンポン球を置く。
2. 1の状態からピンポン球の位置を左右に6.00cmずらし、画面上のピンポン球の座標がどれだけずれたかを計測する。
3. webカメラとピンポン球の距離を変化させ30.00cmになるように設定し、2と同様の作業を行い、ピンポン球の座標のずれを計測する。
4. 2, 3の結果から関係式を予想し、webカメラとピンポン球の距離(a)を変えながら、画面上での横ずれの値(c)を計測して、求めた関係式と一致するかを確認した。

<結果>

実験を行ったところ、ピンポン球の形が楕円になっていることに気づいた。これは、webカメラが広角レンズのため、画像のふちに近づくほど、物体が横に広がって写ってしまうことが原因である。つまり、ピンポン球がwebカメラの正面から左右にずれていればずれているほど、画面上での横の半径が大きく表示され、楕円となってしまうことがわかった。

<考察>

導いた関係式を適用するには、距離測定の方法を変更する必要がある。先ほどは、ピンポン球の横幅から半径を求めていたが、縦の幅から測定しなければならないと考える。

3. 2 VR への応用

私たちは開発した画像認識システムを

VRに应用できるのではないかと考えた。しかし、開発したシステムを用いて複雑な形状である人間の形を認識するのは困難である。そこで、先述した形の認識以外の色の認識や座標の認識の技術をVRに連動させて、「移動可能型VR」の開発を試みた。

開発した画像認識システムを活用することで、webカメラのデータのみからプレイヤー（体験者）の現在座標を求め、VR内のキャラクターに仮想空間内の座標を適用させることを試みた。それらを実現するための画像処理の手法として、背景差分法と特殊検出法を活用した。開発はゲーム開発エンジンの一つであるUnityで行った。なお、ライブラリ等は用いていない。

3. 2. 1 背景差分法

背景差分とは観測画像と事前に取得しておいた画像を比較することで、事前に取得した画像には存在しない物体を抽出する画像処理の方法である。この考え方をういてプログラムを作成した。

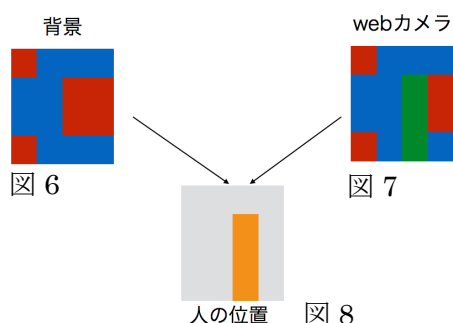
<方法>

1. 背景差分のプログラムを起動後、最初に背景を登録する。webカメラの画像に人を含む物体が写らないようにし、全ピクセルの色を記録し、これを基準の背景とする。なお、色の認識には、3.1.1で開発した画像認識システムを活用した。（図6）
2. その後、毎フレームで、登録した背景と現在の画像の、色が変わっているピクセルを見つける。この条件は、 $\langle R,G,B \rangle$ のいずれかの値において、背景と現在の映像と差が50以上ある値があれば、色が変わっていると判定する。（図7）
3. 画像内に写るものを人間に限定すれば、

背景と異なる色の集合は全て人間と判定できる。

4.2で「色が変わった」と判定されたピクセルの x 座標の平均を、人間の x 座標とする (図 8)。この座標の算出方法は、3.1.3の座標認識での手法と類似している。

この方法で人間の x 座標を求めることができる。今回は x 座標のみの算出を行ったが、カメラを2台用意すれば、人間の x 座標と z 座標を求めることができる。



<結果>

Unity で、web カメラの画像を参照し、各ピクセルの色を求め、画面上の全てのピクセル (フルピクセル) で処理すると、約 1 秒の処理時間を有してしまった。そのため、実際に使用し、処理時間の少なかった画素数を 64 分の 1 のみ調べるという方法をとった。しかし、結果として検出精度が低下してしまい、仮想空間内と現実空間での多くの誤差が発生し、うまく作動しなかった。よって Unity で背景差分の方法をとり、VR 映像を構成して体験させることはほとんど不可能であると判断した。

3. 2. 2 特徴点検出法

3.5.1 の背景差分法の問題点を解決するために、体に色のパターン (模様) の付いたマーカを取り付け、そのマーカ的位置を web カメラで見つけるという方法をと

った。この方法を特徴点検出法という。今回使用したマーカは上から赤、緑、赤の順に色分けされたもので体に巻きつけて使用する (図 10)。

<方法>

1. 画素数 $1/64$ で図 9 の矢印のように、左上から下に向かって順番にピクセルを調べ、色の認識を行う。
2. 赤、緑、赤の順に連続している列を検出する。なお、このパターン検出は、3.1.2 で検出した形の認識の手法を応用している。
3. 2 で検出した列の x 座標の平均を取ることによってマーカを中心の x 座標を認識する。

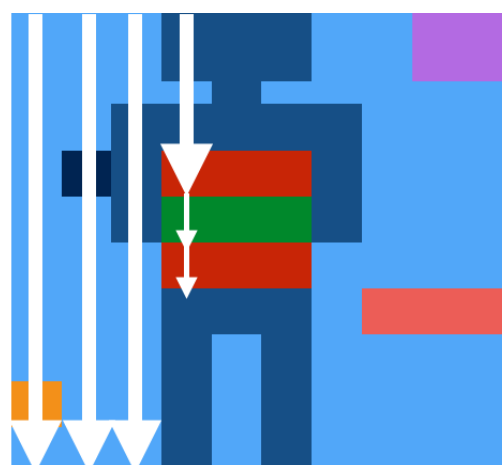


図 9



図 10

<結果>

この手法の処理時間は0.1秒以下となり、背景にマーカールと同じ色パターンがなければ必ず認識され、スムーズに処理されていた。ここで、求めた座標を、Unityのオンラインゲーム用サーバー「UNET」(図11)を経由してスマートフォンにデータを送ると、0.9秒のラグが生まれた。このラグの問題を解決するために、ほかの通信方法を使用する必要がある。

3. 3 UDP 通信

3. 3. 1 UDP 通信の導入

マーカールを装着する際の手間を無くすため、背景差分法をもう一度検討したが、Unityでの画像認識は負担が大きく、1280×720のピクセルの色を調べるという重い処理はUnityでは不可能であった。そこで、この問題を解決するために、処理の分担を行うことにした。

具体的には、画像処理に向いているprocessingで画像認識を行い、映像に写っている人間の座標を特定し、そのデータをUnityに送信してVR映像を構成するというものである。この方法をとるためには、processingとUnityの間で通信を行う必要がある。そこで、UDP(User Datagram Protocol)通信という方法をとることにした。UDP通信とは、リアルタイム性を求めた、IPプロトコルである。この方法を使うと、違うアプリケーション間で変数の共有を行うことができる。

3. 3. 2 UDP 通信の実装

次にコンピューターでこの背景差分プログラムを使って求めた座標をUDP通信を使ってスマートフォン上のUnityのアプリ

内に送信するシステムを開発した。(図11)

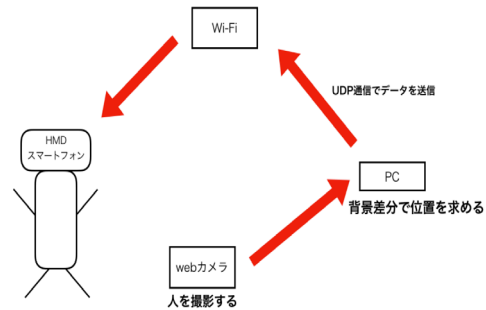


図 11

<方法>

1. スマートフォンとPCを同一のWi-Fiにつなぐ。
2. Processingを用いて背景差分法を行って求めた人の座標データを、UDP通信を使ってUnityに送信するシステムを作る。
3. Processing追加ライブラリ「udp」を使ってスマートフォンのローカルIPアドレスを指定してデータを送信する。
4. Unity上では、udp通信ライブラリを使用し、送られてきたデータをバーチャルワールドに適用してVR映像を流すようにする。

<結果>

この方法を用いると、作業をprocessingとUnityで分割することができた。結果として画像認識のパフォーマンスを確保したままVR映像を作成することができ、マーカール無しで人間の座標を測定できた。しかし、UDP通信を使うことでタイムラグを減少できたが、平均約0.2秒のタイムラグが発生した。

<考察>

プログラムを実行してわかった問題点は、以下である。

- 1.カメラを2台用意しないと人のx,z座標を求めることができない。
- 2.仮想空間内で移動可能な広さと同じ大きさの部屋を用意しなければならない。

問題点1の解決策として、足の裏の位置のy座標を求めることで、カメラと人の奥行きを距離を求めることができると考えられる。ラグの問題点として、UDP通信はデータの損失を確認しないことで速さを実現するというIPプロトコルだが、それでもVRで体験するには十分違和感が発生するタイムラグとなっている。よって、ネット回線または別の通信方法、ソフトの軽量化を考えなければならない。

4. 考察

Webカメラの画像のみから、<R,G,B>の値と、それらピクセルの配置からピンポン球を認識することに成功し、ピンポン球の奥行きを求められた。しかし、広角レンズでの横ズレを求めることができていない。

また、VRにおいて、UDP通信を使うことで、処理の分担と背景差分の開発に成功し、歩行可能VRを実現できたが、ラグがまだまだ問題となっている。

5. 今後の展望

ピンポン球の認識では、光の強さや当たり方によって反応精度が低下してしまうという問題点がある。この問題の解決のために、光の当たり方を踏まえたアルゴリズムを組む必要がある。今回使用したピンポン球は単色で、球のためどの方から見ても円

に見えると、単純な形をしている。そのため、もっと複雑な形状、色彩を持つ物体を識別するアルゴリズムも考えていきたい。横ズレの測定では、カメラによって物体の膨れ方の規則性を研究していく必要がある。

また、VRにおいての問題点であるラグの解決には、スマートフォンやPCのスペックや、Wi-Fiの通信状況など、問題点は考えられる。この部分について、今後も検討を重ねたい。

6. 参考文献

「Processing 画像処理」

<<http://opencv.blog.jp/processing/使い方>>

「Unity 画像処理」

<<http://www.urablog.xyz/entry/2017/07/06/225444>>

「UDP通信」

<<https://qiita.com/nenjiru/items/8fa8dfb27f55c0205651>>

「マイコン漬け」

<<http://morokyuu.way-nifty.com/blog/2014/12/processingudp-8.html>>

7. 謝辞

今回の研究を行うにあたり、顧問の藤野先生には多大なご指導を賜りました。また、同研究会の先輩方にも多くの助言をいただきました。この場を借りて、深く御礼申し上げます。

人が乗れるホバークラフトの製作

3年B組 岩井 陸
指導教員 藤野 智美

1. 要約

私はホバークラフトの仕組みに興味を持ち、研究を行っている。今回は、学園祭での実演に向けて自作したホバークラフトの作成方法と走行の様子について報告する。

キーワード ホバークラフト、ジョイント

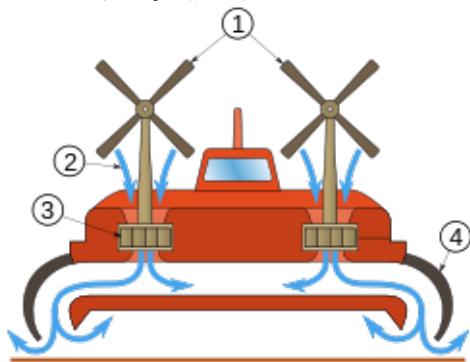
2. 研究の背景

学園祭で実演する内容を考えていた際、ホバークラフトが自作できることを知り、興味を持った。そこで、学園祭での使用に向けて実際にホバークラフトを作成するとともに、より良いホバークラフトの設計方法を考察したいと思い、研究を開始した。

3. 研究内容

3.1 ホバークラフトの構造

ホバークラフトは、機体上部から空気を吸い込んで圧縮し、下部の空洞に送り込むことで浮上する。(図1)



①推進用プロペラ ②取り込んだ空気
③吸気用エンジン ④スカート

図1 ホバークラフトの仕組み

そのため、実際に作成する場合、以下の仕組みを工夫して作成する必要があり、以下に示したような工夫を行なった。

(1) 外部から空気を吸い込む部分

空気を吸い込むエンジン部分を家庭用掃除機で代用した。

(2) 吸い込んだ空気をためる部分

衣装ケースを密封することで空気室を作成した。

(3) 空気を排気する部分

空気を細いホースで送ることで気圧を高め、機体各部に送風した。

3.2 作成方法1

以下に実際の作成方法を示す。

- ① 排気口及び吸い込み口に使用するため、衣装ケースにプラスチックチューブの太さ、掃除機の吸気口の大きさと同じ穴を開けた。次に、衣装ケースに掃除機を入れ、先ほど開けた穴から吸い込み口やコードを通し、穴の隙間はホットメルト接着剤等で塞いだ。
- ② 使用した掃除機が、延長管の手元ではなく本体の方に電源スイッチが付いている形であったため、密閉する際にスイッチを入れたままにしておき、ソケットの抜き差し

で電源の入切を切り替えることにした。

③ 次に、スカート部分を作成した。参考文献[1]では、スカートに自動車のタイヤチューブを使用していたが、今回は入手できなかったため、浮き輪を使用した。まず、浮き輪を8割ほど膨らませ、薄いベニヤ板を、一番長い対角線が浮き輪の直径とほぼ同じ八角形になるように切り、ガムテープで浮き輪に貼り付けた。

④ ベニヤ板の中心に穴を開け、ホースを繋ぐための接続部としてプラスチックチューブを取り付けた。これを3つ製作し、スカートとした。

⑤ 120cm×40cm と 90cm×40cm の角材の枠を T 字型に組み合わせ、土台を作った。

⑥ ドレンホースを適度な長さに切り、四つ又ジョイントを介して空気室やスカート部と繋ぎ、各スカートに空気を送れるようにした。

3.3 浮上実験1

作成方法1に従って作成した本体について、浮上するかどうかの実験を行なった。すると浮上はしたものの、以下の課題点が発生した。

- ・ モーターの性能不足による掃除機本体からの発熱と騒音の発生
- ・ 吸引力不足
- ・ 空気室からの空気漏れ
- ・ 土台の強度の不足

モーターの性能の不足や吸引力の課題を解決するために、吸引力の高い別の掃除機（HITATI CV-PC8-N 日立紙パック式クリーナー（パワーブラシ））を使用することとした。

3.3 作成方法2

上記の課題点を解決すべく、以下の改善点を加えた。

(1)モーターの性能・吸引力の不足への対策
前述したように、別の掃除機を使用することで機能の向上を目指した。

(2) 空気室からの空気漏れの対策

新しい衣装ケースに吸気及び排気用の穴を開け、掃除機を衣装ケースに入れ、穴から吸気ノズルやコードを出して隙間をホットメルト接着剤で埋める手法は変更しなかった。一方、衣装ケースの密閉方法については、作成方法1の①の手法では、蓋部分の隙間からの空気漏れを十分に防ぐことができなかった。そこで、蓋の使用をやめ、図2のように衣装ケースのふちと木の板の間にゴムシートを挟み、ネジで止めることで空気室を密閉することを試みた。プラスチックへのネジ止めとなるため、以下の手順でねじ止めを行なった。

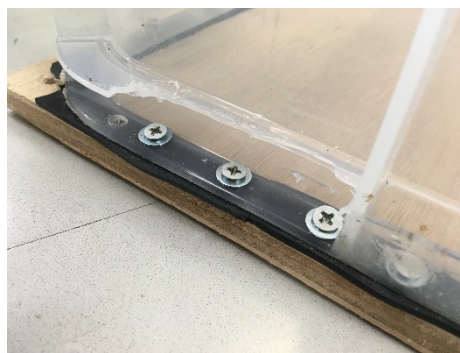


図2 空気室の密閉方法

以下に、密閉方法の詳細を示す。

- ① 衣装ケースのふちが図2のように二重構造になっていたため、底面側のふちを電動ドリルで削る。
- ② 残っている方のふちに電動ドリルでネジ穴を開ける。
- ③ ネジ穴にネジとワッシャーを設置し、ドライバーを用いて手でネジを倒れない

程度に固定する。

③ 電動ドライバーをゆっくり回転させ、ネジを最後まで回す。力を入れすぎるとプラスチックが割れてしまうため、注意が必要である。

この手法を用いたところ、空気漏れがほとんどなくなったため、空気を十分密閉できていると考える。

(3)土台の不安定さの解消

作成方法 1 の⑤のように、角材を組み合わせただけの土台では強度の不足が心配されたため、厚みがあり、かつ軽量である合板を組み合わせた図 3 のような土台を作成した。

(4)その他の工夫

・ホースは改良前、全体が均一な太さで大量の空気を送るには効率が悪かったため、特に空気の量が多い空気室から四つ又ジョイントまでの間に、最初に使用した掃除機のホースを使用した。また、図 4 のように、ジョイント部分とビニールテープ部分を固定した。

・スカートには特に問題は発生しなかったため、先ほど製作したものをそのまま流用し、新しい土台にガムテープで貼り合わせて固定した。

・土台とスカート、空気室をホースでつなぎ、ホットメルト接着剤やビニールテープを多重に巻きつけることで空気漏れを防ぎつつ固定した。

これらの改善点を加えた上で、再び浮かかどうかの実験を行なったところ、大人が一人乗っても稼働に十分な程度の浮上が確認できた。

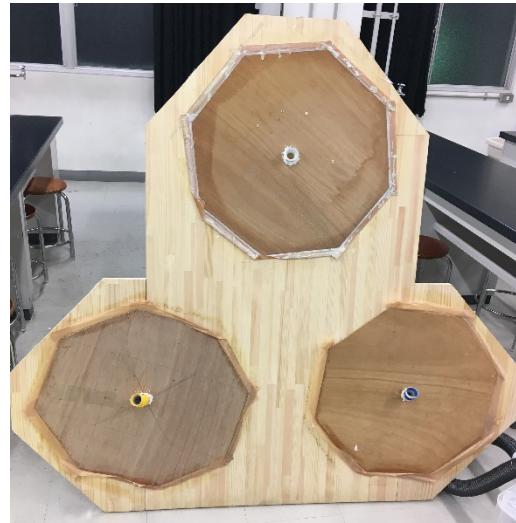


図3 木の板を組み合わせた土台



図4 ホースのジョイント部分

3.4 稼働方法

今回は推進機構を取り付けていないため、移動の際は後ろから人が手で押す形にした。

作ったホバークラフトは、学園祭の出し物として活用した。このホバークラフトは学園祭の期間中、人を乗せて約 5.5m の間を 1000 往復以上することができた。なお、浮き輪の空気漏れが否めなかったため、空気入れを用意して定期的なメンテナンスを行った。次回以降の改善点として、手すりなど、乗車する際に捕まる部分を取り付けると安定性が増すと感じた。図 5 に乗車時の様子を示す。



図5 乗車時の様子

4. 反省点と今後の改良点

前述の通り、今回作成したホバークラフトは学園祭の出し物として活用したが、運用しているうちに三つのスカートのうち一つがパンク、もう一つが土台の板から外れてしまった。

浮き輪の土台からの脱落は、土台と浮き輪の接着をガムテープではなくより強力な接着剤で固定すれば良かったと思う。また、浮き輪のパンクについては参考文献にもあるように、スカートをタイヤチューブにすれば丈夫でパンクしにくくなったのではないかと考える。

5. 今後の展望

作成したホバークラフトを用いて、作用・反作用の法則や、運動量の保存の法則について確認したいと考えている。

6. 参考文献

[1] 人が乗れるホバークラフト つくってびっくり、これはかんたん！

<http://yoiidea.my.coocan.jp/hover/hover.htm>

[2] 搭乗型ホバークラフトの製作

http://www.asahi-net.or.jp/~qc8k-stu/rika/hob/s_hob.htm

[3] あぶない科学実験

川口友万 彩図社

[4] ホバークラフト-Wikipedia

<https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%9B%E3%83%90%E3%83%BC%E3%82%AF%E3%83%A9%E3%83%95%E3%83%88>

7. 謝辞

今回の研究を行うにあたり、顧問の藤野先生をはじめ、多くの先生方、「Re:ゼロから始めるバーチャルリアリティ」のみなさんに多大なご指導、ご協力をいただきました。この場を借りて深く御礼申し上げます。

気体分子の運動に関するシミュレーション

4年A組 川本 稜生

指導教員 守本 寛治

1. 要約

私は非ニュートン流体の挙動をシミュレートすることを目標として研究を行っている。今回はその初期段階として、三次元空間での気体分子の運動を可視化するシミュレーターを作成した。また、開発環境として Processing を用いた。

キーワード 気体分子 シミュレーション 三次元空間 Processing

2. 研究の背景と目的

前述の通り、この研究は将来的に非ニュートン流体のシミュレーションを行うことを目標としている。そこで、今回の研究では比較的簡易でコンピューターへの負荷が少ない気体分子のシミュレーションを通して、より効率的で高速な演算を可能にするシミュレーション手法の獲得を目指した。

3. 研究内容

3.1 2Dでのシミュレーション

三次元空間でのシミュレーションに先駆けて、平面でのシミュレーションを行った。

二体の気体分子の衝突前の速度から衝突後の速度を求める方法を以下に示す。なお、力積を I 、気体分子の質量を m 、衝突前の速度を v 、衝突後の速度を v' 、反発係数を e と表し、1と2の添字でそれぞれの分子を表すものとする。

運動量の変化は力積に等しく、それぞれの分子には大きさが同じで逆方向の力積が作用するため、次のような式が立てられる。

$$I = m_1(v_1' - v_1) \cdots \textcircled{1}$$

$$-I = m_2(v_2' - v_2) \cdots \textcircled{2}$$

さらに、反発係数と衝突前後の速度の関係式は、

$$e = -\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} \cdots \textcircled{3}$$

となる。

①、②、③から、以下の式が得られる。

$$I = -\frac{(v_1 - v_2)(e + 1)}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}$$

$$v_1' = v_1 + \frac{I}{m_1}$$

$$v_2' = v_2 - \frac{I}{m_2}$$

各粒子の初期位置、初期速度は乱数で決定するものとし、上記の式に基づいてシミュレーションを行った。

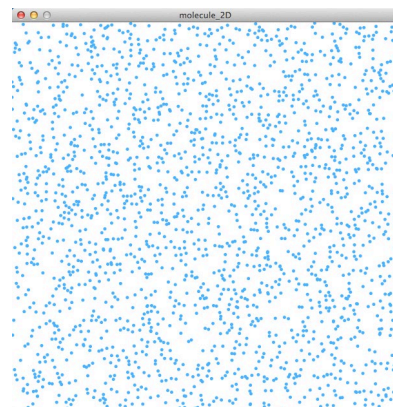


図1 2Dでのシミュレーションの様子 (分子数 2000)

また、反発係数の値を変化させて力学的エネルギー保存則が成り立つことを確認した。



図2 総エネルギー量のグラフ
横軸が時間、縦軸が総エネルギー量を表す。
上が $e=0.99$ 、下が $e=1.00$ のもの。

3.2 3Dでのシミュレーション

平面でのシミュレーションを元にして、三次元空間上でシミュレーションを行った。

今回は平面から三次元空間への移行を円滑に進めるため、ベクトルの演算を行えるようなプログラムを組んだ。平面の場合と同一の演算で処理することが可能なので、より簡潔に記述することができる。

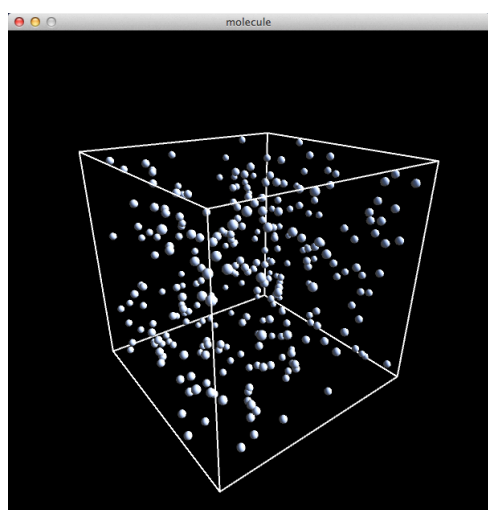


図3 3Dでのシミュレーションの様子
(分子数 300)

4. 今後の課題

今回作成したシミュレーターに温度や圧力等のパラメーターを追加して、より現実の挙動に近づけていきたいと考えている。

また、反発係数が極端に低いと図4のように分子同士が集まって隅に固まるという現象が見られたので、これが自然界でも実際に起こるのかどうかについて考えていきたい。

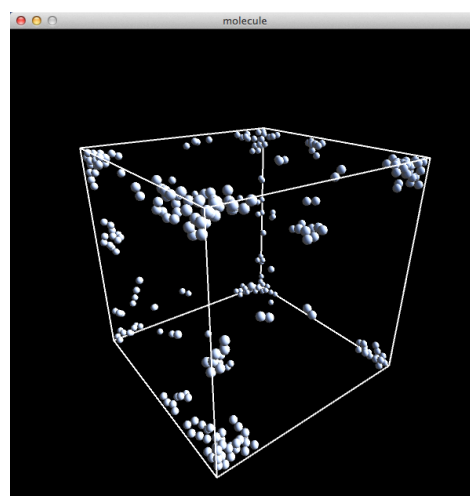


図4 反発係数が極端に低い場合

5. 参考文献

- [1]Processing リファレンス
<https://processing.org/reference/>
- [2]Processing による 3D プログラミング
<http://yoppa.org/proga10/1301.html>
- [3]「ゲーム開発のための物理シミュレーション入門」, オーム社

6. 謝辞

今回の研究を行うにあたり、顧問の守本先生にご指導いただきました。ありがとうございました。

火に強い石膏ボードについて

6年A組 清家 悠大

指導教諭 藤野 智美

1. 要約

私はより良い家づくりを目指して、石膏ボードに関して調べた特徴について実験した。今回は建材として用いられている石膏ボードに熱が加えられた時、その材質の変化から、温度上昇が抑えられるという情報に対して、実験を考案し、その性質の検証を行った。

キーワード 石膏ボード、水和物、気化熱

2. 研究の背景と目的

私は家とは本来、そこに住む人達の命や生活、財産を守るためのものであると考えている。火災はそんな家が守っているものが失われる重大な災害である。そして、家で火災が発生してしまった時、家の材質によって熱の伝わり方、燃焼の仕方に大きな違いがあるということを知り、マテリアル工学の観点からより良い建築を目指せるのではないかと考えた。本研究では火災に対して強いと言われている石膏ボードについて調査したので報告する。

<石膏ボードの火災に対しての特徴>

- 石膏ボードの芯材は無機質の石膏であるため、燃えることはない。石膏には、約20%の結晶水が安定した形で含まれており、石膏ボード1枚に、3kgの水を含んでいる計算となる。

- 火災時に石膏ボードが高温にさらされるとこの結晶水が熱分解し、水蒸気となって徐々に放出され、温度の上昇を遅らせる働きを行う。加えて、石膏そのものが伝熱を防止するバリアの役割を果たす。石膏ボードは、こうした石膏の特性によって、防火

材料に認められており、壁の防・耐火構造の材料として、あるいは柱や梁の耐火被覆材として多用され、火災の延焼防止に効果を発揮している。

- 大きさ 910mm×1,820mm×12.5mm の石膏ボードには、結晶水が約 3kg 含まれている。「石膏」は 2 分子の結晶水をもつ硫酸カルシウムで、通常「二水石膏」と言う。
- 「二水石膏」は 120℃～150℃に加熱すると「焼石膏」になる。「焼石膏」に水を加えると水和反応を起こし、再び元の「二水石膏」に戻って固まる。この性質を利用し、2枚の厚紙（原紙）の間に水で練った「焼石膏」を流し込み、板状に固化させて、石膏ボードは作られている。

3. 研究内容

3.1 熱伝導率の比較

○目的

文献上の石膏ボードは火災に対して強い材質であるという情報を実験的に確認する。

○仮説

石膏ボードは、結晶水の気化熱によりエネルギーを消費することから、内部に伝わ

る熱の量を減らすことができるのではないかと考える。また、内部の温度は一定の温度まで上がると、一時的に温度上昇が止まり、しばらくすると、多くの結晶水が蒸発するので再び温度上昇が始まるのではないかと考える。

○実験方法

今回の研究は建材としての石膏ボードの特徴を探ることである。そこで、クッキーの型から作った家の外壁に見立てた金属製の箱の中に、内壁に見立てた板として石膏ボードを並べる。対照実験として、昔から建材として使われてきた木材で同様の内壁を作り、ガスバーナーで熱し、時間別の温度変化を記録する(図1、図2参照)。

○実験結果

・グラフ④から石膏ボードと木材では内部の温度上昇の仕方に大きな違いがあり、石膏ボードは60℃程で温度上昇が止まっている。

・図③から燃焼後のそれぞれの様子を見ても木材が炭化しているのに対し、石膏ボードの見た目に大きな変化はない。

○考察

石膏ボードは木材に比べて部屋の内部に熱を伝えにくい部材であると考えられる。

3. 2 脱水反応の検証

○目的

石膏ボードの主成分である硫酸カルシウムが石膏ボードの温度上昇を抑える要因であることを確かめる。

○仮説

両方の物質から加熱により水分が検出され、文献の情報通り、石膏ボードの温度変化の要因として硫酸カルシウムの脱水反応

が考えられる。

○実験方法

試験管に砕いた石膏ボードを入れて加熱し、試験管の中の様子について観察する。また、硫酸カルシウム二水和物の単体も同じように加熱して、それぞれの様子の変化を確認する。(図④参照)

○実験結果

・図6から二つとも同じように試験管の口の辺りに水滴が溜まっていて、二つの物質ともに加熱によって水蒸気が発生することが分かった。(図⑤参照)

○考察

石膏ボードが温度上昇を抑えるのは硫酸カルシウム二水和物の脱水反応により、結晶水の気化熱が生まれることで内部に伝わるエネルギーが減ることが原因であることが分かった。

4. 考察・今後の展望

・石膏ボードは加熱により硫酸カルシウムに水和物から二分の一水和物になる過程で結晶水が蒸発するのに熱が消費されるため、温度上昇を抑えることができる素晴らしい建材であることが分かった。

・優れた耐火性能に加えて価格の安さ、遮音性、施工性などから石膏ボードは非常に優れた建材であることが分かった。

・石膏ボードの施工面積と火災による燃焼面積には関係性があり、施工面積が増えるに従って、燃焼面積が減っていることが分かる。(グラフ⑧参照)

・今回の研究では見た目からの判断が多かったので、定量的な分析を行うことで石膏ボードの新しい可能性を見出したい。

5. 参考文献

①一般社団法人 石膏ボード工業会

「石膏ボードについて」

<http://www.gypsumboard->

[a.or.jp/about/feature.html](http://www.gypsumboard-a.or.jp/about/feature.html)

②床面積 1m²当たりの石膏ボードと焼損面積

<http://www.gypsumboard->

[a.or.jp/pdf/burnout_h28.pdf](http://www.gypsumboard-a.or.jp/pdf/burnout_h28.pdf)

6. 謝辞

SS 課題研究の活動の活動において、指導して下さった藤野先生をはじめ、多くの方々から多大なご指導、助言を賜りました。この場を借りて深く御礼申し上げます。

7. 実験の様子

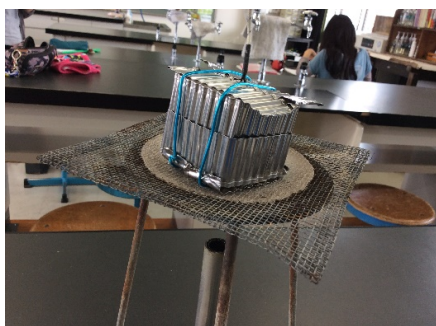
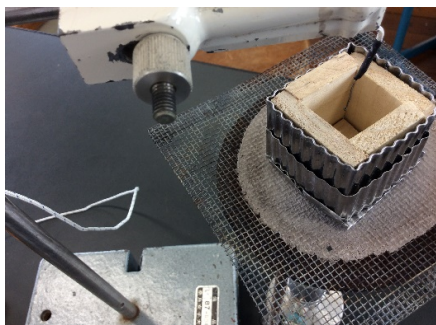


図1 実験 3.1 の様子

図2 実験 3.1 の結果



図3 実験 3.2 の様子

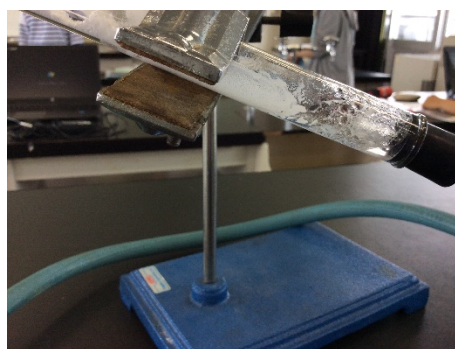
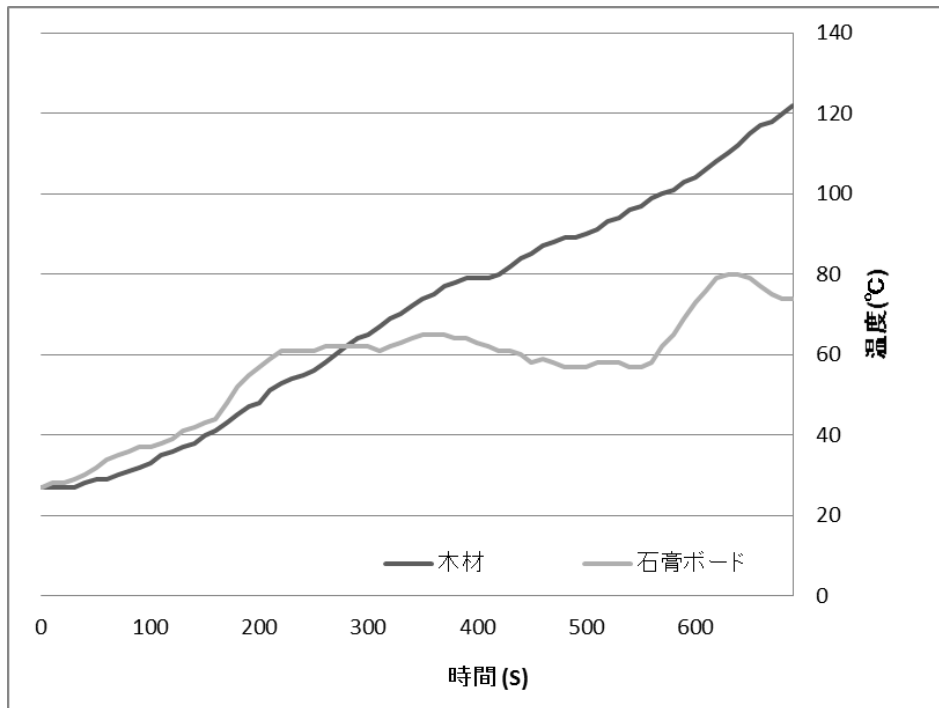
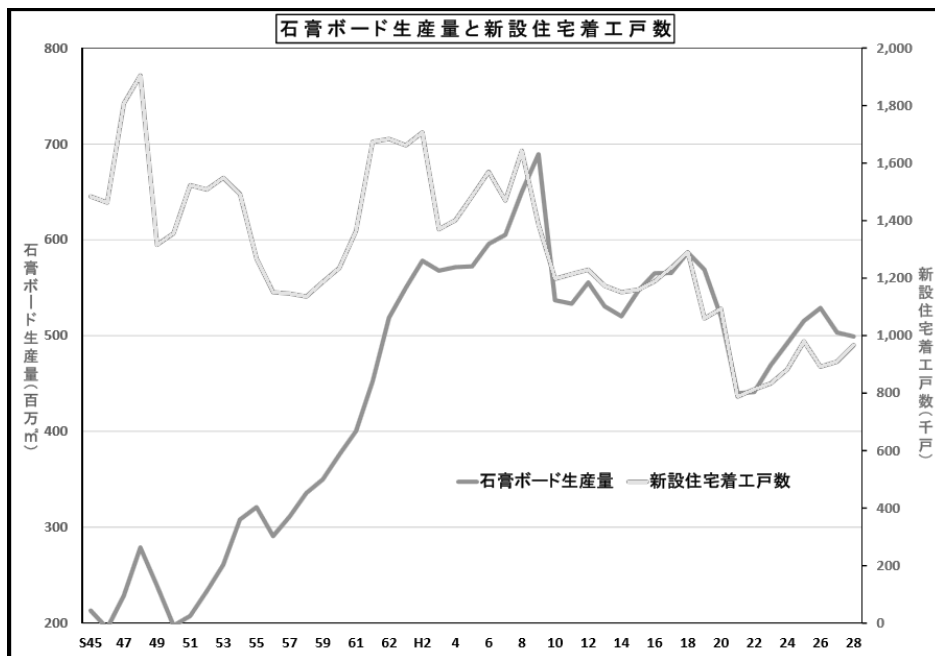


図4 実験 3.2 の結果





グラフ① 実験 3.1 の結果



グラフ② 考察 (参考サイトから引用)

糖類の判別実験

3年B組 加藤 優弥
指導教員 松浦 紀之

1. 要約

糖類は食品中にも含まれる有機化合物で、多くの種類が存在する。そこで化学的な性質の違いを利用して、7種類の糖類の判別実験を行った。ヨウ素デンプン反応、フェーリング反応、バーフォード反応、セリワノフ反応による判別実験の結果、フルクトース、スクロース、デンプンは判別することができたが、フルクトースとアラビノース、マルトースとラクトースは、それぞれを判別することができなかった。

キーワード 糖類 ヨウ素デンプン反応 フェーリング反応 バーフォード反応 セリワノフ反応

2. はじめに

植物の光合成では、葉緑体が二酸化炭素と水から日光を利用することで、グルコース $C_6H_{12}O_6$ と酸素 O_2 を生成している。グルコースが数多く結合するとデンプンとよばれる高分子化合物ができ、種子の中に蓄えられる。このように、グルコースやデンプンは生物が生命活動を行う上で必要不可欠な存在である。グルコースやデンプンは糖類とよばれる有機化合物で、他にも数多くの種類が存在する。

これらの糖類は種類により化学的な性質が異なるのではないかと考え、性質の違いを利用した糖類の判別実験を行った。

3. 実験

3.1 試薬

7種類の糖(グルコース、フルクトース、アラビノース、スクロース、マルトース、ラクトース、デンプン)の1%水溶液を調製した。実験で用いた薬品類は市販のもの

をそのまま使用した。

3.2 検出試薬の調製^{1,2)}

(a) ヨウ素ヨウ化カリウム溶液

ヨウ化カリウム 2.0 g を 100 mL の水にとかし、これにヨウ素 1.0 g を溶かした。

(b) フェーリング液

(A液)硫酸銅(II)五水和物 7.0 g を純水に溶かして 100 mL にした。(B液)酒石酸ナトリウムカリウム 35.0 g と水酸化ナトリウム 10 g を水に溶かして 100 mL にした。使用する直前にA液とB液を同体積ずつ混合した。

(c) バーフォード試薬

酢酸銅(II)一水和物 6.7 g を純水 100 mL に溶かし、酢酸 0.90 mL を加えた。

(d) セリワノフ試薬

レゾルシノール 0.10 g を 4.0 mol/L 塩酸 200 mL に溶かした。

3.3 操作^{1,2)}

(a) ヨウ素デンプン反応

糖の水溶液を 2.0 mL ずつ別々の試験管に

はかりとり、1%デンプン溶液をそれぞれ 3 滴加えた。

(b) フェーリング反応

糖の水溶液を 2.0 mL ずつ別々の試験管にはかりとり、フェーリング液をそれぞれ 1.0 mL 加え、60°Cの水浴で 5 分間加熱した。

(c) バーフォード反応

糖の水溶液を 2.0 mL ずつ別々の試験管にはかりとり、バーフォード試薬をそれぞれ 3.0 mL 加え、沸騰水浴で 5 分間加熱した(図 1 左)。

(d) セリワノフ反応

糖の水溶液を 2.0 mL ずつ別々の試験管にはかりとり、セリワノフ試薬をそれぞれ 3.0 mL 加え、沸騰水浴で 3 分間加熱した(図 1 右)。

4. 結果と考察

実験で用いた 7 種類の糖類のうち、単糖類(グルコース、フルクトース、アラビノース)および二糖類(スクロース、マルトース、ラクトース)は水によく溶けた(図 2)。一方、多糖類のデンプンは冷水に溶けにくく、沸騰水には溶けた。

実験(a)~(d)の結果を表 1 に示す。実験(a)では、デンプンの構造中にヨウ素分子が入り込むことで、デンプンのみ溶液が青紫色に呈色した(図 3(a))。

実験(b)は、還元性のある糖(還元糖)であるかを確かめることができる。実験の結果、スクロースとデンプン以外で赤褐色の沈殿(酸化銅(I) Cu_2O)が生じた(図 3(b))。これらの糖には、還元性を示す構造(アルデヒド基 $-\text{CHO}$ やヒドロキシケトン基 $-\text{COCH}_2\text{OH}$)を含まれている(図 4)。同じく還元糖であるかを確かめることができる

実験(c)の結果は、単糖類のみ(グルコース、フルクトース、アラビノース)が反応し、いずれも少量の赤色沈殿 Cu_2O を生じた(図 3(c))。この反応は、 Cu^{2+} と糖の反応の起こりにくさに関係しており、反応しやすい単糖類だけが反応したものと考えられる。

実験(d)は、分子中にケトン基 $>\text{C}=\text{O}$ を持つ糖(ケトース)を検出することができる。実験の結果、フルクトースは赤褐色に、スクロースは赤色の溶液に変化した(図 3(d))。二糖類のスクロースにはケトン基が含まれないが、セリワノフ試薬中の塩酸によりスクロースが加水分解され、単糖類のグルコースとフルクトース(フルクトースはケトン基を含む)になったため、セリワノフ反応が起こったと考えた。

以上の結果より、フルクトース、スクロース、デンプンは判別することができた。しかし、フルクトースとアラビノース、マルトースとラクトースは判別することができなかった。

5. まとめ

糖類の化学的な性質や構造の違いを利用することで、実験で用いた 7 種類の糖類のうち、3 種類を判別することができた。判別できなかったグルコースとアラビノース、およびマルトースとラクトースについては、これらの糖とフェニルヒドラジンとの反応(糖のカルボニル基とフェニルヒドラジンとの縮合反応)により生じるオサゾンの黄色結晶の形状から、糖の同定ができる方法が知られている³⁾。実際に実験を行ったが、結晶を作ることができず、判別することができなかった。条件を検討して、再度、実験を行いたい。

フェーリング液の還元反応では、硫酸銅(II)水溶液に水酸化ナトリウムを加えることで、溶液をアルカリ性にして実験を行っている。しかし、実験(c)のバーフォード反応では酢酸銅(II)水溶液に酢酸を加え、酸性の条件で操作を行う。そこで、硫酸銅(II)や酢酸銅、塩化銅などといった様々な銅塩の種類の違いや、また溶液のpHの違いによって反応性が変わるのではと

考えこれらの比較の研究を現在行っているところである。

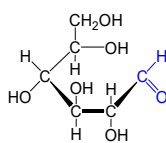
6. 参考文献

- 1) 藤田修三, 山田和彦, 食品学実験書第2版, 医歯薬出版, 2002.
- 2) 小野寿久, 化学と教育, 55, 2007, 170-171.
- 3) D. T. Plummer, 実験で学ぶ生化学, 化学同人, 1981.

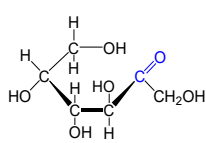
表 1. 実験(a)~(d)の結果

(×: 反応しなかった)

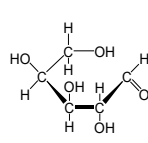
糖 類	種 類	(a) ヨウ素デンプン反応	(b) フェーリング反応	(c) バーフォード反応	(d) セリワノフ反応
グルコース	単糖類	×	赤褐色沈殿	赤色沈殿	×
フルクトース		×	赤褐色沈殿	赤色沈殿	赤褐色溶液
アラビノース		×	赤褐色沈殿	赤色沈殿	×
スクロース	二糖類	×	×	赤色溶液	×
マルトース		×	赤褐色沈殿	×	×
ラクトース		×	赤褐色沈殿	×	×
デンプン	多糖類	青紫色溶液	×	×	×



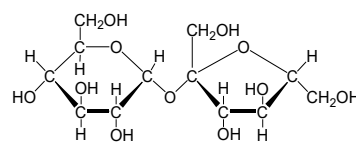
グルコース



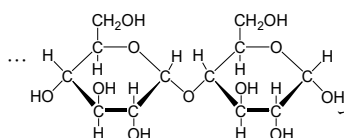
フルクトース



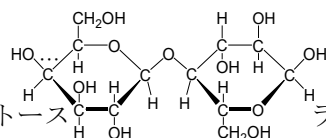
アラビノース



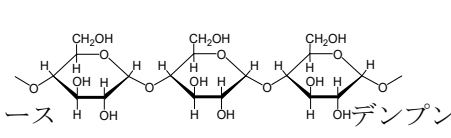
スクロース



マルトース



ラクトース



デンプン

図1. 実験で使用した糖（単糖類は鎖状構造で表している）

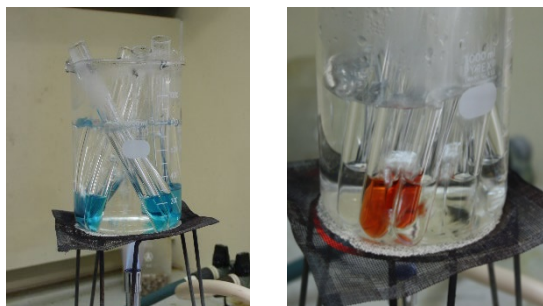
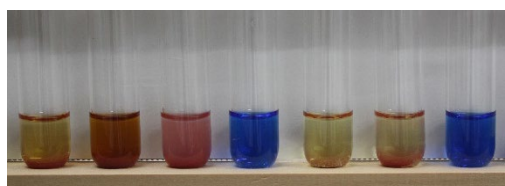


図2. バーフォード反応(左), セリワノフ反応(右)の実験の様子

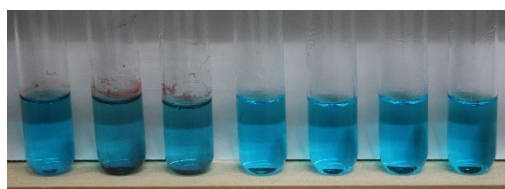
(a) ヨウ素デンプン反応



(b) フェーリング反応



(c) バーフォード反応



(d) セリワノフ反応

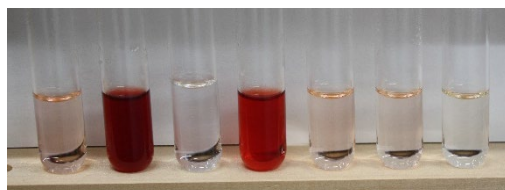


図3. 実験(a)~(d)の結果。左からグルコース, フルクトース, アラビノース, スクロース, マルトース, ラクトース, デンプン

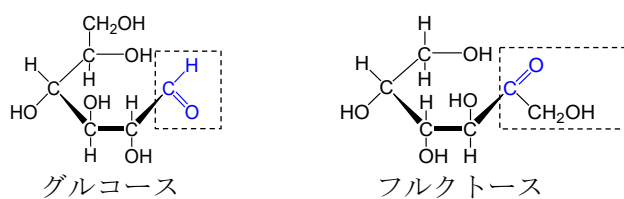


図4. Cu^{2+} と糖の酸化還元で反応する部分（枠内が反応する）

微生物太陽電池の開発に向けて

2年A組 井関 天羅

指導教諭 櫻井 昭

1. 要約

私は土壤に棲む微生物を利用した発電について研究している。今回は予備実験として土壤に電極をさした場合電流が流れるかを測定し、更に土壤の種類によって結果が変化するかを確認した。

キーワード 水素(H) \rightarrow H⁺+ e⁻, 微生物

2. 研究の背景と目的

土壤中に生息する微生物は、土壤中の有機物を分解することによりエネルギーを得ている。これらの微生物の中には、有機物を分解してエネルギーを得る際に電子を放出させるものもある。そのため陰極を土壤中に、陽極をその上の水中に沈めることで、両極間で電気が流れ発電させることができる。そこで本研究では、この現象を用い、どのような条件で電流が多く流れるのか、条件を変えて実験することにした。また本研究で発生する電気は、デジタルテスター(PM3)を用いて電圧を測ることで確認した。

3. 研究内容

3.1.1 実験仮説

容器に水と土壤を入れ、土中と水中それぞれに電極を設置すると、電圧が測定できる。

3.1.2 実験方法

3.1.2.1 材料

実験には、透明な瓶(直径8~10cm、高さ10cm)を利用した。これは、実験中に内部を観察できるようにしたかったためである。

電極には、陽極、陰極ともに直径5mm、長さ7cmの炭素棒を使い、抵抗には10Ωのものを用いた。

土壤は、本校の中庭花壇のものを採取した。

3.1.2.2 方法

まず、装置を組み立て、次に瓶に土を入れ陰極をセットしてから水をいれて陽極をセットした(図1)。その後、経過観察を行った。測定は、放課後の16時頃に行った。花壇②、腐葉土、花壇③は夏休み中の実験であったため測定時間はまちまちである。

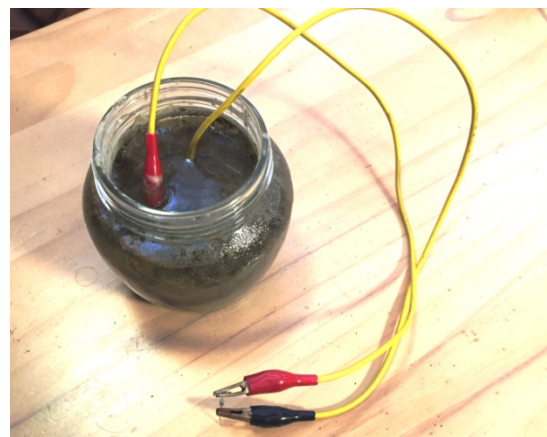


図1 実験装置

3.1.3 結果と考察

実験結果は、次の表のようになった。

	花壇①	土壌無
1日目	0.0mV	0.1mV
2日目	1.8mV	0.0mV
3日目	1.8mV	0.0mV
4日目	1.3mV	
5日目	0.6mV	
6日目	0.3mV	0.0mV
7日目		0.0mV
8日目		
9日目	2.5mV	0.0mV
10日目	0.6mV	0.0mV
11日目		
12日目	1.2mV	
13日目	1.7mV	

土壌がないと(水だけでは)発電しなかった。また花壇①の結果のうち、9日目に2.5mVという結果は、測定のしかたによる失敗だと考えられる。また、花壇②で陽極が土壌に接していても発電に影響を与えないことを確認した。

微生物が有機物を分解することで電子を放出し発電するため、栄養分が多い土壌ではより発電するのではないかと考え、市販の腐葉土を用いて実験を行った。

3.2.1 実験仮説

有機物が多い土壌ほど微生物が多く、電子が多く放出されるので測定される電圧は大きくなる。

3.2.2 実験方法

実験装置と測定方法は、3.1.2と同じ方法で行った。

有機物が多い土壌として、市販の腐葉土2種類と池近くの土壌を用意した。そして電圧の数値比較のため、花壇の土壌を用意して実験を行った。

3.2.3 結果と考察

実験結果は、次の表のようになった。

	花壇②	腐葉土	花壇③	池近くの土	花壇④	花壇⑤	家・腐葉土
1日目	0.0mV	0.5mV	0.0mV	0.0mV	0.0mV	0.0mV	0.2mV
2日目	0.4mV	0.6mV	0.3mV	0.7mV	0.5mV	0.9mV	0.5mV
3日目	0.9mV	0.3mV	1.0mV	0.6mV	0.5mV	0.0mV	0.3mV
4日目	0.7mV					0.0mV	0.6mV
5日目						0.9mV	0.3mV
6日目	0.9mV					0.2mV	0.4mV
7日目				1.1mV	0.8mV	0.3mV	0.1mV
8日目						0.2mV	0.5mV
9日目				0.9mV	0.9mV	0.3mV	0.2mV
10日目						0.2mV	0.3mV
11日目						0.2mV	0.3mV
12日目						0.2mV	0.5mV
13日目				0.9mV	0.9mV	0.3mV	0.2mV
14日目						0.2mV	0.3mV
15日目						0.2mV	0.3mV
16日目						0.2mV	0.3mV
17日目						0.1mV	0.4mV
18日目						0.2mV	0.3mV
19日目						0.1mV	0.3mV

1回目(学校にて、腐葉土と花壇③のデータ)

腐葉土の特性として土を柔らかく保ち、排水性が高いということが挙げられるが、それらの特性より腐葉土が浮いてしまい、陰極を土壌中に、陽極を水中にと隔てることが不可能であったため、結果の信用性は低い。

2回目(学校にて、池近くの土と花壇④のデータ)

観察用池の近くには土壌の方の電圧が大きかった。観察用池近くの土壌には無花果などの樹木があるため、栄養分は比較的高いのではないかと考えられる。

3回目(自宅にて、花壇⑤と家・腐葉土のデータ)

前回の実験より腐葉土の特性がわかって

いたため、浮遊物を取り除く作業を数回行い、底に溜まった沈殿物を用い実験を行った。基本、夕方に測定したがあるよく晴れた日の昼(13:30)と日が沈んだ夜(21:00)にそれぞれ測定したところ、

13:30 花壇⑤:0.3mV, 家・腐葉土:0.5mV

21:00 花壇⑤:0.2mV, 家・腐葉土:0.2mV

という結果になった。このことから、発電が外部環境のうち、温度か光の強さに影響を受けているのではないかと考えられる。

また、腐葉土の作業後の沈殿物と元の腐葉土の栄養分を比較してから言えることだが栄養分が多いと考えられる腐葉土の発電が花壇の土より多かった。

4. 結論

結果から、腐葉土などの比較的有機物が多いだろうと考えられる土壌にすることで、花壇の土壌より電圧があがった。しかし、それが土壌中の有機物によるものかはわからない。

5. 今後の課題

今回の結果より発電に影響すると考えられるものは、土壌の栄養分、外部環境の気温、日光の強さといったものだった。これらについて、今後の実験を通してどのような条件が一番望ましいのかを解明したい。また、土壌の栄養分については具体的にどのようなものが発電に影響を与えているか、調べるとともに、計測のミスを減らすように勤めていきたい。今後の展望として、現段階では発電量が少なく、安定した電力の供給が可能ではないため、将来の実用化に向け、有機物の投与など発電効率を向上させ、長時間発電可能にするための研究を行

っていきたい。

6. 参考文献

水田土壌の微生物を用いた発電の研究 山形県立鶴岡南高等学校 科学生物班
www.kk-tohoku.or.jp

田んぼ発電 微生物のエネルギーを利用せよ <https://www.nippon.com>

橋本光エネルギー変換システムプロジェクト

科学技術振興機構 <https://www.jst.go.jp>

7. 謝辞

最後に研究にあたって必要な知識を教えてくださいました顧問の櫻井先生、また研究についてさまざまな指導をしてくださいました先生方に深く感謝申し上げます。

粘菌はがん細胞を認識するのか

5年C組 松本 純子

指導教員 櫻井 昭

1. 要約

粘菌は、エサとなる物質に正の走性を、光などの忌避物質には負の走性を示すことが知られている。私は、粘菌のこの走性を病気の早期発見に利用できないかと考え、まずは粘菌ががん細胞に対して向かっていくのかどうかを植物の未分化細胞のカルスを利用し調べた。その結果、粘菌は、カルスを認識し好むと思われた。今後は、粘菌がカルスの何の成分に反応するのか、より詳しく分析し、どのような走性なのか調べたい。また、動物の未分化細胞だとどうなるのかと疑問に思い、ヒアラ細胞で再度実験を行うことも計画している。

キーワード 変形体、イタモジホコリ、がん細胞、クエン酸、カルス、化学走性

2. 研究背景

粘菌とは、アメーボゾア門コノーサ綱変形菌亜綱に属する単細胞生物で、真性粘菌と細胞性粘菌の2種類がある。一般的に暗くてじめじめしたところを好み、森や藪、花壇などに生息している。そして、環境に合わせて、孢子、細胞、変形体、子実体と様々な形態になる(図1)。

変形体時の粘菌は、自由自在にからだ(粘菌コロニー)を伸ばしたり、縮めたりできる。また好き嫌いがあり、オートミールなどの好物には近づき、光などの嫌いなものからは遠ざかる。これは、前者は正の走性、後者は負の走性を示しているのだと言われている。走性とはある特定の物質に寄っていったり(正の走性)、避けたりまたは遠ざかったり(負の走性)する性質のことである。オートミール(図3)とは、別名えん麦とも言い、シリアルなどに入っている穀物であり、粘菌のエサになる。

粘菌は、正の走性を示す物質には「最短ルートで向かっていく」という大きな特徴がある。

さらに、粘菌にはタマゴルリホコリやシロウツボホコリなどの様々な種類がある。本研究で使用したのは、真性粘菌イタモジホコリ(学名 *Physarum rigidum*)の変形体である(図2)。

今日行われているがん研究では、ヒアラ細胞というヒトのがん細胞が使用されている。しかし、この細胞は中等教育学校や高等学校で扱うことは困難である。そのため、本研究では、がん細胞と同じく分裂を続ける能力を持ったカルス(植物組織由来の未分化細胞塊)を使用し、粘菌の走性を示すかどうか調べることにした。

3. 研究内容

3.1 研究の目的

3年前から粘菌の研究を続けてきた私は、

粘菌を有効利用する方法に興味を持ち、粘菌をヒトの健康に役立つことに使えないかと思っていた。そして、文献検索をする中で、線虫が嗅覚を利用しヒトの尿からがんの有無を判別できるという研究を見つけ、粘菌も何らかの方法でがんを発見することができないだろうかと考えた。先述したように、粘菌は様々な物質に対して走性を示す。この粘菌の走性をがんの早期発見に利用できないかと思い、まずは粘菌はがん細胞に向かっていくのかを、イタモジホコリの変形体とオートミール、粘菌が嫌うとされる有機酸の一種であるクエン酸、カルスを使って調べることにした。

以下、「イタモジホコリの変形体」を「粘菌」と表記する。

3.2 仮説

粘菌は、オートミールには正の走性を示し、クエン酸には負の走性を示す。

また粘菌は、カルスを認識し、カルスに対し正の走性を示し、オートミールに近づくのと同様に近づいていく。

3.3 実験方法

① 寒天粉末 6.0g に蒸留水を Σ 300mL 加えてガラス棒で混ぜ、オートクレーブで滅菌する

② ①で作った寒天培地をシャーレ 8 枚に分注する

③ 9 cm 径のろ紙に模様を描き(図 4)、寒天培地を入れた 9 cm 径プラスチックシャーレをその上に置く。すると半透明の寒天培地を通して模様を見ることができる。

④ ③でろ紙の上に置いた寒天培地上の、ろ紙の模様の線の部分にあたる場所に、粘菌を置き(実際にはオートミール 10 粒に付着しているものを置いた)、○の部分にあ

たるところに以下の対象物を置いた。

- i 対照実験として何も置かないもの
- ii オートミール 5 粒
- iii 穴あけパンチで小さい円状にくり抜いたろ紙に 0.2mol/L のクエン酸をしみこませたもの
- iv ニンジンの根から作成した小型の薬さじ 1 杯分ほどのカルス(図 5)

上記条件のものを、それぞれ 2 枚ずつ用意する。

⑤ シャーレを 1 つずつラップで包みテープで軽く留め、中のものが動いてしまわないように注意しながら、インキュベータ内で 20°C で培養する。約 48 時間後にインキュベータから取り出しラップを取って観察し、写真を撮る。

⑥ 写真からそれぞれのシャーレ内の、始めに粘菌を置いたところと、対象物とを結ぶ最も太い粘菌の管の長さを定規で測る。

⑦ ⑥で測定した長さを、⑥と同様に写真から測った最短距離(図 4 における矢印の部分)で割った値を求め、粘菌の対象物に向かっている最も太い管がとっている経路の、対象物までの最短経路からのずれの程度を調べる(この値を以下「最短経路からのずれ」とする)。最短経路からのずれが 1 に近いほど、最短経路からのずれが小さいことになる。

3.4 実験結果

3.4.0 図・表について

粘菌の様子は図 6(培養前)、7(約 48 時間培養後)のようになった。図 8~15 における赤い線は、それぞれのシャーレ内の最も太い管を形成している粘菌を表している。

表 1 には、実験を行った 8 枚のシャーレ

それぞれにおける粘菌が形成した最も太い管と、最短経路の写真における長さ、最短経路からのずれと、同じ対象物シャーレの最短経路からのずれの平均を表記している。

3.4.1 対照実験

結果は図 8、9 のようになった。粘菌は目的を持たずにシャーレ全体に四方八方に広がった。エサを探し求めているのではないかと思われる。最短経路からのずれは 2 枚のシャーレでそれぞれ 4.05、2.15 となり、この平均をとると 3.1 となった。

3.4.2 オートミール

結果は図 10、11 のようになった。対照実験と比べオートミールという目的地に向かって一直線に移動し、それほど四方八方に広がっていない。多くの粘菌がオートミール上に集まった。最短経路からのずれは 2 枚のシャーレでそれぞれ 1.56、0.93 となり、この平均をとると 1.245 となった。

3.4.3 クエン酸をしみこませたろ紙

結果は図 12、13 のようになった。粘菌がシャーレ全体に四方八方に広がり、オートミールと比較して考えるとクエン酸に近寄っているとは言いがたい。クエン酸においては、2 枚中 1 枚のシャーレの粘菌では、最も太い管がクエン酸に向かっていないため、もう 1 枚のみ最短経路からのずれを計算すると 3.5 となった。

3.4.4 カルス

結果は図 14、15 のようになった。粘菌は、オートミールを対象物として置いたときのようにカルスに向かっている。また、カルスに到達した粘菌は、カルス上に留まっていなかった。最短経路からのずれは、2 枚のシャーレでそれぞれ 1.31、1 となり、この平均をとると 1.155 となった。

3.5 実験考察

粘菌の対象物としてカルスを置くと、粘菌が特に目的を持たず移動する対照実験や、粘菌が忌避するクエン酸を対象物として置いたときとは異なり、粘菌が好むオートミールを対象物として置いたときと似た動きを粘菌が見せた。また最短経路からのずれも、オートミールを置いたときと、カルスを置いたときでは値の平均が近かった。よって、粘菌はオートミールと同様にカルスを認識し、正の走性を示すのではないかと思われる。

4. 考察

「3.5 実験考察」で述べたように、実験から、粘菌はカルスを認識し、カルスに対し正の走性を示していると思われる。走性には種類があるが、予想として、粘菌は、カルスに化学走性を示しているのではないかと考えている。しかし、化学走性とはある特定の物質に対する反応をさすが、粘菌がカルスのどの成分に反応しているかはわからないので、粘菌のカルスに対する反応が、化学走性であるとは現在のところ判断できない。

また、実験の正確性について考察すると、まず、実験では 1 種類の対象物に対して、2 枚のシャーレしか使用できなかった。飼育していた粘菌の量の関係上あまり多くのシャーレで実験できなかったのが反省点の 1 つである。もっと多くのシャーレを使って実験し、より多くのデータを集めて考察すべきだったと考えており、そのためにはまず粘菌をもっと多く殖やすことが必要である。

さらに、粘菌が通ったルート of 長さを計

測する際に、様々な要因から不正確な計測を行ってしまっている。そのため、最短経路からのずれの計算値が不正確になっている。今回の実験では、シャーレ内の粘菌が実際に移動している映像や、連続写真等を撮ることはできておらず、実際に粘菌がどのようなルートを通ったのかは不明である。実験において計測した長さは、粘菌の管の長さであり、粘菌が実際に通ったルートの長さとは異なる可能性が高い。また計測する粘菌の管を選ぶ際には、管の太さを、写真を見て目視のみで判断し、管を1本だけ選び出している。これにより同じような太さの管があっても、計測には使用しないため無視しまっている等の状況が発生する。さらに選んだ管の長さを測る際には、キルビメーター等、曲線の長さを測ることができるものを用意することができず、シャーレの写真を見て、粘菌の通ったルートを直線の集合体ととらえて、直定規で粘菌の通ったルートを、構成する複数の直線の長さを測ってそれらを足し合わせた。そのため、曲線の長さを測る道具を使用するよりも誤差が生じやすくなっていたと推測できる。主にこの3つのことが原因で、最短経路からのずれの値がかなり不正確なものになっているので、これを改善しなくてはならない。

5. 今後の課題と展望

5.1 今後の課題

実験の正確性を上げて再びデータを集めるために、再度今回と同様の実験を以下の改善点を加えて行うことが必要である。

① 粘菌を多く殖やして、より多くのシャーレを使う。

② シャーレに粘菌と対象物を入れた後、培養する際にビデオカメラを設置するなどして、動画などで粘菌がどんなルートをとったのか後でわかるようにする。

③ 粘菌の最も太い管を選び出す際には、目視ではなくきちんと管の太さを計測して選び出す。そして、管の長さはキルビメーターなど曲線の長さを計測できるもので測り、最短経路からのずれを計算する。

④ シャーレ内の粘菌の全ての管において最短経路からのずれを計算する。

5.2 今後の展望

まず、前述したように今回行った実験に改善点を加え行いたい。

また、粘菌がカルスに対して示したのは、本当に化学走性なのかを調べるために、粘菌がカルスのどの成分に反応したのか調べたい。

さらに、今回用いたのはニンジンの根から作成したカルスだが、他の植物から作成した未分化細胞や、動物の未分化細胞であるヒラ細胞にも粘菌は正の化学走性を示すのか確かめたい。

6. 参考文献

[1]「粘菌変形体の化学走性を利用した高校生物実験の開発」高橋和成

[2]「粘菌はいかにして餌を見つけるか」内田瀬奈

7. 謝辞

この研究を進めるにあたり、顧問の櫻井先生、天野桃花さん、大城彩奈さん、西口慧多郎さんを始め様々な方にご協力やアドバイスを頂きました。この場を借りて深く感謝申し上げます。

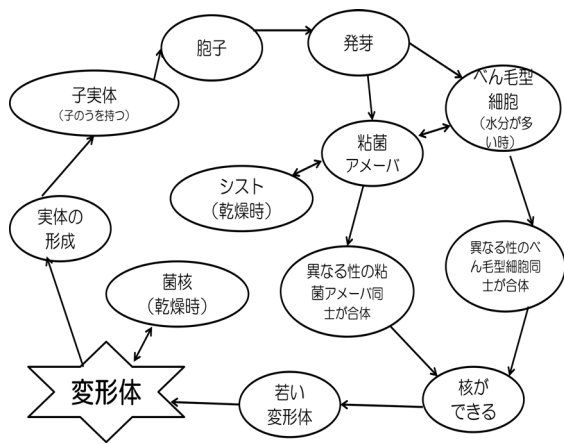


図1 粘菌の一生

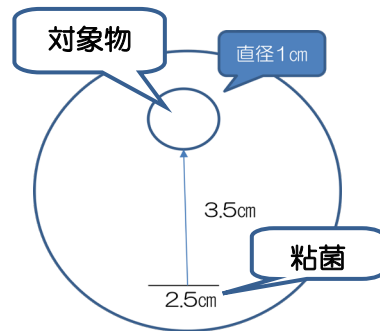


図4 ろ紙に描いた模様
(長さ・矢印・吹き出し以外の部分を表記)

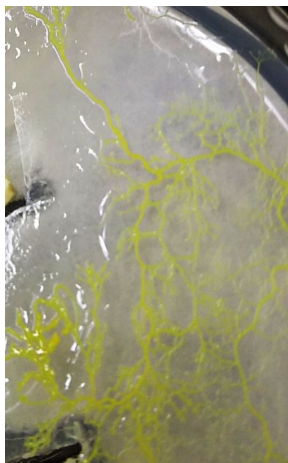


図2 イタモジホコリの変形体



図5 実験に使用したカルス



図3 オートミール

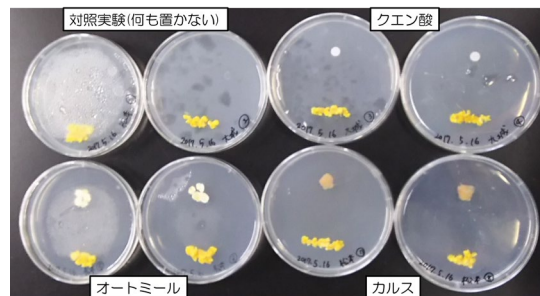


図6 実験における培養前のシャーレ

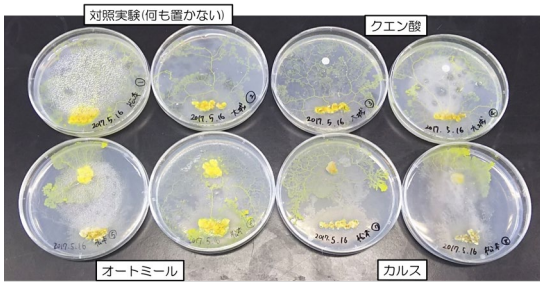


図7 実験において培養した後のシャーレ

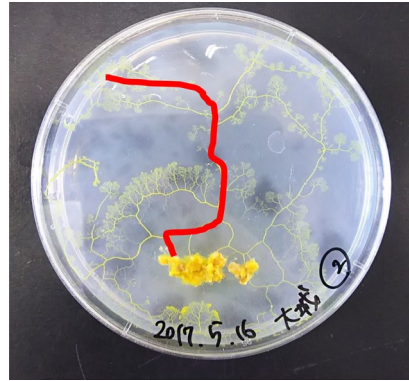


図9 対照実験②

	管の長さ	最短経路	ずれ	ずれの平均
対照①	8.1	2	4.05	3.1
対照②	4.3	2	2.15	
オ①	2.50	1.6	1.56	1.245
オ②	1.4	1.5	0.93	
ク①	×	2	×	3.5
ク②	6.30	1.8	3.5	
カ①	2.5	1.9	1.31	1.155
カ②	2	2	1	

表1 実験結果(単位: cm)

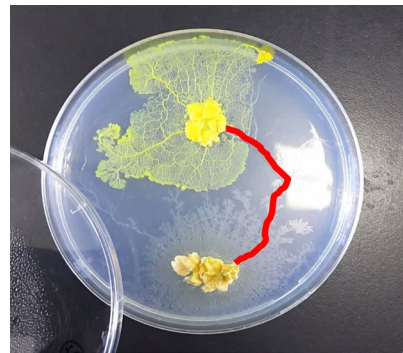


図10 オートミール①

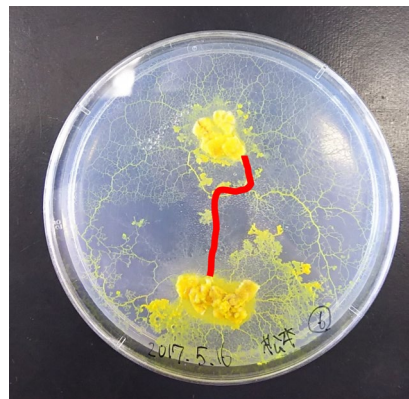


図11 オートミール②

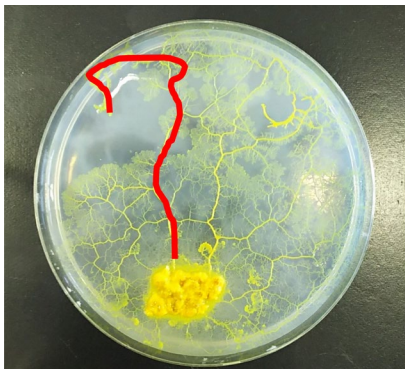


図8 対照実験①

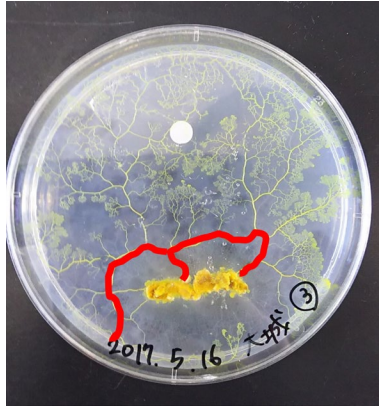


図 12 クエン酸①

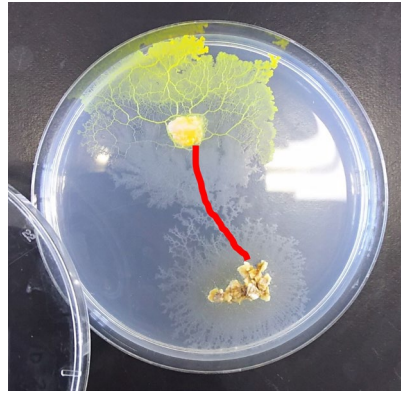


図 15 カルス②

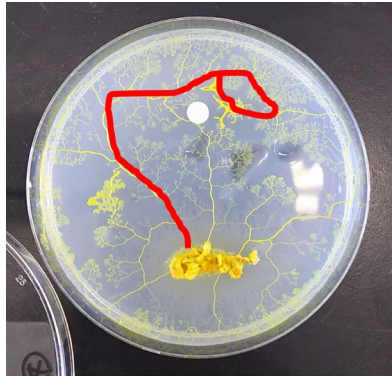


図 13 クエン酸②

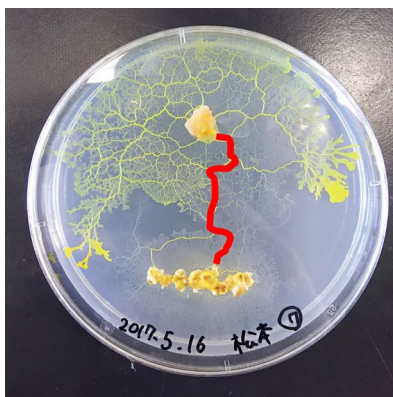


図 14 カルス①

ショウジョウバエの交配実験

6年A組 竹中 友理

指導教諭 櫻井 昭

1. 要約

ショウジョウバエには多数の突然変異体が存在する。その中で黄体色(以降、 y と表す)と白眼(以降、 w と表す)を決定する遺伝子が同一染色体上に存在し、この二つの距離は非常に近いことが判明している。このことを証明する為に、 y 遺伝子の発現しているメスのショウジョウバエ(以降、 y ♀とする)と、 w 遺伝子の発現しているオスのショウジョウバエ(以降、 w ♂とする)を掛け合わせ、子バエの数とそれぞれの遺伝子型から組換え価を求め、遺伝子間の距離を算出した。結果、0.1 以下の小さい値が求められ、二つの遺伝子は近い位置にあることが証明された。

キーワード ショウジョウバエ 組換え価

2. 研究内容

2-1 研究仮説

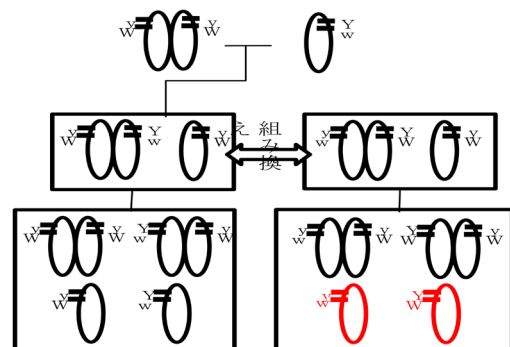
y 遺伝子と w 遺伝子は共に劣性遺伝子であり、X 染色体上にのみ存在する。組換えは遺伝子間の距離が近いほど起きにくくなる。これを利用して、組換えの起こった数を全体数で割った値が組換え価である。つまり、組換え価が小さいほど、組換えは起きにくく、遺伝子間の距離は短いということになる。

2-2 理論

- y ♀と w ♂を交配させた時、生まれてくるハエ(F1)は YW つまり野生型のメス(以降、 $+♀$ と表す)、もしくは y ♂の 2 種類である(右図の左中)。
- 組換えが起こらなかった時、F1 同士を掛け合わせて出来たハエ(F2)は、 y ♀、 $+♀$ 、 y ♂、 w ♂の 4 種類である(右図の左下)
- F1 において、 y 遺伝子と w 遺伝子はとも

に X 染色体上で連鎖している為、組換えが起こる可能性があるのは $+♀$ の遺伝子のみである。

- F1 の $+♀$ の染色体が組み替わった場合、遺伝子は $yWYw$ から $ywYW$ に変わる(右図の右中)。
- 組換えが起こった時、生まれる F2 は、 y ♀、 $+♀$ 、 $+♂$ 、両方の形質をもつオス(以降、 $yw♂$ と表す)の 4 種類である(右図の右下)。
- 組換え価を算出する時、カウントが必要なハエは $+♂$ 、 $yw♂$ の 2 種類である(右図の赤で示した遺伝子型)。



2-3 実験方法

- ・以下の作業はカビ等の侵入を防ぐため、全てクリーンベンチ内で行う。
- ・牛乳瓶、葉さじ、綿栓はあらかじめ乾熱滅菌しておく。
- ・作業中にハエが逃げた場合、エタノールで湿らせたキッチンペーパーで潰して殺す。

(1) ハエの培地作り

培地:ポテトベースパウダー、酵母(イースト)。

- ①牛乳瓶に、ポテトベースパウダーを葉さじで1~2cmの高さまで入れる。
- ②滅菌水を培地が完全に湿るくらいまで加える。
- ③ハエの足場用にろ紙を蛇腹に三度折り、培地の上に立てる。
- ④酵母を葉さじの小さじ2, 3杯入れる。
- ⑤綿栓で蓋をする。

(2) ハエの植え継ぎ

- ①ハエの入っている瓶の底を台などの上に叩きつけ、ハエを瓶の底に落とす。
- ②ハエが登ってくる前に綿栓を取り、ハエを移したい瓶の口を上から合わせる。
- ③瓶の口がずれないように両手で押さえながら、二つの瓶をそのまま引っくり返す。
- ④瓶を押さえながら台などの上に叩きつけて、ハエを移したい瓶の中に落とす。
- ⑤ハエが逃げる前に素早く両方の瓶に綿栓をする。

(3) ハエの親出し

- ①2の方法で、空の瓶に親バエを全て移す。
- ②親バエの瓶にジエチルエーテルを2,3度

噴き込み、ハエを麻酔する。

- ③全てのハエに麻酔が効いた後、エタノールをかけて殺す。

(4) バージン(交尾前のハエ)取り

あらかじめ2の方法で瓶の中のハエを全て移しておく。ハエのオスが交尾可能となるのは羽化から12時間後であるから、12時間内に交尾が行われる前に作業する。

- ①2と同様にハエを空の瓶に移す。
- ②ジエチルエーテルで麻酔をかける。
- ③麻酔のかかったハエを瓶からシャーレに移し、顕微鏡もしくは裸眼で雌雄の別や種類を見る。
- ④選んだハエを吸虫管で1匹ずつ吸い取り、新しい瓶に移す。

2-4 実験内容

- ①yとwのハエをそれぞれ別の瓶に植え継ぎ、新たなハエが羽化してきてからバージン取りを行いy♀とw♂を5匹ずつ用意する。
- ②y♀とw♂をそれぞれ1匹ずつ、計5ペアを作り、1ペアずつ25℃で飼育する。
- ③蛹の存在を確認した後、親子での交雑を避けるため親出しをする。
- ④生まれてきたF1からバージンの+♀とy♂を5匹ずつ、計5ペアを作り、1ペアずつ25℃で飼育する。
- ⑤③と同様に蛹を確認後、親出しをする。
- ⑥生まれてきたF2全ての、数、雌雄、種類を毎日記録し、記録したハエは親出しと同様の方法で除き、記録が被らないようにした。

両方の形質を持つオス・yw♂
(右写真の右下)



3. 結果

F2 を記録した結果、yw♂は 24 匹、+♂は 3 匹であった。F2 全体の数は 1104 匹であった為、ここから組換え価を算出すると $(24+3) \div 1104 = 0.024456... \div 0.02$ となり、非常に小さい数となる。

このことから、y 遺伝子と w 遺伝子の距離は非常に近いものである、ということが出来る。

4. 反省・展望

- ・今回実験期間が短かったため、一度しか実験を行うことが出来なかった。また、限られた時間内で目視でのカウントだった。その為、実験結果や数値、特に+♂の数の正確さに欠けるといえる。
- ・比較したのが y 遺伝子と w 遺伝子のみである為、数値は出せたものの、染色体上での相対的な距離比は分からない。他の遺伝子と比べてどれほど近いのかを調べたい。
- ・y♀と w♂で実験を行ったが、y♂と w♀で同様の実験をしても同じ結果が出るのか調べたい。

5. 謝辞

この実験を行うに当たって、櫻井先生に多大なご指導、ご支援を賜りました。この場を借りて、御礼申し上げます。

植物の葉序の規則性

6年A組 山田莉彩

指導教諭 櫻井 昭

1. 要約

これまで私は植物の形態にみられる数学的な規則性について研究してきた。特に私は植物の葉序、つまり葉のつき方の規則性について興味を持った。これまでの研究で、植物の葉序の回転角は黄金角なのではないかと考えたが、前回までの研究で黄金角であると断定するには至らなかった。そこで本研究では葉の発生の仕組みから葉序がどのようなパターンを描くのかを求めるため、植物の葉序の数理モデリングを行った。オーキシンが葉の原基に与える影響から、原基が等速直線運動および等加速度直線運動で動くモデルをそれぞれ考案し、Mathematica というソフトを用いて葉序のパターンを表現し、パラメータを変化させシミュレーションを行った。結果、パラメータの値によって植物の成長戦略を読み取ることができるということが示唆された。

キーワード 葉序 茎頂分裂組織 シュート 原基 オーキシン

2. 研究の背景と目的

植物には美しい幾何学的な形態を持つものがある。ヒマワリやアロエ、ロマネスコといったものがその代表例である。特に私は植物の葉序、つまり葉のつき方の規則性について興味を持った。そこで私は葉序の規則性はどのようなものに由来するのか、規則性を持つことで植物に一体どのようなメリットがあるのか、ということについて調べることにした。

まず私は、黄金角が植物の葉序に関係するのではないかと考え、葉と葉の間の角度を直接測ることで角度の分布を調べたり、植物の切片から維管束という組織の本数を数えることによって回転角を算出したりした。しかし、どちらのアプローチも失敗に終わり、黄金角であると断定するには至らなかった。

そこで、直接測って回転角を求めるのではなく、葉の発生の仕方を理論的に説明できれば、葉序の規則性が何に由来するのか分かるのではないかと考え、植物の葉序を数学的にモデリングすることにした。

3. 研究内容

3.1 先行研究

セイタカアワダチソウの葉の回転角が黄金角に従っていると考えて、標本を採集し回転角の計測を行ったが、黄金角 137.5° に近似しているとは断定できなかった。

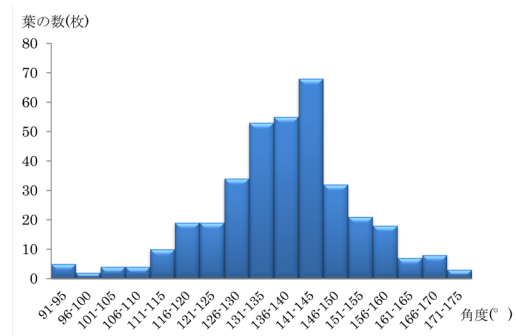


Fig.1 葉の回転角の分布

3.2 葉序モデルの構築

3.2.1 植物の葉の発生

数理モデルを考案するにあたって、私は植物の葉が発生するシステムに着目した。植物体の先端部分である、シュートと呼ばれる部分には、茎頂分裂組織という分裂組織が存在する。茎頂分裂組織では植物の体細胞が発生しそれが繰り返されることにより植物体は成長してゆく。茎頂分裂組織には植物体を構成する体細胞だけでなく、成長して葉となる葉原基とよばれる細胞の塊も発生する。ここで生み出された原基は、様々な要因によってその位置が決定され、一定の間隔で発生する。植物のシュートでは、特にオーキシンと呼ばれる植物ホルモンが作用すると考えられている。このオーキシンは原基から放出され、新しい原基の発生を阻害するという作用を持つ。このため、古い原基のまわりに新しい原基が発生しにくくなる。つまり、オーキシンの濃度勾配によって新しい原基が発生すると考えられている。

3.1.2 仮定

葉の発生をモデル化するため、3.1.1 で示した葉が発生する仕組みの生物学的知見に基づき葉の発生する仕組みを単純化した。その際に以下の4つの条件が葉の発生に関与すると仮定した。

- ① 葉の原基(葉になる前段階のもの)は、シュートにある茎頂分裂組織の細胞分裂によって発生する。
- ② 茎頂分裂組織では、新たな原基が発生するときにオーキシン(植物ホルモン)が作用する。
- ③ オーキシンは新しくできた原基から放出される。

- ④ オーキシンには次の原基の形成を阻害する効果がある。

つまり、オーキシンが次に作られる原基、即ち次に出る葉の位置を決定していると仮定して、その仮定をもとに葉序の数理モデルを考案した。

3.1.3 設定

3.1.2の葉の発生に関する4つの条件から、葉序の数理モデルを考案する上で5つの設定を設けた。

- ① シュートを上から見て、極座標平面と考える。
 - ② 茎頂分裂組織を円、原基を点とみなし、その円周上の任意の地点から新しい原基(点)が発生する。
 - ③ 原基はできた地点からその地点の円の接線と垂直に(法線方向に)円から離れていくように移動する。
 - ④ 既に発生している原基に対して、他の原基からの影響が最も小さい位置(他のどの原基からも遠い位置)に新しい原基は発生する(Fig.2)。他の原基からの影響が最も小さい位置とは、他のすべての原基からの距離の逆数の和が最小になる位置と定義した。例えば Fig.2 の場合、 X_3 の位置を決定するのに各点から引かれた3本の直線のそれぞれの距離の逆数を求め、その和が最小になるときに X_3 の位置が決定されるとする。
 - ⑤ パラメータを設定する。
- 以下、この5つの設定を満たすように原基(点)は動き、葉序のパターンを形成すると考えた(Fig.3)。

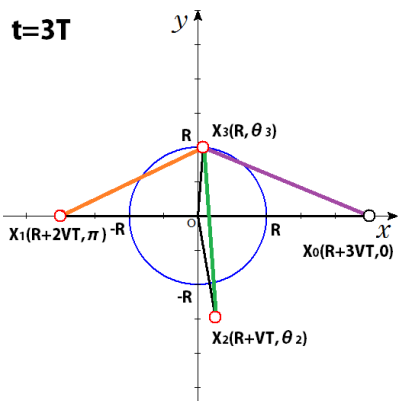


Fig.2 他の原基からの影響が小さい位置

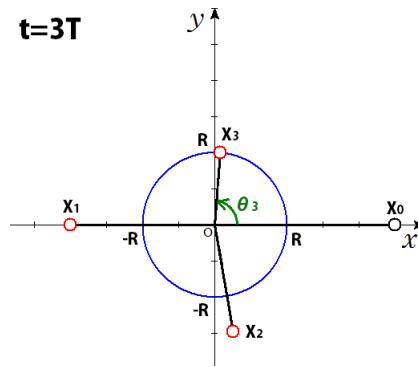
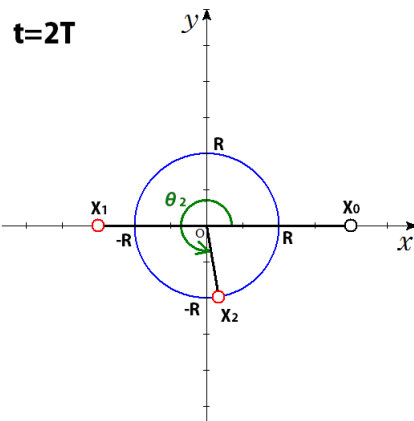
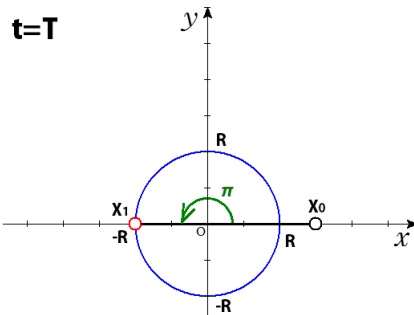
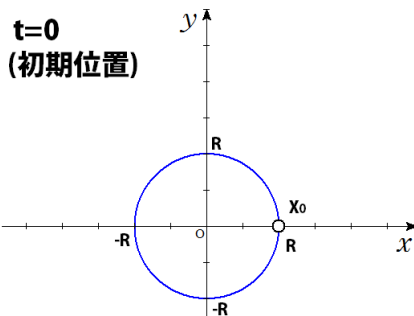


Fig.3 原基の動きのモデル化 (t=0 から t=3T まで)



この設定を用いて原基の動きを表したものが Fig.3 である(等速直線運動の場合)。具体的に原基がどのように発生し動いていくのかを、原基が 3 つ発生するまでの動きで座標を使って説明する。

t=0(初期位置)のとき、原基は座標中の茎頂分裂組織の円上に 1 つあるとする。原基は一定の周期で発生するので、t=T で新しい原基が発生しその間古い原基は円から離れるように法線方向に移動する。新しい原基はオーキシンの効果によって既にある原基から最も遠い位置に発生するため、このときはちょうど反対側、つまり π 回転した位置の円周上に新しい原基は発生する。t=2T のとき、すでにある 2 つの原基は茎頂分裂組織から遠ざかる。初めからある原基は t=T のときに発生した原基よりも茎頂分裂組織から離れているので、t=2T で発生する原基はオーキシンの影響の少ない、つまりより遠い方である X0 に近づく。このように、新しい原基の位置は既にある 2 つの原基の位置関係によって決定される。同様に、t=3T のときも既にある 3 つの原基の位置関係によって新しく発生する原基の位置が決定される。

以後、このような設定で点は動き、葉序のパターンを形成してゆくと考えた。

3.3 考案したモデル

3.2.1 モデル 1: 等速直線運動

3.1.3 設定③の、原基の移動する運動を等速直線運動とみなした。これは、等速直線運動がモデル化の際に最もシンプルな運動だと考えたためである。

設定⑤のパラメータ設定では

$$f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{R^2 + \{R + (n-k)VT\}^2 - 2R\{R + (n-k)VT\} \cos(\theta_n - \theta_k)}}$$

が最小の値をとるときの角 θ_n を求めることによって決定する。

3.2.2 モデル 2: 等加速度直線運動

モデル 1 で仮定した「原基が発生し運動をし始めるとき、初速を持たないものが急に等速で運動を行う」ということは現実的に起こりにくい。そこで、3.1.3 設定③の、原基の移動する運動を等加速度直線運動とみなし、原基の動きは速度が一定の等速直線運動ではなく加速度を持った等加速度直線運動と設定し数理モデル化を行った。

設定⑤のパラメータ設定では

$$f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{R^2 + [R + \frac{1}{2}a\{(n-k)T\}^2]^2 - 2R[R + \frac{1}{2}a\{(n-k)T\}^2] \cos(\theta_n - \theta_k)}}$$

が最小の値をとるときの角 θ_n を求めることによって決定する。

3.2.3 モデル 3: 影響する原基を制限

モデル 1、2 では新しい原基形成にすべての原基が関わると考えてシミュレーションを行った。一方、オーキシンには下から上には移動しにくいという極性がある (Fig.4)。

そのため、ある程度原基が茎頂分裂組織から下方に遠ざかってしまうと古い原基が

V : 原基の移動する速度

T : 原基が発生する周期

R : 茎頂分裂組織の半径

と設定した。

このモデルでの原基の座標は、時刻 $t=nT$ で k 番目に発生した原基の座標を極座標平面で表すと

$$X_k(R + (n-k)VT, \theta_k)$$

と表される。原基の回転角 θ_n の決定法は

a : 原基の移動する加速度

T : 原基が発生する周期

R : 茎頂分裂組織の半径

と設定した。

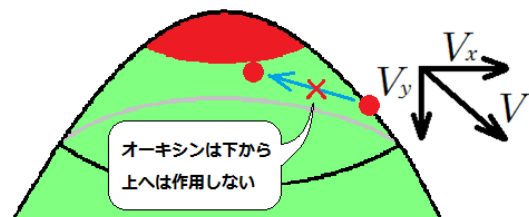
このモデルでの原基の座標は、時刻 $t=nT$ で k 番目に発生した原基の座標を極座標平面で表すと

$$X_k\left(R + \frac{1}{2}a\{(n-k)T\}^2, \theta_k\right)$$

となり、

原基の回転角 θ_n の決定法は

Fig.4 オーキシンの極性



放出するオーキシンは新しい原基に対して作用せず、新しい原基の形成には影響しな

い。言い換えると、鉛直方向の成長速度 V_y が速いとき、新しい原基の発生に関与する原基の数は少なくなるということが言える。そこで新しい原基の発生に関与する原基の数を制限しモデル化を行った(Fig.5)。

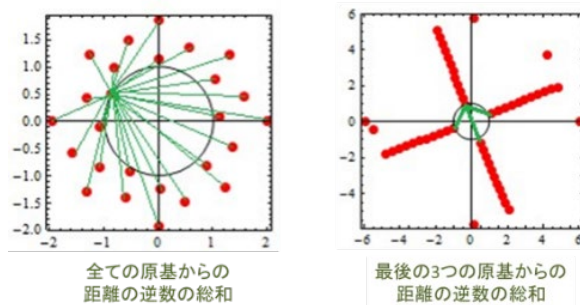


Fig.5 原基の数の制限

パラメータ設定ではモデル 1 の等速直線運動モデルと同様に

V : 原基の移動する速度

T : 原基が発生する周期

R : 茎頂分裂組織の半径

x : 原基の発生に関与する原基の数

$$f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) = \sum_{k=n-x}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{R^2 + \{R + (n - k)VT\}^2 - 2R\{R + (n - k)VT\} \cos(\theta_n - \theta_k)}}$$

が最小の値をとるとき、角 θ_n を求めることによって決定する。

と設定した。

このモデルでの原基の座標は、時刻 $t=nT$ で k 番目に発生した原基の座標を極座標平面で表すと

$$X_k(R + (n - k)VT, \theta_k)$$

と表される。原基の回転角の決定法は

3.3 平面モデルのシミュレーション

3.3.1 解析方法

3.1.3 の設定から、原基の運動を仮定し数式化することで上から見た葉のつき方(葉序のパターン)と、何のパラメータがパターンの形成に依存しているのかを求めた。設定④で、「最も遠い位置」を「他のすべての原基からの距離の逆数の和が最小になる位置」と定義したため、原基(点)の位置を決定するのに関数が最小値になる角を求める作業が必要であった。このような関数から最小値になるときの角度を求める計算は手計算では困難であり、大変な労力を要するため、Mathematica というソフトを用いて実際に考案したモデルのシミュレーションを行った。実際には一つ点をプロットしパターンを得るたびにその状態の関数が最小値になる角をグラフから求め、極座標平面に

プロットするという操作を行っている(Fig.6)。

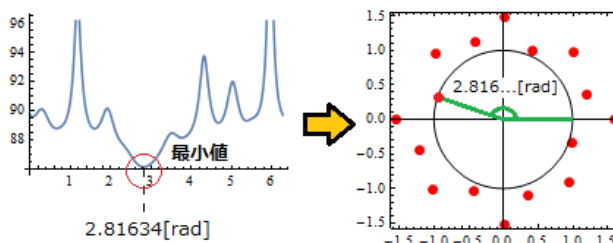


Fig.6 Mathematica によるシミュレーション

3.3.2 目的と方法

目的 : モデル 1 の葉序のパターンは何に依存しているのかを調べる。

方法 : 原基の出現する数(点の数) n を固定し、パラメータの値をそれぞれ変化させる。

3.3.3 モデル 1: 等速直線運動

仮説 : ある時刻 $t=nT$ のときの葉序のパターンはパラメータ VT/R (1 周期に原基が移動する距離と茎頂分裂組織の半径の比)に

依存する。

方法：

- i) n と VT を固定し V と T を変化させる。
- ii) n を固定し VT/R の値を変化させる。

結果：葉序のパターンは VT を固定すると V や T を変化させても変化しなかったが、 VT/R の値によって変化した。 VT/R の値が小さくなるほど点が円上に近づいて円の周りを敷き詰めるように並び、大きくなると一直線上に並んだ。(Fig.7)

3.3.4 モデル 2：等加速度直線運動

仮説：ある時刻 $t=nT$ のときの葉序のパターンはパラメータ $aT^2/2R$ (1 周期に原基が移動する距離と茎頂分裂組織の半径の比) に依存する。

方法：

- i) n と $aT^2/2R$ を固定し a と T を変化させた。
- ii) n を固定し $aT^2/2R$ の値を変化させた。

結果：葉序のパターンは $aT^2/2R$ を固定すると a や T を変化させても変化しなかったが、 $aT^2/2R$ の値によって変化した。 $aT^2/2R$ の値が小さくなると点が散らばって配置され、大きくなると一直線上に並んだ。等速直線運動のモデル 1 の結果と比較する。モデル 1 では、葉序パターンを決定するパラメータ VT/R が小さくなったときに点が円の周りに配置された。しかし、モデル 2 では葉序パターンを決定するパラメータ $aT^2/2R$ が小さくなったときに点は円に近づくほど密集しているが、円から遠ざかってもある程度重ならない形で配置されていることが分かった。(Fig.8)

3.3.5 モデル 3：影響する原基を制限

仮説：ある時刻 $t=nT$ のときの葉序のパターンはパラメータ VT/R (1 周期に原基が移

動する距離と茎頂分裂組織の半径の比) を固定すると、 x (原基の発生に関与する原基の数) に依存する。

方法：

- i) n と VT を固定し V と T を変化させた。
- ii) n を固定し VT/R の値を変化させた。
- iii) n 、 VT/R を固定し x を変化させた。

結果：原基形成に影響する原基を制限することによって螺旋状の線が見える配列が確認でき、 x の値を大きくするほど、つまり影響を与える原基の数を多くするほど螺旋の数は増えた。

x の値を小さくするという事は新しい原基を作るのに関与する原基の数が少ないということであるから、これは鉛直方向の成長速度 V_y が速いということと同じであるといえる。また、同じ線もしくは螺旋上にある点は原基が葉になった時に重なりやすくなってしまいうので、螺旋の数が増えるほど原基は重なりにくくなると考えられる。以下に示す図は、 $[n, V(a), T]=[200, V(a), 1]$ として各モデルでパラメータの値を変化させたものである(Fig.9)。

3.4 3D におけるシミュレーション

モデル 1,2,3 とそれらのシミュレーションを応用し、植物の茎を円柱、原基を球と見立てて 3 次的に原基の発生を表現した。茎頂分裂組織では体細胞分裂が行われ、茎が伸びる。それに伴い、茎頂分裂組織に注目すると新しい葉が下へ移動しているように見える。そこで、茎頂分裂組織からある半径 r までは原基は茎頂分裂組織と同じ平面を移動し、半径 r を超えると鉛直方向に移動し下部へ下りていくとした。ここでは $r=2$ と固定している。(Fig.10)

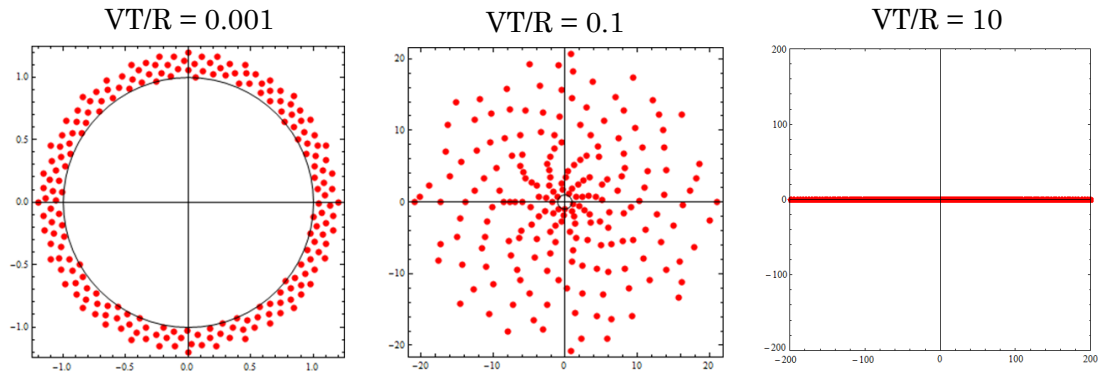


Fig.7 モデル 1：等速直線運動

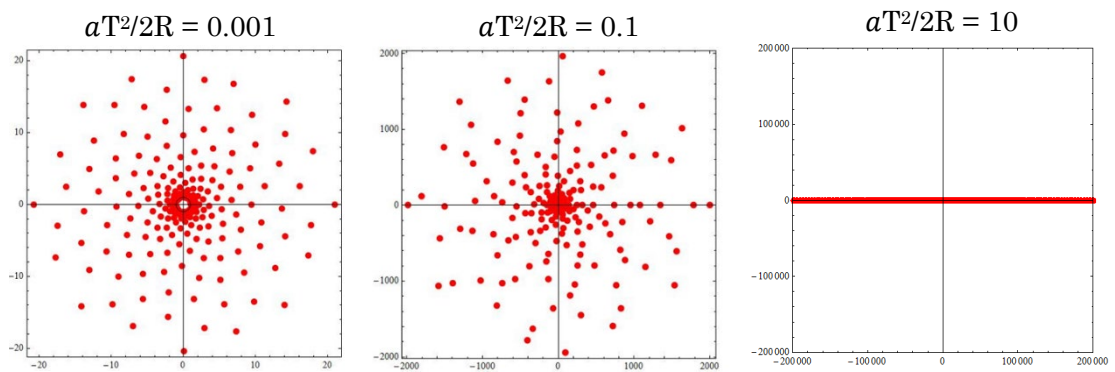


Fig.8 モデル 2：等加速度直線運動

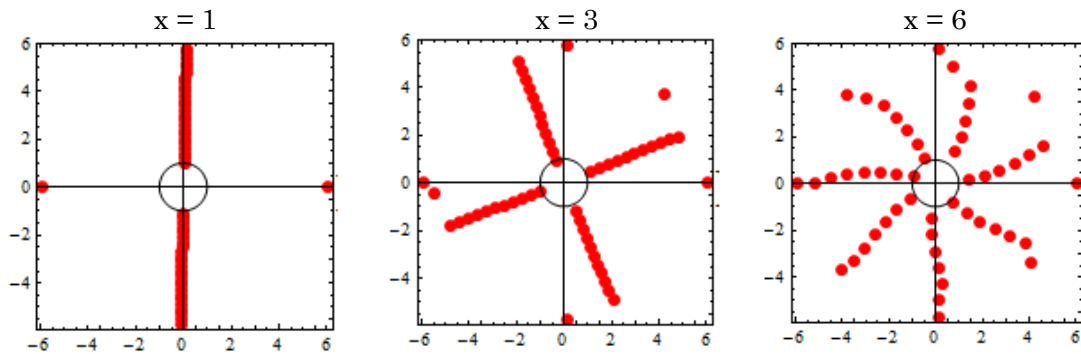


Fig.9 モデル 3：影響する原基を制限

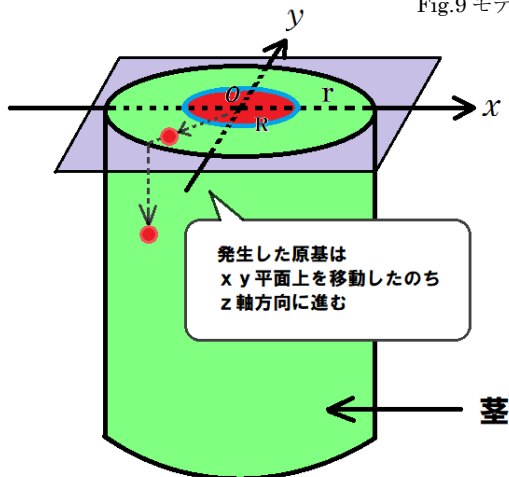


Fig.10 3D モデルでの原基の移動

パラメータは

V：原基の移動する速度

T：原基が発生する周期

R：茎頂分裂組織の半径

r：原基が xy 平面を移動する限界半径

x：原基の発生に関与する原基の数

とした。葉の発生条件はモデル 3 を用いた。

このモデルを用い、3 次元でも原基の配置は平面とほぼ同様になることを示した。

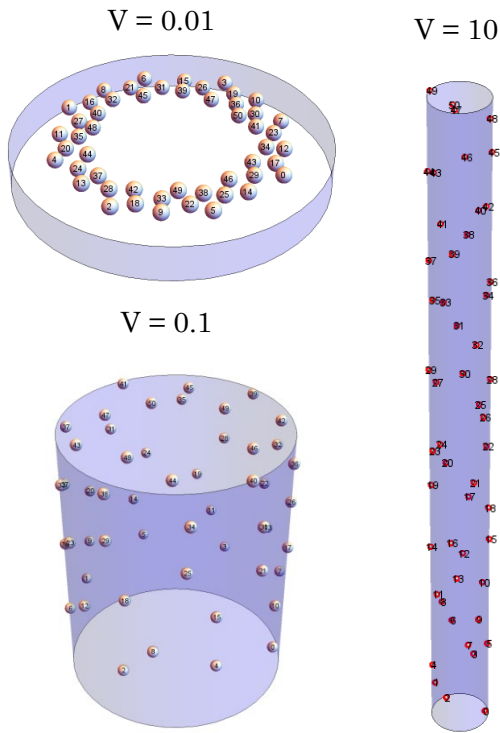


Fig.11 Vを変化させた場合

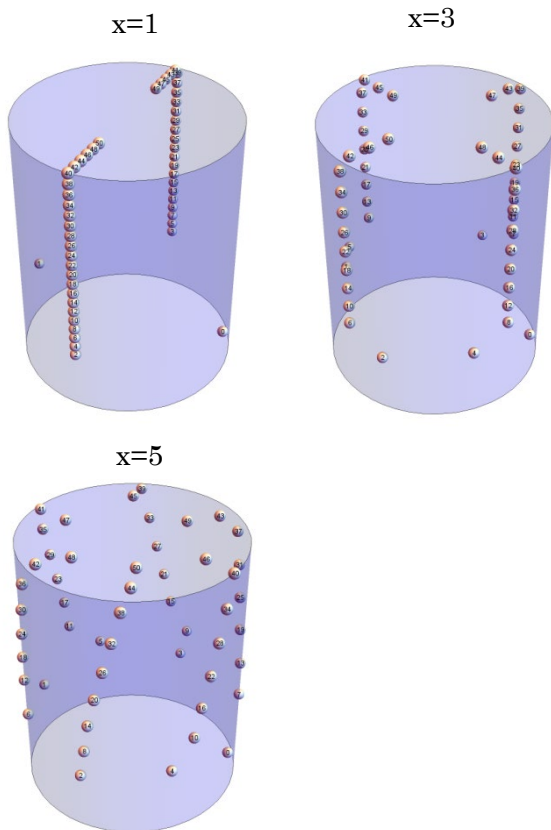


Fig.12 xを変化させた場合

3次元での原基の位置を直角座標系によって表すと、以下ようになる。

$R+(n-k)VT < r$ のとき

$$Xk(\{R+(n-k)VT\}\cos\theta, \{R+(n-k)VT\}\sin\theta, 0)$$

$R+(n-k)VT \geq r$ のとき

$$Xk(r \cos\theta, r \sin\theta, -[r-\{R+(n-k)VT\}])$$

仮説：3DにおいてもVやxによって葉序の配列が変化し、平面と同様のパターンが確認できる。

方法：

- i) VT/R を固定した上で成長速度Vのみを変化させた。
- ii) VT/R を固定した上で原基の発生に関与する原基の数xを変化させた。

結果：成長速度Vを変化させると、平面モデルのモデル1(等速運動モデル)と同様に、成長速度が小さいとき点が円上に近づいて茎頂分裂組織の円の周りを敷き詰めるように並び、大きいとき一直線上に並ぶという結果が得られた(Fig.11 方法1の $[n,V,T,x]=[50, V, 1, 50]$ のときの結果)。

また、xを変化させても平面モデルのモデル3(影響する原基を制限したモデル)と同様に螺旋状の線が見える配列が確認できた。また、xの値を大きくするほど、螺旋の数は増えた(Fig.12 方法2の $[n,V,T,x]=[50, 0.1, 1, x]$ のときの結果)。

これらの結果より、同様のパラメータと設定を用い原基の動きを3次元的に表しても平面モデルとほぼ同様の結果が得られた。つまり、立体的に茎がつく実際の植物においても平面モデルで得られたパターンとほぼ同様の性質を読み取ることができ、従って平面モデルは立体を考える上でも有効であるということが示唆された。

4. 考察

モデル1とモデル2では、葉序の回転角はそれぞれのモデルで VT/R 、 $aT^2/2R$ というパラメータによって決定されることが分かった。これは原基が一周期に進む距離と茎頂分裂組織の半径の比である。以上から、私は成長速度の変化によって葉序のパターンを表すことができる「オーキシンによる葉序の数理モデル」という新たなモデルを考案することができた。

また、モデル1ではパラメータの値が小さくなるほど茎頂分裂組織の近くに密集して原基が配置され、茎頂分裂組織は非常に小さな組織であるためあまり現実的でないパターンとなってしまったが、モデル2ではパラメータの値が小さくなくても茎頂分裂組織の周りに原基が密集して配置されるものの茎頂分裂組織から遠い位置にある原基はある程度散らばって原基が配置されたため、モデル2の加速度モデルの方が実際の原基の動きにより近く、適したモデルであると考察された。

また私は、シミュレーションを通して1つ推論を得ることができた。それは、一周期に進む距離の違いによって植物の成長戦略が読み取れるというものである。

一周期に進む距離が比較的長いとき、植物の葉はほぼ一直線上に配列したため、その植物は葉の配列よりも成長を優先させているということができる。その主な代表例として挙げられるのがイネである。イネは一般的に田植え後から収穫までの夏の短期間の間に上に(鉛直方向に)高く急激に伸びることが知られている。このような植物は早く、高く成長することによって葉は重なりやすいものの高さによって日光を得てい

るのではないかと考えられる(Fig.13)。

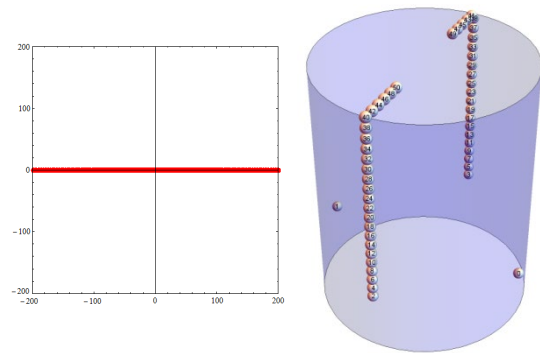


Fig.13 イネと成長速度が速い葉序パターン

対照的に、一周期に進む距離が比較的小さいとき、植物の葉は同一直線状にある程度重なりにくい配置となったため、その植物は成長よりも葉の配列を優先させているといえる。その主な代表例として挙げられるのがアロエである。アロエは葉肉植物の一種であり植物体の維持に水をあまり必要としない。そのため背丈は低く、ゆっくりとしか成長しない。このような植物は、成長速度は遅く背は低いものの、葉を無駄なく敷き詰めることによって効率よく日光を得ているのではないかと考えられる(Fig.14)。



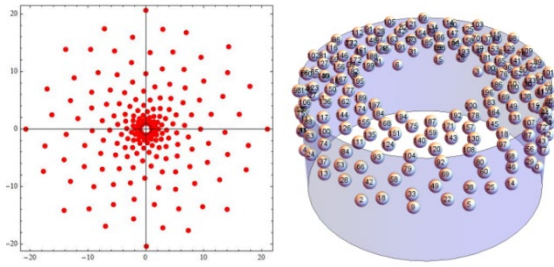


Fig.14 アロエと成長速度が遅い葉序パターン

つまり、植物は茎頂分裂組織の半径と比べた原基が一周期に進む距離(葉序のパターンを変化させたパラメータ VT/R や $aT^2/2R$)、つまり成長速度によって日光を効率よく受け取るための方法を変えていると考えられた。

5. 今後の展望

今回の研究では、平面・立体のモデルを考案することで、より生物学的根拠に基づいた条件で疑似的に葉の原基の発生を表現した。しかし、葉の位置を決定しているのはオーキシンの作用のみによるものではなくほかにも様々な要因がより複雑に関係している。ゆえに、どのようなモデルがより植物の葉が発生する条件に近いのか吟味しその条件に近づくようにさらにモデルの改良を重ねていきたい。また、植物は何によって V (速度)や a (加速度)といったパラメータを変化させ、成長戦略を変えているのか分析していきたい。

今回制作した 3D モデルでは、ある範囲を境に z 軸下向き方向に原基が移動するとした。このように平面となる範囲を設定したのは、オーキシンが下から上へと作用しない性質を考慮し、影響する原基の数 x を用いずに鉛直方向の速度 V_y を表すためであった。しかし、 r という半径で範囲を設定

し 3 次元のモデルを構築することには成功したものの、今回の研究では平面上の原基だけが新しい原基の発生に関与するというプログラムを作成することはできなかった。今後はこのモデルをさらに改良し、あらゆる葉序を統合的に表現できるモデルを構築したいと考えている。

まとめると、

- モデルの妥当性の吟味・改良
- パラメータを変える要因の分析
- 3D モデルの改良

以上 3 つが今後の主な課題である。

6. 参考文献

- [1]S.Douady, Y.Couder, (1996) Phyllotaxis as a Physical Self Organizing Growth Process Part I : The Spiral Modes Resulting from Time-Periodic Iterations. *J.Theor.Biol.* 178:255=274
- [2]「波紋と螺旋とフィボナッチ: 数理の眼鏡でみえてくる生命の形の神秘」 近藤 滋 著 学研メディカル秀潤社, 2013

7. 謝辞

奈良女子大学の吉田信也先生にはモデルの作成や数式などで本研究に協力いただきました。またこれまで私を指導して下さり生物学・数学的知見からモデルの妥当性を検討していただいた櫻井先生、川口先生などその他本校の理数科の先生方にはたくさんアドバイスをいただきました。私の研究に協力して下さった皆様に深く感謝の意を表します。

マツタケの人工培養を目指して

6年A組 結崎 祈

指導教員 櫻井 昭

1. 要約

私は未だ安定した手法が確立されていないマツタケの人工培養法について研究している。昨年度に引き続きマツタケ菌糸の成長速度を向上させる研究を行い、今年度は培地の組成を変更する実験を行った。その結果、培地の組成を変更するとマツタケ菌糸の成長速度に変化がおきた。

キーワード マツタケ 糖 アセチル coA ピルビン酸 デンプン 成長速度

2. 研究の背景と目的

安定したマツタケの人工培養の成功例は未だ報告されていない。私は、なぜマツタケの人工培養が困難であるのかに興味をもち、マツタケの人工培養を目指して研究を始めた。

マツタケの人工培養が困難である理由の一つに、菌糸の成長速度の遅さがある。私はそれを解決するために、培地の組成のうち、グルコースを変更し、一連の実験を行った。

3. 実験内容

3.0 事前準備

実験を行う場をビニールカーテンで区切り、その中でプラズマクラスターを約24時間つけ放しにすることで、できるだけ菌の少ない状態を作る。また、マツタケ菌を扱うときは、クリーンベンチ内で行う。以下の全ての実験において、この無菌操作は共通で行う。

・マツタケ培地

IFO-7 培地を採用している(2014, 結崎祈)。

3.1 ピルビン酸培地 アセチル coA 培地

3.1.1 実験目的

寒天培地に植え継がれたマツタケ菌糸は培地内のグルコースを養分として吸収し、分解することでエネルギーを得ている。菌糸の成長速度が遅いのは、このグルコースの分解が遅いからではないかと考え、「グルコースの分解過程にある物質を培地にグルコースの代わりに入れれば、分解回路が短縮される」という仮説を立てて一連の実験を行った。

3.1.2 実験仮説

培地に含まれるグルコースをグルコースの分解過程の物質に変更すれば、分解回路が短縮されて菌糸の成長速度が向上する。

3.1.3 実験方法

IFO-7 培地の組成のうち、グルコースをピルビン酸及びアセチル coA に置き換えて培地を作成する。成長速度を比較する基準として、グルコース量をアセチル coA と同じモル数にした培地も作成する。アセチル coA は 1g しかないため、ピルビン酸とグルコースのモル数はアセチル coA にあわせる。また、ポジティブコントロールとして通常の IFO-7 培地、ネガティブコントロールと

して通常の IFO-7 培地の組成からグルコースを除いた培地を作成する。作成した各培地にマツタケ菌を植え継ぎ、28℃のインキュベーター内で 78 日間培養した。各培地の組成は以下に示す通りである。

<ピルビン酸培地>

エビオス	0.75g
ピルビン酸	0.12g
寒天	2.70g
蒸留水	Σ 150ml

<アセチル coA 培地>

エビオス	0.75g
アセチル coA	0.10g
寒天	2.70g
蒸留水	Σ 150ml

<基準培地>

エビオス	0.75g
グルコース	0.12g
寒天	2.70g
蒸留水	Σ 150ml

<IFO-7 培地(ポジティブコントロール)>

エビオス	0.75g
グルコース	3.00g
寒天	2.70g
蒸留水	Σ 150ml

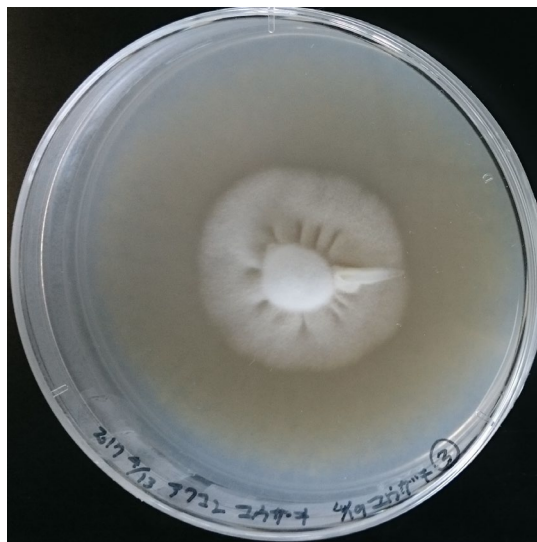
<ネガティブコントロール>

エビオス	0.75g
寒天	2.70g
蒸留水	Σ 150ml

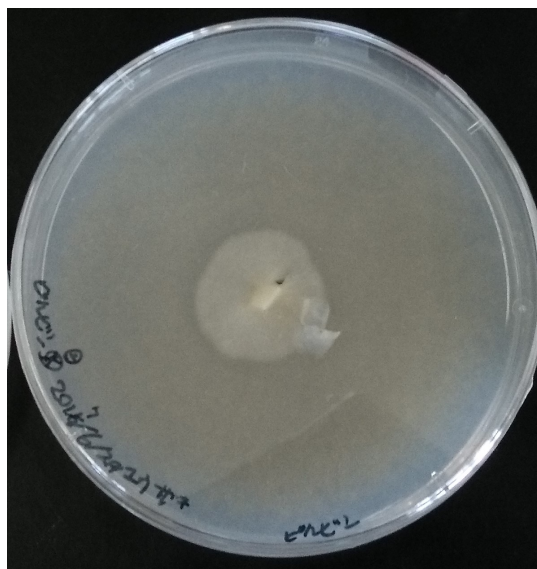
3.1.4 実験結果

全種の培地において菌糸の成長が見られた。成長の度合いはポジティブコントロー

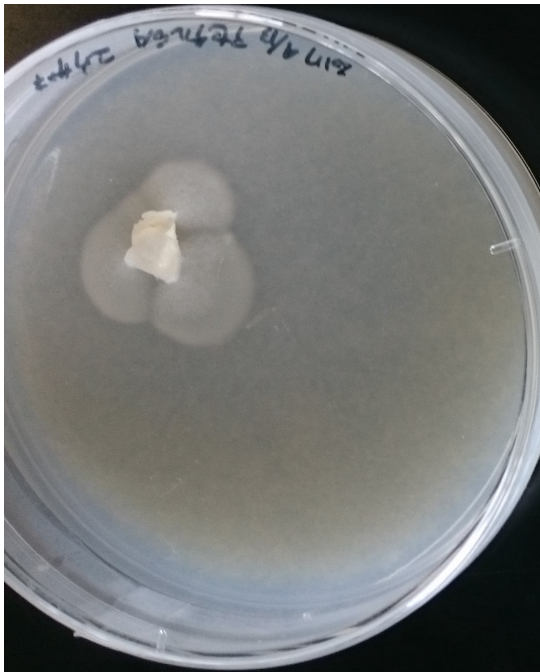
ルの IFO-7 培地が最も高くなっており、ピルビン酸培地、アセチル coA 培地、ネガティブコントロールでは菌糸の成長の度合いに差はほぼ見られなかった。基準培地では菌糸の成長が見られなかった。



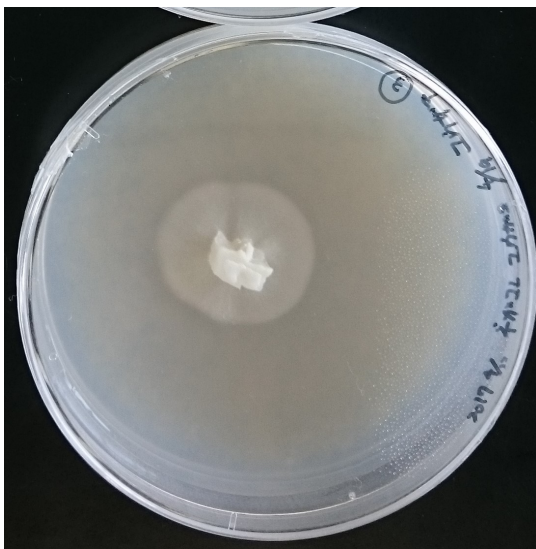
↑ ポジティブコントロール



↑ ピルビン酸培地



↑アセチル coA 培地



↑ネガティブコントロール

3.1.5 考察

ピルビン酸培地、アセチル coA 培地の両方で成長量は向上しなかったため、仮説は否定される。基準培地は一度培地の作成に失敗し、作り直したため、植え継ぎの日が異なっている。基準培地に植え継いだ菌糸が枯れていたため、これのみ成長が見られなかったと考えられる。グルコースを含ま

ないネガティブコントロールの培地で菌糸の成長が見られたことについて、培地の組成にあるエビオスに少量添加されている乳糖が炭素源になり、成長したのではないかと考えている。

3.2 デンプン培地

3.2.1 実験目的

実験 3.1 でグルコースの分解回路を短縮することで成長速度の向上を試みたが、成長速度は逆に低下した。では逆にグルコースを分解前の物質に置き換えたらどうなるか。マツタケの人工培養法について調べる中で、いくつかの論文にデンプン培地での培養が可能であることが記されていた。

3.2.2 実験仮説

グルコースをデンプンに置き換えた培地を使用すると、菌糸が成長する。

3.2.3 実験方法

IFO-7 培地の組成のうち、グルコースのみをデンプンに置き換えて培地を作成した。デンプンには決まった化学式が無いため、とりあえずグルコースと同量に設定した。また、成長量の比較対象として通常の培地も用意し、デンプン培地と同様に植え継ぎを行ない、28℃のインキュベーター内で195日間培養した。培地の組成は以下に示す通りである。

<IFO-7 培地(通常培地)>

エビオス	0.75g
グルコース	3.00g
寒天	2.70g
蒸留水	Σ 150ml

<デンプン培地 >

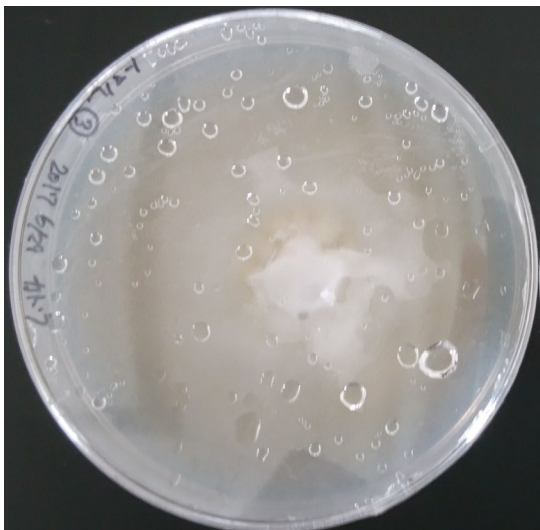
エビオス	0.75g
水溶性デンプン	3.00g
寒天	2.70g

蒸留水

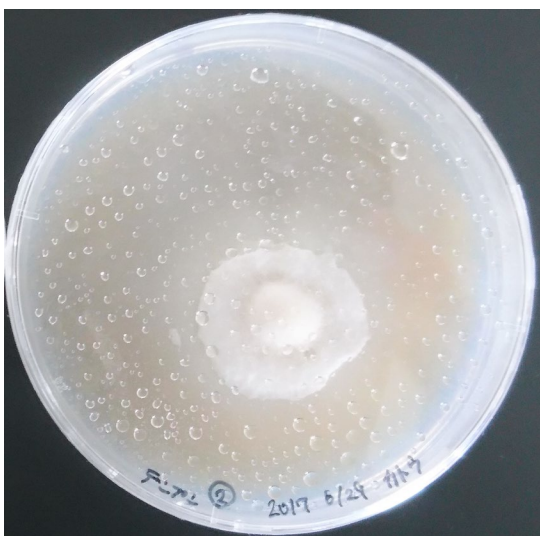
Σ 150ml

3.2.3 実験結果

デンプン培地でも菌糸の成長が観察された。菌糸の成長量に、通常培地との差は見られなかった。



↑通常培地



デンプン培地

3.2.4 実験考察

培地の糖を分解前のデンプンに変更しても成長速度の変化が見られなかったことから、マツタケ菌糸の成長速度が遅いことに、糖の分解過程は関係しない可能性が考えられる。

4. 考察

実験 1 の仮説は、培地のグルコースを分解過程の物質に変更すると成長速度が向上するというものであった。これと同様の仮説を実験 2 に適用した場合、「培地のグルコース分解前の物質に変更したら成長速度が低下する」となる。しかし実験 2 の結果から、この仮説は否定される。実際はグルコースを分解後の物質に変更すると成長速度が低下し、分解前の物質に変更すると、成長速度に差が生まれなかった。このことから、マツタケ菌における炭素源の分解速度は分解経路の長さに関係しないと考えられる。

5. 今後の課題

実験 3.1 において、ピルビン酸培地の作成に失敗し、作り直しを行ったため、植え継ぎの時期がピルビン酸培地とそれ以外の培地で違ってしまっている。植え継ぐ菌糸と観察日数は同じであるが、時期が異なっていることにより、実験が正確性を欠いてしまっている。今後はより精密に実験を進める必要がある。

6. 謝辞

本研究活動において、六年間にわたり、顧問の櫻井先生に、多大なご指導を受け賜われました。この場をかりて、深く感謝申し上げます。

アルツハイマー病と Scara1

6年C組 熊懷紗英

指導教諭 櫻井 昭

1. 要約

アルツハイマー病と Scara1 に関する2つの相反する論文が発表されている。1つは Scara1 の欠損はミクログリアのアミロイド β ($A\beta$) のクリアランスを阻害し、アルツハイマー病の発症を加速させるというもの。もう1つは Scara1 は $A\beta$ のクリアランスに関与しているわけでもなく、アルツハイマー病の発症にも関与しないという論文である。私はこの結果の違いにはアルツハイマー病には $A\beta$ のオリゴマーが関与し、Scara1 はミクログリアのオリゴマーに関する活性に変化をもたらすと考え、それを証明する追加実験を考えた。

キーワード Scara1 アミロイド β $A\beta$ オリゴマー

2. 研究の背景と目的

2.1 研究動機

私の祖母がアルツハイマー病を患っていたこともあり、アルツハイマー病には非常に関心が高かった。また、以前外部での講義を聞かせていただいたときに、オリゴマー仮説(2.2.2 参照)の話聞き、興味をもち、研究の題材にしたいと考えた。

ただ今回扱うテーマを半年という限られた期間のなかで高校生が実験で検証し考察するのは厳しいと考えたので、今すでに発表されている論文を考察し、浮かんだ疑問の検証方法について考えた。

2.2 アルツハイマー病について

2.2.1 アルツハイマー病とは

アルツハイマー病は、主に $A\beta$ やタウタンパク質が凝集し、その凝集したものによって、ニューロン(神経細胞)が死に至る

ことにより、記憶障害や思考能力の低下などの症状が出てしまう病気である。まだ有効な治療薬は実用化されておらず、注目されている研究のひとつである。

$A\beta$ はニューロンの細胞膜にある $A\beta$ 前駆体タンパク質(A β PP)というタンパク質がはたらきを終わると、 β セクレターゼと γ セクレターゼという酵素によって切り離され、脳内に放たれる。すると、 $A\beta$ 同士が次々と凝集していく。(この凝集し、巨大なかたまりとなったものをアミロイド斑、もしくは老人斑と呼ぶ。) $A\beta$ がニューロンにダメージを与えて細胞死を引き起こしたり、シナプス間隙に入り込むことにより、情報伝達の阻害をされると考えられている。

$A\beta$ が蓄積されることにより、ニューロンの中にある微小管を構成するタンパク質チューブリンをバラバラにならないようにするはたらきのあるタウタンパク質が、

微小管からはなれ、凝集してしまう。微小管がなくなってしまうことにより、ニューロンは隅々まで栄養が運べなくなることで、ニューロンの死につながり、またタウの凝集はニューロンから吐き出され、健康なニューロンにも被害を及ぼしてしまう。

脳内にはグリア細胞というニューロンに栄養を渡したり、病変を修復したりする細胞があり、そのひとつにミクログリアと呼ばれるものがある。ミクログリアは普段 $A\beta$ の除去する作用があります。

2.1.2 オリゴマー仮説

今まではアミロイド斑が脳内のニューロンに有害で、アルツハイマー病の原因と考えられてきた。しかし認知機能の低下とアミロイド斑の数が一致しないという事例もあり、近年 $A\beta$ が数個～数十個の分子が会合した小さな集合体を $A\beta$ オリゴマーといい、これが非常に毒性が強く、ニューロンに害を与え、その機能を邪魔することで認知機能の低下が起こるといふ仮説が有力視される考え方が出てきた。

3. 論文内容

3.1 論文A

3.1.1 題名

Scarl deficiency impairs clearance of soluble Amyloid- β by mononuclear phagocytes and accelerates Alzheimer's-like disease progression

Dan Frenkel 他

3.1.2 内容(一部抜粋)

shRNA スクリーニングにより、Scarl は $A\beta$ の受容体であると同定された

ミクログリアによる $sA\beta$ の取り込みが実際に受容体介在の事象であることを確認するために、増加する濃度の $sA\beta$ およびフローサイトメトリーによる定量された取り込みを有する N9 ミクログリアをインキュベートした。図 2a に見られるように、ミクログリアによる $sA\beta$ の取り込みは $\sim 2\mu M$ で飽和に達し始めた。さらに、N9 ミクログリアによる $sA\beta$ の取り込みは時間依存性であり、約 4 時間で飽和に達した (図 2b)。これらのデータは、ミクログリアによる $sA\beta$ の取り込みが受容体媒介性であり、用量および時間依存的に飽和性であることを示している。ミクログリアによる $sA\beta$ の取り込みがスカベンジャーレセプターによって媒介されることをさらに確認するために、N9 細胞を $1\mu M$ の $sA\beta$ 1-42-HilyteFluor488 $\pm 200\mu M$ フコイダン (スカベンジャーレセプターの広範な阻害剤) で 2 時間インキュベートし、フローサイトメトリーによる取り込みを測定した。フコイダンは、N9 ミクログリア (図 2c) によって採取された $sA\beta$ の量および $sA\beta$ を取った細胞の数を有意に阻害した (図 2d)。

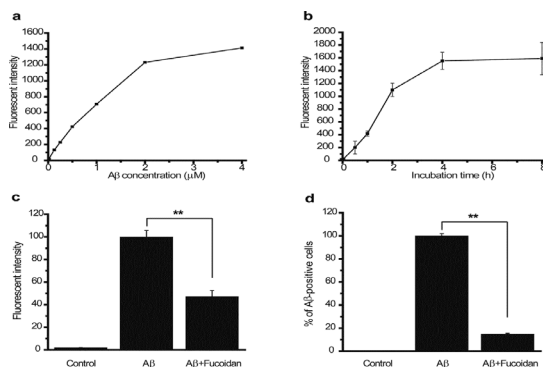


図 2 N9 ミクログリアによる $sA\beta$ 取り込み

Scara1 欠損は、sAβ 取り込みの減少と関連している

Scara1 の標的化された欠失のみが、新鮮な単球（図 3a）およびミクログリア（図 3b）による sAβ の取り込みのそれぞれ 65% および 50% の有意な減少をもたらした。このデータは、Scara1 が単球およびミクログリアによる sAβ の取り込みに対する主要受容体であり、Scara1 媒介性取り込みが重複していないことを示している。

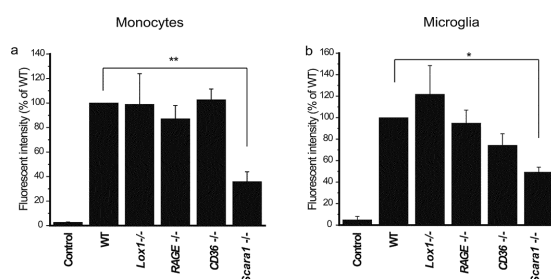


図 3 Scara1 は sAβ の主要な単球およびミクログリア受容体である

PS1-APP-Scara1 - / -マウスにおける死亡率の増加

Scara1 が in vivo で sAβ のクリアランスを媒介するかどうか、および Aβ の蓄積に対するこのようなクリアランスの効果を判定するために、我々は PS1-APP- Scara1 - / -マウスを作製し、これらのマウスを Aβ レベルおよび AD(アルツハイマー)様病状について分析した。これを達成するために、ケモカイン受容体 Ccr21 を欠損したトランスジェニック APP マウスを作製するために過去に成功した戦略を利用した。簡潔には、C57BL6 バックグラウンド上の PS1-APP マウスを Scara1 - / -マウス (C57BL6 バックグラウンド上で

も) と交配させて、PS1-APP- Scara1 +/-マウスを作製した。次いで、これらのマウスを Scara1 - / -マウスに渡して、PS1-APP- Scara1 - / -マウスを作製した。Scara1 +/-および PS1-APP- Scara1 - / -マウスは、当初、明らかな行動異常なく健康的に見られた。しかし、7 週齢に達した後、対照 PS1-APP マウスと比較して、PS1-APP- Scara1 +/-および PS1-APP- Scara1 - / -マウスの両方の死亡率の顕著な増加があった (図 4a)。160 日齢までに、PS1-APP- Scara1 - / +の 39%および PS1-APP- Scara1 - / -マウスの 53%が死亡したが、PS1-APP マウスの 16%と比較して死亡した。対照的に、PS1-APP- Scara1 - / -マウスは、我々のデータ収集が 160 日までに停止するまで、死亡し続けたのに対して、死亡 PS1-APP- Scara1 +/-マウスの数は 108 日でプラトーに達した。PS1-APP- Scara1 - / -マウスは PS1-APP- Scara1 +/-マウスよりも 160 日で死亡率が高かったが、これらの 2 つの遺伝子型の全体的な差異は統計的有意性に達しなかった (図 4a)。これらのデータは、Scara1 欠損が、PS1-APP トランスジェーンを発現するマウスにおける死亡率の増加をもたらすことを示す。また Ccr2 欠損 (単核食細胞漸増を減少させるが、その機能に影響を与えない欠損) で見いだされたものと同様である。そして単核細胞食細胞数または機能の遮断が AD マウスモデルにおいて有害な効果を有することを示す。

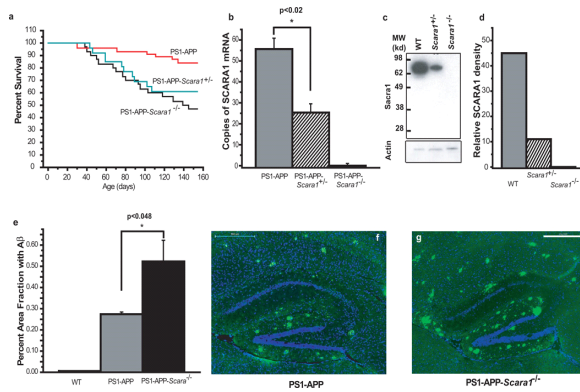


図 4

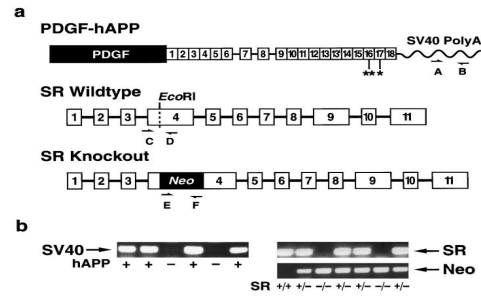


図 1

SR の欠如は、hAPP マウスにおけるアミロイドプラーク沈着に影響しない

3.2 論文B

3.2.1

Elimination of the Class A scavenger receptor does not affect amyloid plaque formation or neurodegeneration in transgenic mice expressing human amyloid protein

Frederick Huang 他

3.2.2 内容(一部抜粋)

hAPP トランスジェニックマウス(h はヒトを表す)におけるSR(Scara1)の排除

生体内で SR がアミロイド斑の形成および神経変性に決定的に重要であるかどうかを調べるために、ヒト Aβ 発現を高レベルで示す FAD 突然変異体 hAPP マウスを SR - / - マウスと交配した。病理組織学的分析のために、hAPP +/- SR + / +、hAPP +/- SR - / -、hAPP - / - SR + / +、および hAPP - / - SR - / - の遺伝子型を選択した(図 1)。

hAPP +/- SR + / +マウスにおけるアミロイド沈着は、6~8 ヶ月齢前後で始まる。SR 欠損が Aβ クリアランスを損ない、それによってアミロイド沈着を促進するかどうかを評価するために、野生型またはノックアウトマウスである 6 および 12 カ月齢の hAPP +/-マウスにおけるアミロイド沈着を比較した。チオフラビン S 染色は、hAPP - / -マウスにおいてプラークを同定せず、hAPP + / - SR + / +マウスおよび hAPP + / - SR - / -マウスにおいて同様の数および分布のアミロイド斑を示した。(図 2, 3a, 3b および 4) これは、SR の不在が hAPP +/-マウスにおけるアミロイド沈着を加速させないか、またはそうでなければ増強しなかったことを示す。

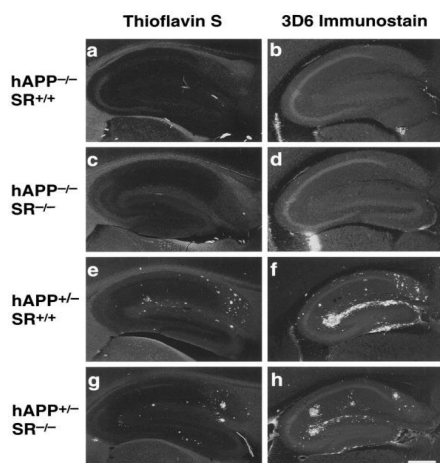


図 2

SR に対する野生型またはノックアウトである hAPP マウスにおけるアミロイド斑の類似性。12 ヶ月齢のマウスの矢状海馬切片を、チオフラビン S (a 、 c 、 e および g) または抗 A β 抗体 (3D6) (b 、 d 、 f および h) で染色し、hAPP - / - マウス (a ~ d) はアミロイド斑を有していなかった。d の左下部の明るい信号は、染色アーチファクトを表す。hAPP /A β (e-h) を発現する SR + / + および SR - / - マウスにおいて、同等のプラーク沈着が見出された。チオフラビン S は、より成熟したアミロイド沈着物の特徴である β -プリーツシートを主に染色するが、3D6 はまた、これらの 2 つのマーカーで得られる染色パターンを説明するより拡散性の A β 沈着物を標識する。スケールバー、180 μ m。

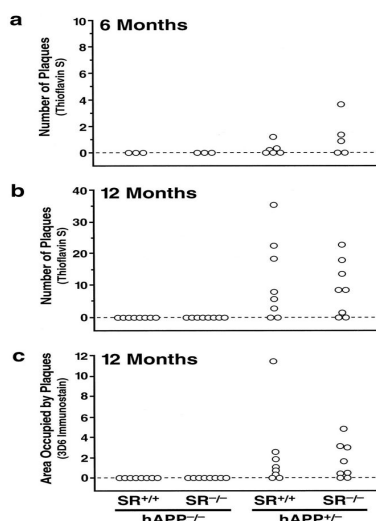


図 3

SR に対する野生型またはノックアウトである hAPP マウスにおける同等の年齢依存性アミロイド斑の蓄積。チオフラビン S 陽性のプラークを蛍光顕微鏡で視覚化し、材料 (材料) に記載されているように、6 ヶ月齢および 12 (b) ヶ月齢でカウントした。

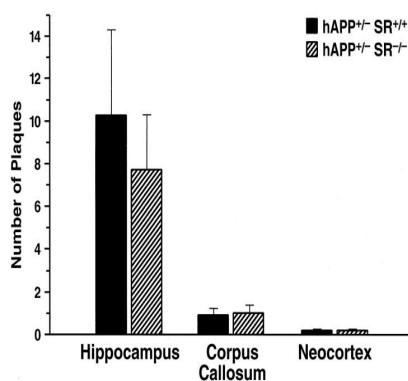


図 4

hAPP マウスにおけるアミロイド斑の局所分布は、SR によって影響を受けない。12 ヶ月齢のマウスの異なる脳領域 (遺伝子型あたり n = 8) でチオフラビン S 陽性プラークを計数した。データは、セクシ

オンあたりの平均プラーク数を表す。プラークの大部分は海馬で見られ、hAPP +/- SR + / +マウスと hAPP + / - SR - / -マウスのプラーク数には分析された脳領域のいずれにおいても統計的に有意な差はなかった。

脳切片を抗 Aβ 抗体 3D6 で標識し、Aβ 免疫反応性沈着物が占める海馬面積を測定すると、チオフラビン-S 染色の結果が確認された (SR 発現の有無にかかわらず、hAPP +/-マウス間に有意差は検出されなかった 3c)。hAPP +/- SR + / +マウスの他の系統におけるプラーク形成の初期段階での観察と一致して、プラーク負荷における実質的ではあるが同等の変動性がマウスの 2 つの群 (図 3) 内で見られた。

チオフラビン S 染色したプラークの領域分布およびサイズも、SR 発現の有無にかかわらず、hAPP +/-マウスにおいて非常に類似していた (図 2 および 4)。プラークの負荷は海馬で最大であり、海綿のすぐ上に大部分の吻状および新皮質のプラークが見出された。視床、小脳、または脳幹においてプラークは観察されなかった (データなし)。

SR の欠乏は、hAPP マウスにおける神経変性の程度に影響しない

AD における認知障害の最良の神経病理学的相関の 1 つは、特定の脳領域におけるシナプトフィジン免疫反応性シナプス前末端の喪失である。PDGF-hAPP マウスにおける

Aβ 発現の増加は、海馬の外側分子層におけるシナプトフィジン免疫反応性シナプス前末端の著しい減少および MAP-2 免疫反応性ニューロン樹状突起のより僅かな減少と関連する。したがって、研究者らは免疫標識された脳切片およびコンピュータ支援画像分析の共焦点顕微鏡法を用いて、異なるマウス群におけるシナプス前末端およびニューロン樹状突起の完全性を評価した。神経変性変化のこの半定量的評価は、多様な実験モデルおよび罹患したヒトの脳においてよく使用されている。これは、定量的イムノブロットとの比較、酵素結合免疫吸着アッセイによるシナプスタンパク質の定量、および立体的「ディセクター」アプローチの改変によって以前にも検証されている。

hAPP - / - SR + / +コントロールと比較して、hAPP - / - SR - / -マウスは正常レベルのシナプトフィジン免疫反応性シナプス前末端を有していた (図 5)。神経系 (CNS) の発達または神経変性の変化が含まれる。

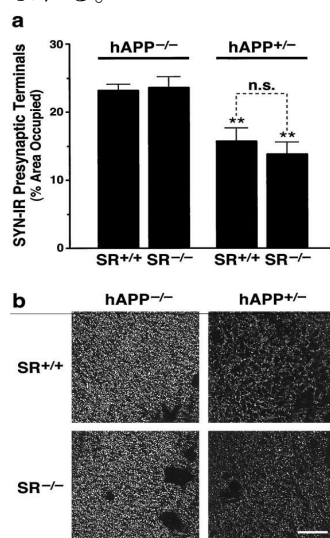


図 5

b SR 発現の欠如は、12 ヶ月齢の hAPP マウスの海馬におけるシナプトフィジン免疫反応性シナプス前末端の減少を妨げない。

a : コンピュータ支援画像解析を用いてシナプトフィジン免疫反応性 (SYN-IR) の密度を決定した。

対照的に、SR 発現を伴うかまたは伴わない hAPP +/-マウスは、海馬の外側分子層におけるシナプトフィジン免疫反応性シナプス前末端の有意な損失を有したが、これらのマウスにおける SR の存在または非存在は、神経変性の程度に有意に影響しなかった(図 5)。海馬の外側分子層における MAP-2 免疫反応性ニューロン樹状突起の密度も、hAPP + / -マウスと比較して、hAPP - / -対照 (Tukey-Kramer post-hoc 試験による $P < 0.05$) と同様のレベル (hAPP - / -SR + / + 37.5 ± 1.3 、hAPP - / - SR - / - 37.1 ± 1.3 、hAPP + / - SR + / + 31.8 ± 1.9 、hAPP +/- SR - / - 32.3 ± 1.6 ; 値は占有される画像面積のパーセントを表す)。

4. 考察

4.1 論文考察

論文 A ではマウスから単離したミクログリアでの取り込みなども確認した上で、Scara1 ノックアウトマウスにおいて脳から抽出した $A\beta$ の量そのものが増えていたことから、Scara1 によって生体内でも $sA\beta$ が減り、そこからできるアミロイド斑も減るということを示唆している。対して論文 B ではモデルマウスにおいて Scara1 のノックアウトによるアミロイド斑の数などの影響をみている。

これらの論文での相違点として主に以下の 2 点が考えられる。

a. $A\beta$ オリゴマーかアミロイド斑か

b. 使っているマウスの種類

a に関してはミクログリアは Scara1 によって $sA\beta$ の取り込みを促進されたと考えることができる。b に関しては論文 A では PS1-APP というアミロイド斑の凝集が速めのマウスだが、論文 B では J9 という蓄積が穏やかなマウスを使用している。したがって、実験期間に差があることになっている。また、ここでミクログリアの機能を考える。ミクログリアは $A\beta$ の除去に寄与する作用がある一方で、 $A\beta$ の濃度が高まり、タウ凝集によって多数のニューロンが損害を受けたことを感知すると、脳が細菌やウイルスといった病原体から攻撃を受けているとみなし、貪食作用から攻撃モードに変容する。こうなると周辺の細胞を破壊したりしてしまうのだ。

なぜ矛盾した結果が出てしまうのか、どこが矛盾しているポイントなのかを検証するために複数の結果を想定した追加実験を行う必要があると思われる。

4.2 追加実験

ここでは今現在の技術で実現し得るかは考慮しないものとする。将来的に実現が可能となればこの矛盾は解決される意味でこの追加実験を考えたい。

①マウスの種類をそろえる。今回は PS1-APP マウスを使用するとする。

② PS1-APP-Scara1+/+(a)、PS1-APP-Scara1-/(b)、ミクログリア欠損の PS1-APP-Scara1+/+(c)、PS1-APP-Scara1-/(d) マウスを作成する

③A β オリゴマーだけを染色するもの、アミロイド斑だけを染色するもの2つをマウスに投与する。(後者は可能だが、前者が今現在可能かどうかは不明瞭だ。)

④1ヶ月ごとに神経変性、sA β とアミロイド斑の沈着状況を記録する。

⑤これを6ヶ月観察する。

4.3 追加実験の結果予想とそれに基づく仮説

(1)a、b、c、d全て同じ結果になる

→ミクログリアは神経変性に全く関与しない。

(2)aとcだけA β の量が減少した。

→ミクログリアではなく Scaral だけがA β のクリアランスに関係している。ここからはa、b、dだけで考察していく。

(3)A β の沈着において、dは一次関数や二次関数などの数学的に何らかの規則にそって増えていくと考えられることを前提として、aとbの結果が等しく、関数の傾きがdと異なる。

→ミクログリアは6ヶ月の間は清掃モードとして常に働いている。攻撃モードには12ヶ月程度の沈着ではならず、ScaralはA β のクリアランスに全く寄与していない。

(4)途中まではa、b、dの関数は等しい(dとa、bには傾きに差があるとしても、関数の種類は等しい)が、ある時を境にしてa、bの関数は崩れ、神経変性の進行が加速する。

→ミクログリアは12ヶ月で清掃モードおよび攻撃モードどちらも発動する。このときも Scaral はA β クリアランスに関与しない。

(5)sA β とアミロイド斑の数がd、b、aの順に多く、神経変性の進行度合いもd、b、aの順に多い。

→ScaralはA β のクリアランスに有効的に寄与している。

(6)アミロイド斑の数にはaとbの間で顕著な差はないが、sA β の数はd、b、aの順に多くなっており、神経変性もd、b、aの順に進行している。

→ScaralはsA β の受容体として選択的に取り込みを促す。神経変性の度合いを記録することで、A β オリゴマーの毒性もはかることができる。

(7)(4)のような傾向が見られたが、ある時点を機にミクログリアが攻撃モードに入ってしまう、それにより神経変性の度合いは12ヵ月後a、bが等しくなる。

→攻撃モードはScaralの受容体としての効果を打ち消す勢いで、神経を変性させている。ScaralはA β クリアランスに寄与しない。

(8)sA β の数はaが一番少ないが、逆にアミロイド斑はbが一番少なくなっている。神経変性はaが最初の6ヶ月くらいまではaが一番進行していなかったが、ある時点でミクログリアが攻撃モードを発動し、12ヵ月後の神経変性の度合いはaとbは等しくなる。

→ScaralはsA β に選択的に受容体なり、ミクログリアの取り込みをsA β の数を増やす代わりにアミロイド斑の取り込みが減少している。ただアミロイド斑にもある程度の毒性があり、ある時点を機にミクログリアが攻撃モードになってしまう、それにより12ヶ月後には神経変性の進行度合いは等しくなってしまう。

5. 今後の展望

今回は時間の都合上、論文考察は2つの論文しか用いていなかったため、考察の信憑性が確かとは言いがたい。これからはより多くの文献を用いて考察し、自分でも実験を行うことで Scaral のはたらきを考察する必要がある。

ミクログリアおよび Scaral のはたらきを解明することで、これからのアルツハイマー病治療にも何か役に立つ可能性を秘めているのは事実だ。これらのはたらきに注目しつつ違う面からも考察を行うこと大切だと考える。

6. 参考文献

Newton ニュートン(2017年3月号)

7. 謝辞

これまでたくさんの疑問にお答えいただいた様々な大学の教授の方、また論文研究についてやこれまでの研究を教えてくださいました渡辺校長、そして私を指導して下さった櫻井先生、私の研究に協力して下さった皆様に深く感謝の意を表します。

原生生物の蛍光分光光度計による細胞数の計測

6年C組 西村 咲野

指導教諭 櫻井 昭

1. 要約

ミドリゾウリムシとブレファリズマの「ある特定の蛍光色素を反射すること」を利用して、蛍光分光光度計を用いて、培養液中の生きた微生物の個数を計測することを試みた。ミドリゾウリムシは、培養が不安定であり、細胞数の計測まで至らなかった。ブレファリズマは、培養が安定的に進み、細胞数の計測を行うことができた。その結果、実際に細胞数を希釈法でカウントした時と、蛍光分光光度計で計測した波長の変化には、ある一定の相関関係を見出すことができた。

キーワード 蛍光分光光度計(以下 Qubit) *Paramecium bursaria*(ミドリゾウリムシ)、*Blepharisma*(ブレファリズマ)

2. 研究の背景と目的

4年生から培養していたミドリゾウリムシの細胞数のカウントは毎日大変だった。不在時には友達にカウントをお願いしたこともあったが、上手く培養できたときは特に大変で、10 μ Lの小さな水滴の中を泳ぐ10cells以上ものミドリゾウリムシを目で追うのは至難の技だった。そこで、今年、ミドリゾウリムシを新たに培養し始めるにあって、カウントをより簡単するためにQubit(蛍光分光光度計)を用いたカウントの可能性を探ることにした。

これらの繊毛虫の色素は蛍光色素であり、発せられる光は蛍光のためその波長はQubitにより検出測定される。細胞数が多くなるにつれて単位体積あたりの蛍光色素の数が多くなるため、同じ波長の光を照射した時、細胞数が多いほど発せられる蛍光の波長は大きいと考えられる。よって、測定された波長とセル数の間に何らかの式を立てることができる。

3-2 実験1

3-2-1 目的

ミドリゾウリムシ(5月、6月)とブレファリズマ(7月以降)を材料に、個体数のカウントと、Qubitによる計測を並行して行い、相関関係を調べる。

3-2-2 実験方法

ミドリゾウリムシとブレファリズマの個体数カウントの方法は材料によらず同じである。

準備1: 培養液のみをチューブに入れ Qubitのfluorometerモードで赤色光(635nm)と、

3. 研究内容

3-1 実験仮説

ミドリゾウリムシ及びブレファリズマの色素は、光を吸収するとある特定の蛍光を発することで知られている。よってミドリゾウリムシ及びブレファリズマにある特定の波長を照射すると、照射した光とは異なる波長の光が発せられると考えた。また、

青色光(470nm)の照射をそれぞれ行い、コントロールデータを測定しておく。

	g	blue	fr	r	fr
5月7日		49.24	216.22		74.71

(比較参考データ)

準備 2：ミドリゾウリムシまたは、ブレファリズムを新しい培養液に移す。

カウント方法：

① クリーンベンチ内で培養液を、ディプレッションスライドガラスへ 1 mL 取り出す (滅菌済みピペットを使用)。

② 取り出した培養液からマイクロピペットを用いて、Qubit の観測用のチューブ 100 μ L \times 3 本、目視でのカウント用のシャーレに 10 μ L \times 10 ドロップ \times 2 セットにわたる (図 1)。

③ Qubit の fluorometer モードで赤色光 (635nm) の照射、青色光(470nm)の照射を ② で用意した 3 本のチューブに対して行う (図 2)。

④ ② で用意したシャーレを双眼実体顕微鏡にセットしセル数を計測する

なお、カウント作業は毎日昼 12:40 から行った。

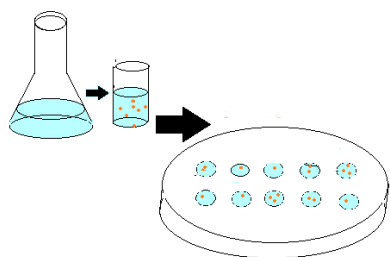


図 1 シャーレへの分配イメージ

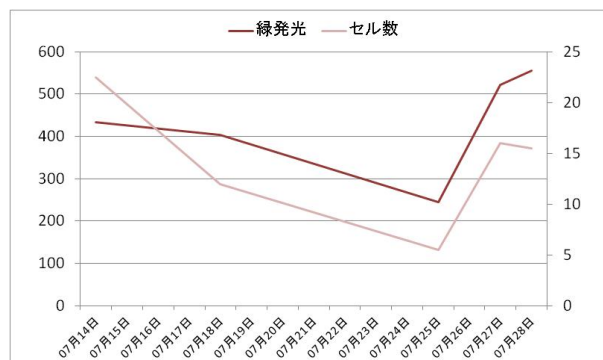


図 2 Qubit の fluorometer mode

実体顕微鏡で観察したとき、色が抜けたようになっているブレファリズムが多く見られた。ブレファリズムは長く光に当たると、自らがもつ色素を分解する性質があるとのことだったので、8/30 からは、インキュベータから取り出す時は段ボールの中に入れて運ぶなど、余分な光に直接さらさないように工夫した。

3-2-3 実験結果

ミドリゾウリムシを用いた実験では、個体が安定的に増殖せず、Qubit を用いた蛍光色素での計測を行えなかった。7月以降に培養を始めたブレファリズムは、個体が安定的に増殖したため、Qubit を用いた蛍光色素での測定を行うことができた。その結果は、グラフ 1 のようになった。



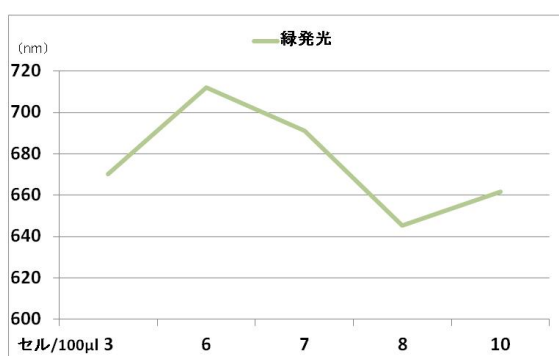
グラフ 1 ブレファリズムの目視による個体数変化 (セル数)と、Qubit による蛍光色素の波長の変化(緑発光)

3-3 実験2

3-3-1 目的

波長計測用とセル数の計測用の100 μ Lの中に、細胞が等しく入っている可能性は低くはないが、確かでもない。そこで、9月4日からのカウントでは細胞数を波長計測用、セル数のカウント用の間で確実に等しくするために、各回で Qubit の計測に用いたチューブ(3本)内の培養液をシャーレに移し実体顕微鏡でカウントし、細胞数と Qubit で計測された蛍光の波長のデータとの一対一対応を調べることにした。

3-3-2 結果



グラフ2 培養液中の細胞密度に対する反射光の波長の関係

結果のグラフは一次関数様になるのが望ましい。

4. 考察

セル数との相関がみられたのは緑色光の波長のみであった。青色光照射時の遠赤色光、赤色光照射時の遠赤色光では相関は見られなかった。

実験1のデータ(グラフ1)ではセル数と蛍光波長のデータが似通った推移を見せた。だが、100 μ L中のセル数、即ち細胞密度と蛍光波長との関係を数式にするには、相応の数学が必要なので断念した。

ブレのセル数と、緑色光の発光量の関係を見るために行った計測では相関がみられなかった(相関係数 0.0935) (グラフ2)。

5. 結論

今回の研究目標が達成できなかった主な原因を以下にあげる。

- (1) Qubit のチューブに入れる培養液の量が100 μ lでは少なすぎ、Qubit が十分に性能を発揮できるだけの蛍光色素の量に達していなかった可能性がある。
- (2) セル数と波長の一対一対応の実験は実験期間が短く取れたデータ数が少なすぎ、それぞれのセル数に対応する蛍光波長のデータが十分に取れず平均が取れなかった。
- (3) セル数と波長の一対一対応の実験(実験2)ではセル数をコントロールしなかったため、データが偏って出た。

今後の展望としては上記の原因を解消して、実験に十分な時間をかけて、さらなるデータ収集を行い、数学を勉強するか数学ができる人に手伝ってもらえば目的の式が得られる可能性は十分にある。

またこれが実現すると、他の蛍光色素をもつ原生物(ソライロラップムシなど)のカウントへの応用が期待できる。

6. 謝辞

ミドリゾウリムシ、ブレファリズムの準備や実験計画への助言などで多くの協力をいただいた櫻井先生、不在時に植え継ぎを請け負ってくれた結崎さん、細かな質問に返答を下さった神戸大学理学部洲崎敏伸教授に、この場を借りてお礼申し上げます。

植物の生長と生育環境

6年C組 出水明日香

指導教諭 櫻井 昭

1. 要約

植物の最適な生育環境を調べるため、植物に照射する光の波長を変化させた。また、育てる場所を土から水に変え、植物の生長の様子を比較した。土と水では土で育てた方がよく育った。また、光の波長によって、生長の度合いに大きな差がみられた。

2. 研究背景

私は以前から、品種改良等で植物自体を改良して安定した生産を目指すことよりも、栽培方法を変えることにより、よりよい植物を安定的に生産することに興味を持っていた。そこで私は、植物の栽培において水耕栽培などの、一般的な土を用いる育て方とは異なる栽培方法に目を付けた。そして、植物が発芽し、成長する環境が成長にどのような影響を及ぼすのか気になった。そのため、植物が根を張る培地を土と水で比較検討することにした。また植物は光合成によって多くの養分を得る。そこで、光合成において重要な条件である光の波長を変えることによって、植物の生育に適した光の条件を考えることとした。

3. 研究内容

3-1 植物の生長における光の波長、培地の変化の影響

3-1-1 実験目的

植物が生長する環境が、生長にどのような影響を及ぼすのかを調べる。そこで、植物の安定性と生長度合いの関係を調べるため、土培地と水培地を用意し、成長の様子を比較する。また、植物に重要な光合成

における光の波長の影響を調べるため、土培地、水培地のそれぞれを日光、蛍光灯、青色光、赤色光、緑色光、暗室下で育て、植物の生長に最も適した波長の光を探す。

3-1-2 実験仮説

土と水で比べると、土の方が根を張りやすいと思われるため、土の方がよく成長する。暗所では光を取り入れることができないため、種子が持っていた養分を使い切ったら枯れてしまう。緑色光はあまり光合成に利用されないためにほかの条件に比べてあまり生長せず、光合成に多く用いられる赤色光や青色光を照射したものは緑色光に比べてよく生長する。日光は光量が最も多いため、最も生長する。

3-1-3 実験方法

材料 ムギ

- ① 土を入れた入れ物(土培地)と水を入れた入れ物(水培地)をそれぞれ用意し、種をまいて暗所で発芽させる。
- ② 1つの入れ物につき1つの芽になるように間引きする。
- ③ 日光、蛍光灯、青色光(LED)、赤色光(LED)、緑色光(LED)、暗室光下に土培地と水培地の標本をそれぞれ2個体ずつ移動させ、育てる。

④ それぞれの標本を観察する。

3-1-4 実験結果

各個体の葉の長さを表に示す(表 1)。

また、各光における葉の長さの日ごとの変化比較を、培地別にグラフに示す(グラフ 1、2)。

	太陽光			
	土		水	
2月4日	×	4.6	7.8	6.6
2月10日	1	5.2	8.8	8.2
2月24日	7.2	7	9.9	10.1

	蛍光灯			
	土		水	
2月4日	17.2	15.6	10	11
2月10日	24.8	23.3	12.5	15.4
2月24日	35.2	35.5	22.4	22.4

	青色光			
	土		水	
2月4日	5	14.5	10.7	7.2
2月10日	16.7	16.8	10.8	12.1
2月24日	23.5	25.4	14	20.2

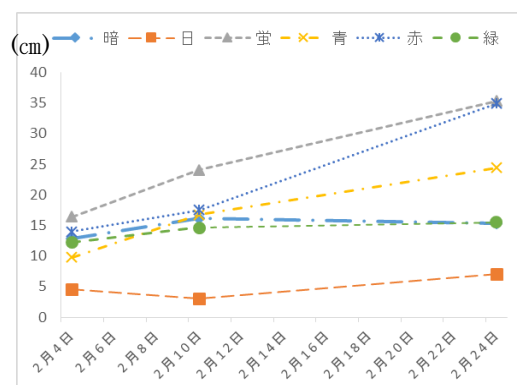
	赤色光			
	土		水	
2月4日	14	×	×	13
2月10日	17.5	×	×	19
2月24日	34.9	×	×	24

	緑色光			
	土		水	
2月4日	×	12.3	9.6	6.6
2月10日	×	14.7	15	13
2月24日	×	15.5	17.2	15.6

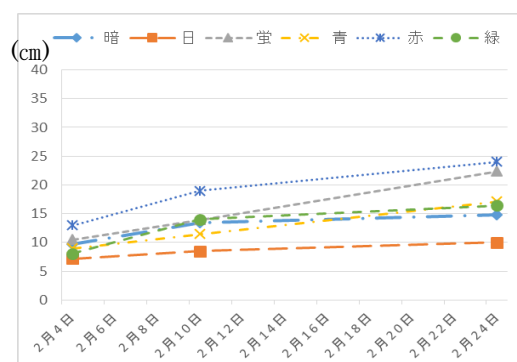
	暗所			
	土		水	
2月4日	13.2	12.4	12.8	6.7
2月10日	17	15.4	14.3	12.5
2月24日	14.8	15.8	15.7	13.9

表 1 各個体の葉の長さ

発芽した各個体における、最も長い葉の長径を計測。単位はcm。×は発芽しなかったことを示す。



グラフ 1 土培地の葉の長さ比較



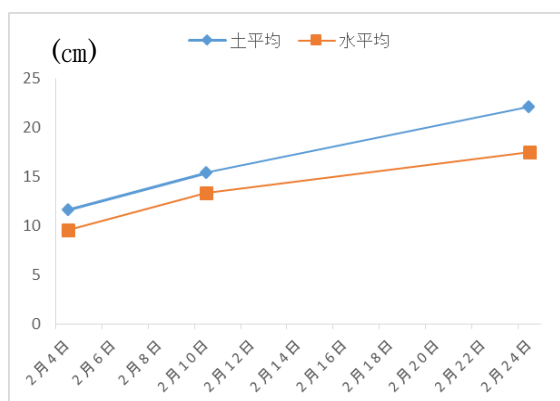
グラフ 2 水培地の葉の長

グラフ 1、2 より、どちらの培地でも蛍光灯下と赤色光下において葉の長さが長い。また日光下では葉の長さが短いといえる。

3-1-5 実験考察

グラフ 1、2 では葉が長く成長した赤色光下、暗室下で育てたムギがよく成長しているように見える。しかし、最終計測日には暗室の標本は枯れ始めていた。そのため、光合成を行わず、もともと発芽するために種子に蓄えていた養分のみで成長し、使い果たしたのではないかと思われる。また、暗室下で成長したムギは黄色がかかった色をしていたため、健康的な成長をしていなかった。また、赤色光下や緑色光下の標本も細長い茎に成長していた。また、計測値

も大きかった蛍光灯の標本、そして日光、青色光の標本は長さの伸びは少なかったものの、葉の色が濃く、しっかりした標本に成長していた。特に日光下の標本が最もしっかり育った。蛍光灯はLED下に比べて照度が大きかったのも一因であろう。また、水よりも土を使って育てた方がよく成長した(グラフ3)。



グラフ3 土と水での葉の長さ比較

この結果は、根を張った時に得られる安定感が土の方が勝っているからであると考えられるが、土に少し養分が含まれており、その養分が成長の一助となった可能性がある。次の実験では、養分を含まない土を用いるべきであると考えられる。

また、予定ではすべて発芽させてから実験を開始する予定だったが、時間の都合上発芽していなかったものも各条件下に置いた。その結果、そのまま発芽しなかった個体も多く極端に標本数が少なくなってしまった条件もあり、個体差が結果に反映されている可能性もある。

3-2 実験 植物の生長と光の波長の関係

3-2-1 実験目的

実験 A で得られた結果について、光種

と植物の生長の関係に絞って調べることとした。そして、実験 A では温度環境が一定ではなかったため、各条件での温度を揃えた。また、日光で植物が育つのは光の強さによるものなのか、光の波長によるものなのか調べるため、日光を減光シート(透過光率:6.6%)で制限し、LED下と正午の減光シート下の照度をおおよそ揃えた場所とLED(白色)下で育てたものを比較する。

3-2-2 実験仮説

日光下で最もよく成長する。また、減光シートを用いたものとLED下で育てたものは同じくらいの成長になる。暗室下ではすぐに枯れる。

3-2-3 実験方法

材料: チンゲンサイ

- ① 土を入れた入れ物(土培地)を用意し、種をまいて暗所で発芽させる。
- ② 1つの入れ物につき1つの芽になるように間引きする。
- ③ 日光、減光シート、LED(白色)、暗室光下に土培地と水培地の標本をそれぞれ4個体ずつ移動させ、育てる。
- ④ それぞれの標本を観察する。

計測した項目は、葉の枚数、光の明るさに加えて、図1に示す通りである。

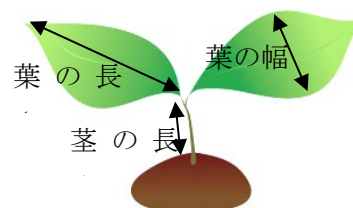
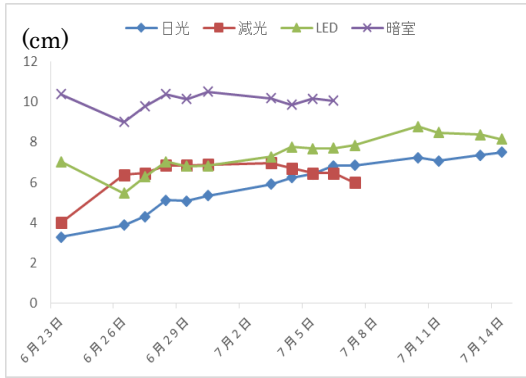


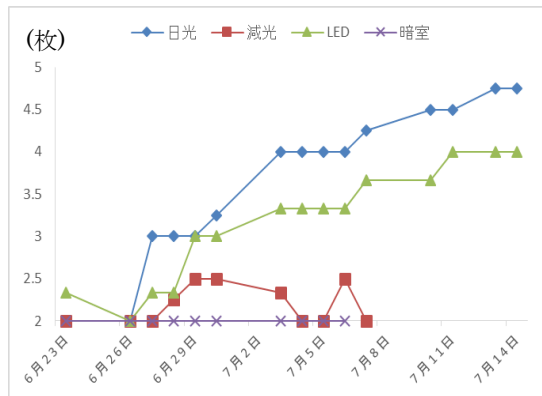
図1 植物の計測場所

3-2-4 実験結果

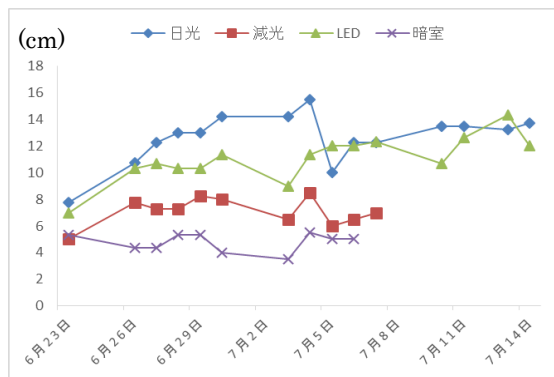
光種による、各計測場所の計測結果をグラフに示す。



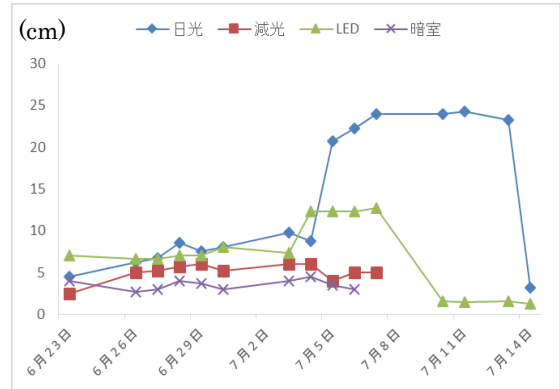
グラフ 4 茎の長さ比較



グラフ 5 葉の枚数比較



グラフ 6 葉の長さ比較



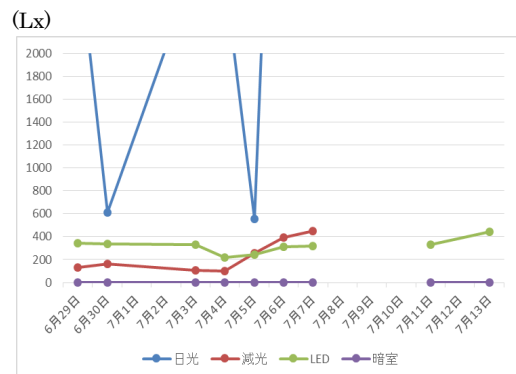
グラフ 7 葉の幅比較

日光で7月13日頃、LEDで7月10日頃に葉の幅が急激に短くなっているのは、子葉が枯れて落ち、本葉の幅を計測し始めたからである。なお、今回計測したチンゲンサイの子葉については、葉の長さよりも葉の幅の方が長い。

日光下で育てた標本が最も大きい値をとっていた(グラフ5, 6, 7)。また目視でも、最もしっかりと成長しているように見えた。茎の長さにおいては、暗室が最も長かった(グラフ4)。

3-2-5 実験考察

仮説通り、光量が圧倒的に大きい値をとる(グラフ8)日光下の標本が、計測値、また目視より最もよく育ったといえる。



グラフ 8 各光種における照度変化

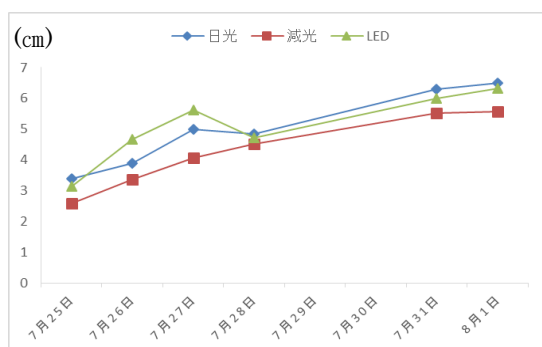
日光の値は他の標本の値に比べてはるかに大きいため、グラフの最大値を超えている。

晴天時の減光シート下の照度が LED 下の照度とおおよそ同じになるように減光シートを用意したが、実験時期が梅雨だったため、LED 下の照度が減光シート下の照度を上回る日が大きかった(グラフ 8)。LED 下の標本が減光シート下の標本よりも各計測値は大きくなっているが、光量によるものであるのか、波長によるものであるかは断定できない。

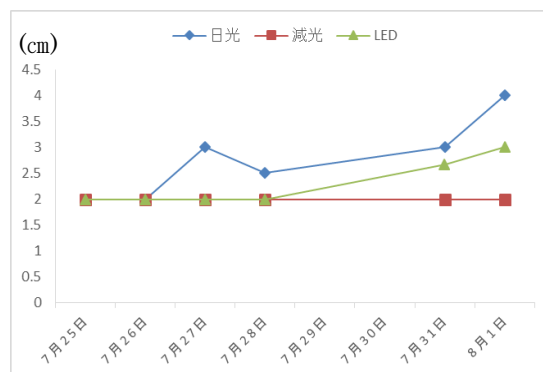
< 追実験 >

晴天時を予測して減光シートを用意したが、実験時期が梅雨であったため、減光シート下の明るさが予想よりも暗くなってしまった。そのため、LED と減光シート下での違いを明確に調べるため、梅雨が明けてからもう一度実験を行った。標本は減光シート下と LED 下、また対照実験として日光下で生育させた。実験方法等は同じなので省略する。

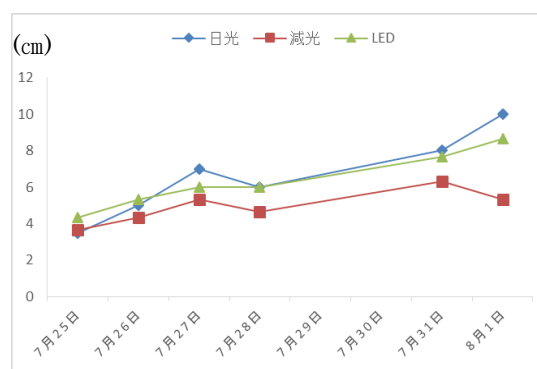
< 対実験結果 >



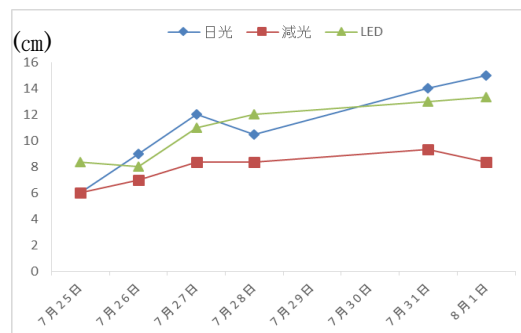
グラフ 9 茎の長さの比



グラフ 10 葉の枚数比較



グラフ 11 葉の長さ比較



グラフ 12 葉の幅比

< 追実験考察 >

仮説通り日光が最もよく成長した。また、グラフ 9~12、また目視からも、LED 下が減光シート下よりもよく成長している。しかし、これは LED が 24 時間照射していたのに対し、日光は日の出から日の入りまでの限られた時間のみ射すためである可能性が高い。だがこの結果より、日光下で生育した植物がよく育つのは光の成分が

はるかに優れているからではなく、受け取った光量の多さによるものであるということが推測できる。

4. 考察

白色光 LED は、青色光 LED と蛍光体を組み合わせることによって白に見せているため、青色光を含んでいる[1]。また、白色 LED のスペクトルより、青色の波長が他の波長に比べて非常に多いことが知られている[2]。それに比べ、日光のスペクトルをみると青色の波長が最も多いものの、全体的にどの波長も多く含まれており大差はない。実験 A のグラフ 1,2 より、LED の中では青色光が最も光合成に有効であるということがわかった。よって、実験 B で白色 LED 下でよく育ったのは、青色光が多く含まれているからではないかと考えられる。日光のスペクトルでは、日光と白色 LED で、照度と照射時間も揃えても、青色光が多く含まれる白色 LED の方が健康的によく育つのではないかと考える。

5. 今後の展望

現在植物工場では、青色 LED よりも赤色 LED の方が安価であることから赤色 LED を用いてレタスを栽培している。今回の実験結果では、ムギを赤色光のみで生育することは不可能である。なぜそのような結果になってしまったのかを考えたい。

6. 参考文献

- [1] 『LED の発光原理』, パナソニックホームページ
- [2] 『蛍光灯と LED 灯は何が違うかー子

どもの健康面からの考察ー』, 山城 眞(株式会社ベストエコロジー),

<http://www.suikou-saibai.net/blog/2017/01/12/398>

<http://homeguides.sfgate.com/difference-between-natural-artificial-light-85488.html>

<http://hortsci.ashsp+6ublications.org/content/43/7/1951.full>

7. 謝辞

研究の際、相談に乗って下さり、丁寧な指導をしてくださった櫻井昭先生に感謝の意を表します。

DNAによる雌雄判別法の確立

6年A組 米田江里奈

指導教諭 櫻井 昭

1. 要約

私は、DNAを用いた植物の雌雄判別に興味を持ち、研究を始めることにした。雌雄異株の植物には、実をつける植物や、雌雄によって成長させたほうが好ましい雌雄の異なる特徴をもつ植物があるので、DNAを用いて雌雄判別をして、成長し始めた早い段階に雌雄で育てたい方を選び育てる方法を見つけようと考えた。そこで、雌雄異株であるピスタチオのDNAによる雌雄判別を行おうと考え、ほかの植物の雌雄判別法を試みることにした。

キーワード ピスタチオ、アスパラガス、PCR法、DNA、抽出、プライマー

2. 研究の背景と目的

植物の雌雄判別をDNAから行う先行研究において、多く試みられている種はアスパラガスであった。そこで、先行研究の追実験を行うことで、雌雄判別法を知る手掛かりを得られないかと考えた。また、アスパラガスの雌雄判別で用いている方法を他の植物に応用できないかと考え、アスパラガスとは異なる雌雄異株の植物のDNAを抽出し、雌雄判別に応用しようと考え、まずはDNA抽出の検討を行うことにした。

いて行った(表1)。結果より、(1)の方が精度よく抽出しやすいことが分かった。

表1 DNA抽出結果

アスパラガス	抽出量 ($\mu\text{g/ml}$)	純度
2015/11/14①	3.4	2.05
②	2.7	1.52
③	1.6	1.44
④	1.9	1.96
⑤	1.6	2.2
⑥	3.1	2.13
⑦	0.1	0.81
2016/10/13	261.5	64
山椒		
2017/6/23 雌株	24.9	1.65
雄株	1	0.55
メダカ		
2017/7/13 雌株	2.6	1.06
雄株	8.4	0.99

3. 研究内容

3-1 DNA抽出の検討

以下に示す、2種類のDNA抽出キットを用い、植物からのDNA抽出の検討を行った。

(1)Plant Genomic DNA Extraction System

(2)Dneasy Plant Mini Kit

材料はアスパラガスの葉を用いた。抽出したDNAの純度や収量は、分光光度計を用

3-2 PCR法を用いた雌雄判別

3-2-1 実験目的

3-1で抽出したDNAを用い、アスパラガスの雌雄判別に利用されているDNAの塩

基配列を、PCR 法により増幅させ、電気泳動法を用いて確認する対実験を行った。

3-2-2 実験方法

PCR reaction Mix の各溶液の割合は以下の通りである。

Genomic DNA 24ng、dNTPs 10μL、primer R 2.5μL、primer F 2.5μL、10×PCR Buffer 2.5μL、Taq ポリメラーゼ 0.1μL、Total 25μL

また Primer は先行研究で示されていた 4 種類を用いた(表 2)。そして、PCR 法は、先行研究で示されていたプログラムに従って行った(表 3)。

実験はプライマーと Agalose Gel の濃度の組み合わせを変えて、3 回行った(2016/1/28、2016/7/13、2016/8/17)。その 3 回の組み合わせは、表 4 に示した。

表 2 用いたプライマーの塩基配列

プライマー名	アニーリング時間	DNAの塩基配列
Asp1-T7-F	59°C 30s	CTTGGCGTGAATACGTTGC
Asp1-T8-R	59°C 30s	TCTCTTGTCAATATACTC
Asp2-SP6-F	59°C 30s	GCTCTTTGAGGGTGTTF
Asp2-SP6-R	59°C 30s	TGCTCCTCCACTCTCA
Asp4-SP6-F	60°C 30s	AGGCCTCTCAAGTTTCA
Asp4-SP6-R	60°C 30s	AGCAGATCCCACATTGA
Asp8-T7-F	50°C 30s	AGATCTGAGATCCGGTTCC
Asp8-T7-R	50°C 30s	AATAGTTTCATGGAGGAAGG

表 3 PCR プログラム

94°C	30 秒	32 cycles
94°C	30 秒	
50°C - 60°C (表 2 参照)	30 秒	
72°C	40 秒	
72°C	5 分	

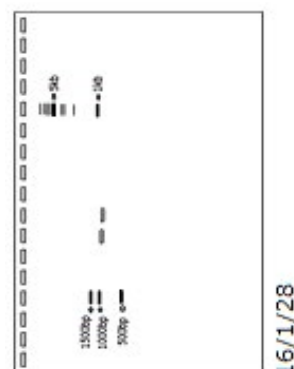
表 4 実験で用いたプライマーの種類

	Genomic DNAs	Marker	Agalose Gel
2016/1/28	②④	Asp1-sp6, Asp2-sp6, Asp4-6, Asp8-T7	1%
2016/7/13	②	Asp1-sp6, Asp2-sp6, Asp4-6, Asp8-T7	3%
2016/8/17	②④	Asp4-6	3%

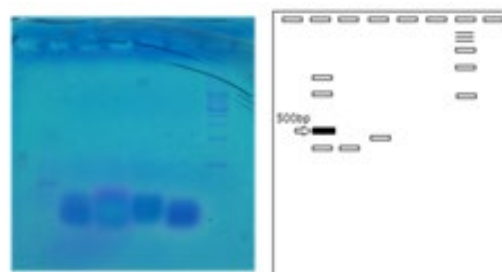
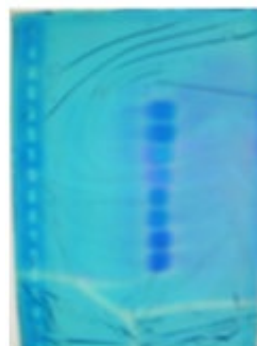
AgaloseGel 濃度

3-2-2 実験結果

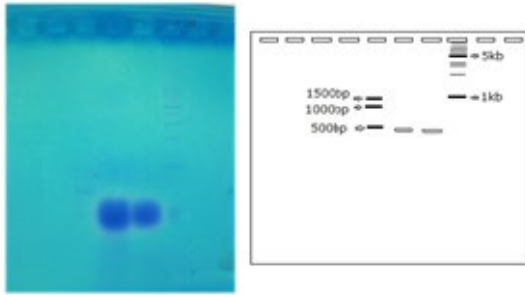
以下のように、電気泳動法によりバンド (DNA 断片) が確認できた (左; 写真、右; バンドの値)。



結果1 2016/1/28



結果2 2016/7/13



結果3 2016/8/17

Asp4-6 のバンドが 1,000bp に見られた。中央のあたりにマーカーが見られた。

これはいずれも Asp4-SP6 のプライマーで増やした DNA で鋳型 DNA が異なるものである。

3-2-3 アスパラガスの雌雄判別の考察

このことから、アスパラガスの雌雄判別が一部のプライマーではできたが繰り返しできなかつた。ほかの植物への応用性が低いと考えられる。また、PCR によって DNA が増幅されたのかが、電気泳動がうまくいっていないので少し疑問がある。(2004 Jamsari A¹)

3-2 他の方法での試行

雌雄異株で研究がなされていて雌雄が分かっているものには、他にもイチョウ、カキ、などがある。植物と動物の DNA の雌雄の違いの関連性を調べた研究が進んでいる。このことから、以前に行っていたアスパラガスにある DNA の塩基配列を用いて構築したプライマーを用いた実験から、動物雌雄で異なる DNA の塩基配列との関連性があると考えられる植物の DNA の塩基配列を利用して実験を行うことにした。この実験においては、雌雄異株がはっきりわかっている山椒を用いて実験を行った。また、動物との関連性を知るため、身近に

あるメダカを動物と植物の比較として用いた。

3-2-1 実験仮説

どんな植物においてもプライマーを用いることで雌雄判別ができる。また、動物にも共通しているので動物の雌雄判別もできる。

3-2-2 実験方法

材料

山椒(雌雄わかっている)、ヒメダカオス、メス、以前抽出したアスパラガスの DNA 方法

DNA の抽出を以前と同様の方法で植物から行った。

PCR reaction Mix の各溶液の割合は以下の通りである。

DW 6 μ l, 2 \times Buffer 25 μ l, 2mM dNTPs 10 μ l, Primer F 1.5 μ l 10 pmol/ml, Primer R 1.5 μ l, KOD FX 1 μ l, Sample 5 μ l, Total 50 μ l

動物にも汎用性があるとされるプライマーを用い(表 5)、PCR プログラムもその先行研究に従って設定した(表 6)。

表 5 用いたプライマーの塩基配列

DMY-F	CCGGGTGCCCAAGTGCTCCCGCTG
DMY-R	GATCGTCCCTCCACAGAGAAGAGA

表 6 PCR プログラム

98°C	2分	30 cycles
98°C	10秒	
55°C	30秒	
68°C	60秒	
78°C	5分	

3-2-3 実験結果

なにも結果が得られなかった。メダカの DNA 抽出においては、分光光度計で DNA が確認できていたので、PCR か、電気泳動での操作に問題があったと考えられた。しかし、コントロールをしっかりと設定できていなかったため、どちらに原因があるのか検証はできなかった。

難うございました。

4. 考察、今後の課題

DNA の抽出が出来ているか、電気泳動法によって確認したところ、ラダーが現れなかった。これは、電気泳動に使用した DNA 量が少なかったため確認できなかった可能性もある。よって、DNA 抽出が出来ているのか確認するための方法を検討したい。

DNA を抽出後、PCR で増やしたが再度確実に実験できなかったため、繰り返し実験が行えるようにしたい。DNA の抽出から確認まで時間がかかるので、短時間で容易に雌雄判別できる方法を模索したい。また、電気泳動後に染色する方法を DNA がどのくらい含まれているかを考えて方法を変えて実験を行い、PCR ができているのか調べ、新しい方法への応用をしたい。

5. 参考文献

- [1] 「Plant Genomic DNA Extraction System」
- [2] 「Dneasy Plant Mini Kit」
- [3] 「メダカ幼魚の簡易・迅速な性別判断方法」西口慶一 著 医学と生物学 第 155 巻 第 2 号(2011.2)

6. 謝辞

櫻井先生、色々なアドバイスを頂き有り

レンズの収差についての研究

3年A組 柴田 凌輔
3年A組 鶴崎 桐梧
指導教諭 藤野 智美

1. 要約

私たちは天体の観察に必要な天体望遠鏡の仕組みについて興味を持った。そこでレンズが作り出す像の仕組みについて実験を行ったところ、レンズを2枚組み合わせる際に「像のぼやけ」が発生することに気づき、その要因として「レンズの収差」という現象に巡りついた。本研究では、この収差を確認し、定量化を試みた。

キーワード 凸レンズ、凹レンズ、レンズの公式、レンズの収差、屈折

2. 研究の背景と目的

天体望遠鏡は、レンズを複数枚重ねた仕組みからできている。その仕組みに興味をもった私たちは、自作の望遠鏡を目指し、レンズを通る光が作り出す像の仕組みについて研究を行なった。

た公式から算出した理論値と比較した。なお、実験は光学台を用いて行い、スクリーンを動かして、像がはっきりと映し出される位置を測定した。なお、レンズの焦点距離(f)については、事前に測定を行なった。
<結果>

3. 研究内容

3.1 実験1 1枚のレンズが作る像

<実験内容>

1枚のレンズが作る像の位置や倍率は、以下のレンズの公式によって表される。

凸レンズ1枚・・・ f

凹レンズ1枚・・・ $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{f}$

a : 光源からレンズまでの距離

b : レンズから像までの距離

f : レンズの焦点距離

実験①では、光源からレンズまでの距離(a)を変化させたときのレンズから像までの距離(b)を測定した。この測定値を前述し

凸レンズ、凹レンズ共に理論値と実験値の誤差はほとんどなく、この公式を利用してレンズが作る像の位置を算出できることが確認された。

3.2 実験2 2枚のレンズが作る像

次に、天体望遠鏡や顕微鏡の仕組みとして用いられている、複数枚のレンズの組み合わせによって作られる像について実験を行なった。なお、実験は光学台を用いて行い、スクリーンを動かして、像がはっきりと映し出される位置を像の位置とした。

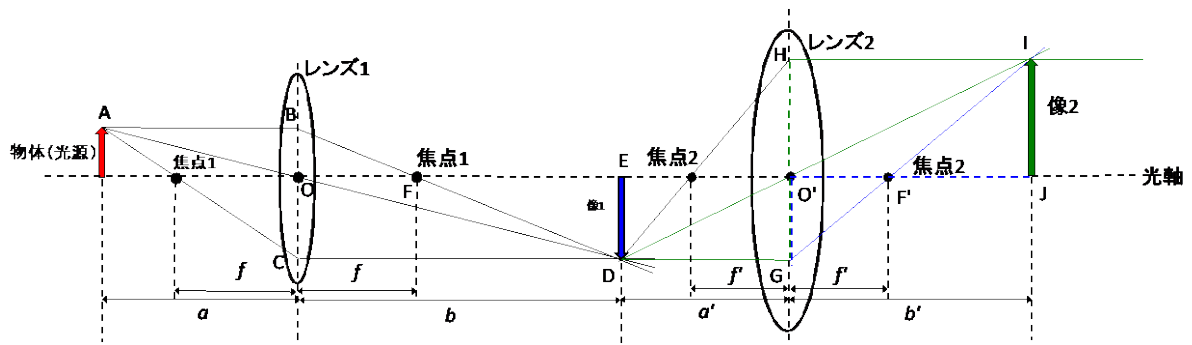


図 1

<実験内容>

- ①図 1 のように、実験 1 で作成した像に対して焦点距離(f')がわかっているもう一枚のレンズ 2 を配置する。
- ②レンズ 1 によって作り出された像 1 をレンズ 2 に対する物体とし、レンズ 1 と物体までの距離(a)を 1cm ずつ移動させた際の、像 1 とレンズ 2 の間の距離(a')、レンズ 2 と像 2 の間の距離(b')について測定した。
- ③レンズ 2 についてもレンズの公式が成り立つものと仮定し、レンズ 2 と像 2 の間の距離(b')について理論的に算出した値と実験値を比較した。

$$\text{レンズ 2} \cdots \frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} = \frac{1}{f'}$$

<結果>

- ・図 2 のように、レンズ 2 が作り出す像がぼやけることが観察された。



図 2

- ・レンズ 2 と像 2 の間の距離(b')について、理論値と実験値に一定の誤差を確認した。

3.3 レンズの収差

実験 2 の結果について参考文献を調べたところ、「レンズの収差」という概念にたどりついた。収差とは、レンズや反射鏡によって像を作る際に、一点から出た光線の束が完全には一点に集まらず、像のぼやけや歪みを引き起こす現象である。今回は収差のうち、以下の 2 種類を取り扱った。

・軸上色収差

光の波長によって屈折率が異なるため、焦点が合わない現象(図 3)。

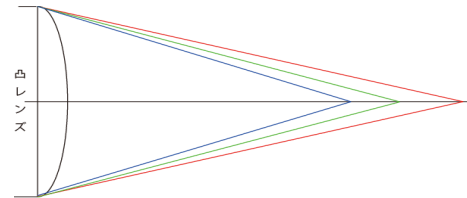


図 3

・単色収差

光の入射する場所によってレンズの曲がり具合が異なるため、単色光を用いても焦点にずれが生じてしまう現象(図 4)。

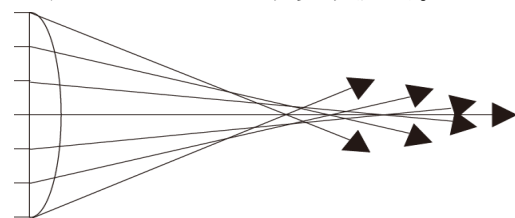


図 4

3.4 実験3 軸上色収差の確認

両凸レンズに様々な色の光のレーザーを同じ位置、同じ角度で照射し、レンズを通過した後の光の道筋を観察した。

<実験内容>

赤色、青色のレーザーの光を両凸レンズの光軸に平行になるように照射し、色ごとの経路の違いを確認した。

<結果>

図5のように赤と青のレーザーの光の経路に差が見られ、軸上色収差が確認された。

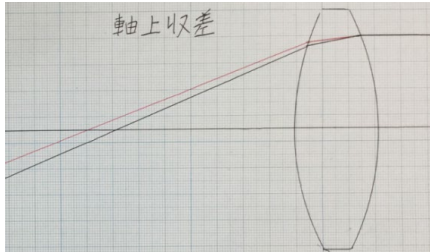


図5

3.5 実験4 単色収差の確認

<実験内容>

単色収差の定量化を試みるために、レンズの上端から下端にかけて、光軸に平行になるように緑色のレーザーを配置し、入射位置を光軸から2mmずつずらしたときの光の経路を記録した。記録結果から、屈折した光と光軸が交わる点とレンズの中心までの距離を計測した。

<結果>

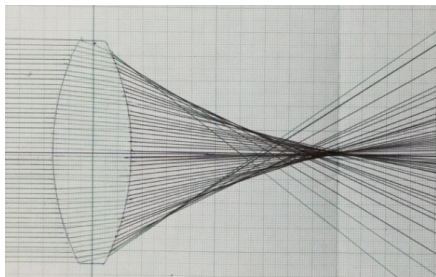


図6

図6のように、光軸から離れると交点ま

での距離が短くなる傾向が見られた。

・図7のように、光軸に近い場所からの入射光のデータにはばらつきが見られた。

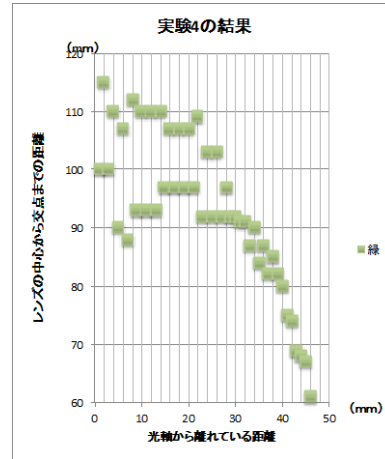


図7

4. 今後の展望

図7のデータの解析を行い、データがばらついている部分についての検証を行いたい。それらの考察をもとに、レンズの収差の定量化を行いたい。

5. 参考文献

[1] 潮 秀樹「よくわかる光学とレーザーの基本と仕組み～光の性質とその応用～」

[2] 前田 護治「光の基礎から応用先端技術まで未来をひらくフォトンクスをマスターする」

[3] 斎藤 晴司「絵と光学基礎のきそ」
http://www.enjoy.ne.jp/~k-ichikawa/iRay_LensAberration.html

6. 謝辞

今回の研究にあたり、ご指導くださいました顧問の藤野先生、ありがとうございました。

筑波エアロスペーススクール 2017 参加報告

5年B組 伊藤 愛結

1. 要約

エアロスペーススクールは、JAXA が主催している、日本の宇宙開発の最前線を体験することを目的とした 3泊4日のプログラムであり、大樹、角田、筑波、調布で開催されている。私が参加したプログラムが行われた筑波宇宙センターは、日本の宇宙航空研究開発の拠点として中核的な役割を担っており、日本の主力ロケットの研究開発をはじめ、人工衛星の運用、国際宇宙ステーション「きぼう」日本実験棟での宇宙環境利用、そこで活躍する宇宙飛行士の養成など、宇宙開発に関わる最先端の研究開発が行われている。本プログラムでは、このような幅広い観点から、日本の宇宙開発の過去・現在・未来について考える。



2. 活動報告

プログラム中には、宇宙開発に携わるさまざまな仕事に関する講義の他、実習を含めて宇宙の基本から、最先端の技術を幅広く学び、その上でこれからの宇宙開発がどうあるべきかについてディスカッションをし、ミッション報告会を行った。

開催日時 2017年8月7日~10日

開催地 JAXA 筑波宇宙センター

参加者 高校1~3年 男女各12人

(1) 1日目

1日目は、主にロケットに関する講義と実験を行った。

講義 日本のロケット開発

—H3 ロケットで目指す姿—

ロケットの飛ぶ仕組みと構造や、それに運ばれていく衛星の種類と特徴、エンジンについての基礎知識を与えられた上で、柔軟性や高信頼性、低価格を掲げ、サービス面に重点を置いた H3 ロケットについての講義を受けた。

講義・見学 総合環境試験について

—宇宙機の過酷な環境と試験—

電磁波、音、振動などのさまざまなストレスを受ける宇宙機の宇宙空間での故障を避けるために、宇宙と似た環境を作り出し、地上で何度も実験している。実際にはロケットを三方向に揺らした後のひずみを測定したり、ロケットと同じ音を当てたり、真空状態で光を当て続けたり、液体窒素で冷やした状態で1週間から2ヶ月ほど経過を観察したりするそうだが、その中でも総合

環境試験棟にある 13m \emptyset スペースチャンバ(真空及び熱的環境における耐環境性を確認するための設備)やXeランプ(ソーラーシミュレータの光源)などを見学した。

実習 モデルロケット製作

6つのグループに分かれ、事前に配られたキットを用いてモデルロケットを製作した。基本は普通の火薬で飛ぶロケットだが、前方に取り付けた生卵を守るためにクッションを製作したり、パラシュートの大きさを変えたりして工夫した。

(2) 2日目

2日目は、宇宙開発の中心となっている人工衛星や探査機についての講義と実習を行った。

実習 モデルロケットの打ち上げ

それぞれのグループが製作したモデルロケットを打ち上げ、着陸時に人が亡くならないよう安全性を重視したロケットについて考察した。打ち上げの際は、打ち上げ高度、発射点から着地点の距離、人間に見立てて搭載した生卵が割れたかどうかを判断基準として評価を受けた。パラシュートを大きくした方が、落下速度が遅くなると予想したグループが多かったものの、大きすぎてパラシュートが出なかったり、火が移ったりしてしまった。逆に、ロケットが重すぎなければ、パラシュートはある程度の大きさで良いということがわかった。私たちは楽しんで製作したが、夢だけでなく命もかかっているJAXAのロケットは、より精密に、真剣に作られていることを感じた。

講義 追跡管制について

地球の観測やGPSの運用、地球の起源の探索などを行っている人工衛星や探査機に指令を送ったり情報を受け取ったりする方法について、パラボラアンテナを使う方法を知り、その交信できる時間に限りがあるという欠点を克服するための中継衛星などがあるということを学んだ。

講義・実習 衛星追跡

八木アンテナを製作、それを用いて衛星追跡を行った。八木アンテナとは、素子の数で調節できる指向性アンテナである。角材にアルミ棒や銅棒をさしただけのものであるが、棒の長さや曲げの大きさである衛星の電波を受信出来るようになった。秒単位で方角と高度を変えながら、15分ほどかけて追跡した。



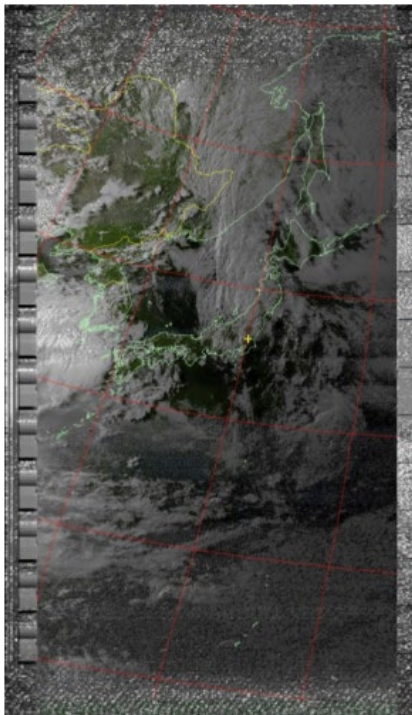
ビルなどの遮蔽物がないところで測定すると、以下のような日本列島にかかる雲の様子を確認することができた。

図は二回目の測定時のものである。

今回測定した衛星NOAAは、NASAが打ち上げ、現業利用をNOAA(アメリカ海洋大気庁)が行っている気象衛星である。

1回目 8/8 13:55~14:10 NOAA 19

2回目 8/8 17:34~17:49 NOAA 15



講義・実習 宇宙からの地球観測

地球観測はアメリカ、ロシアが偵察衛星として利用していたのが始まりであるが、現在では災害や気象の状態を観測したり、長期間の観察による変化をグローバルな視点から見たりすることを可能にしている。さらに同じ条件で定常的に観測できるので、科学研究、ビジネス、行政、個人の生活など多くの用途がある。

これらの衛星から得られた画像を解析した。緑、赤、青の波長で撮られた画像を色合成して実際に私たちが見えているような画像(トゥルーカラー画像)を作ったり、青の画像に衛星の緑の波長、緑の画像に赤の波長、赤の画像に近赤外線の波長を割り当てて色合成して植生の活発さをはかる画像(フォルスカラー画像)を作成したりした。

(3) 3日目

3日目は、宇宙に送り出すそのものでは

ないが、主にそれらを支えているものについての講義を受けた。

実習 宇宙飛行士模擬訓練体験

宇宙飛行士の体験として、宇宙飛行士適性検査、「きぼう」日本実験棟モデル内の見学とその中での模擬訓練などを行った。個人の能力に加えて、閉鎖的空間で特定のクルーと協力してミッションに臨むためのチームワークが大切だと知った。

講義 有人火星探査と特殊環境での生活

1960年代には宇宙での活動は生存が課題だったが、近年では長期滞在するための快適な環境づくりが課題となっている。この講義では、自立的生活システムの確立や放射線や太陽風対策といった物理的制限の解決だけでなく、クルー死亡またはミッション喪失の危険性、長期間の閉鎖的隔離環境での心理学的・社会的適応の問題を解決しなければならないということを学んだ。

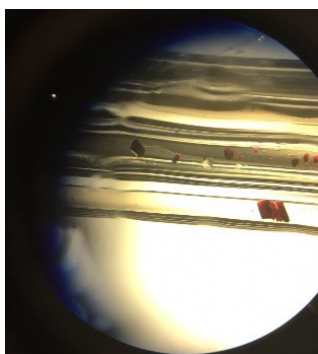
講義・実習 タンパク質結晶生成実験

特定のタンパク質の構造を精密に調べるために、結晶化した。対流が起こらないので高品質のものができやすいため、宇宙で作成することになった。新薬の開発などにも利用が期待されており、精密な構造情報が必要とされている。実習では、実際に金井宣茂宇宙飛行士が研究されている方法で、ウマのヘモグロビンを用いて生成を行った。図は顕微鏡で結晶を観察した物で、少し大きくなった結晶が見られた。

講義 宇宙開発を支えるさまざまな仕事

JAXA は打ち上げのためのプロジェクト

が目立つが、広報、ロケットや輸送系を担当する部門、衛星系を担当する部門があることや、それぞれの部門の特徴、種子島宇宙センターの施設、ロケットの打ち上げに関わる企業のことなどを伺った。



職員交流会

これまでに講義をしてくださった JAXA 職員の方がお集まりくださり、講義のときにわからなかったことを質問したり、進路について相談したりした。

(4) 4日目

4日目は各班によるディスカッションとプレゼンテーションを行った。

ディスカッションでは、宇宙医学から宇宙食、エンジン開発やさらには宇宙飛行士を目指す人まで、宇宙のさまざまな分野に興味をもち、独自の視点を持った仲間が、それぞれの世界観を交差させた。私たちの班について少し述べると、たくさんの講義、実習の中で特に印象に残ったのは、意外にも医療分野だった。トレンドイなものもあるが、「宇宙開発の未来を考える」というテーマに基づいて考察するうち、なぜ宇宙開発をするのか、地球が住みにくくなるためのために火星探査をするのではなく、地球を守るために研究するべきではないかと考え、

「生命」について考えるようになったからである。こうして、他の班とは少し視点の異なる、技術面以外からの考察とプレゼンテーションができた。

3. 感想

このように本プログラムでは、さまざまな視点を知ることにより、たくさんのインスピレーションを得た。これだけでも得るもの十分だが、私は学問分野の刺激よりももっと大きなものを得ることができた。尊敬できる仲間である。はじめ、私は宇宙自体に興味があるわけではなく、みな熱意に取り残され怖じ気づいていたが、宇宙分野以外でも個性的で人間的に面白く、刺激を与えてくれた数多くの仲間と出会えた。また、日本の宇宙開発の最先端を支える人々など、具体的に指標となる大人にも出会うことができた。



4. 謝辞

参加前にご助言を下された本校の藤野智美先生、川口慎二先生、スペーススクールのために講義を開いてくださった JAXA 職員の皆様、ご指導やご助言を下された、宇宙教育センターの宮田景子さんにこの場をお借りして深くお礼申し上げます。