中線定理とスチュワートの定理の拡張

4 年 A 組　井上　友裕
指導教員　川口　慎二

１．要約

△ABC の辺 BC を 2 等分するときに成り立つ中線定理を拡張したスチュワートの定理を用いて、辺 BC を等分する点の個数を一般化した定理を証明した。また、この定理から既存の中線定理を拡張した定理を導出し、二つの定理の特徴について考察を行った。

キーワード　中線定理　スチュワートの定理

２．研究の背景と目的

中線定理を授業で学習し、等分する点の個数を変えるとどのような結果が得られるのだろうかと興味をもった。調べた結果、中線定理を拡張したスチュワートの定理を知り、これを用いて等分する点の個数を一般化した定理を証明しようと試みた。

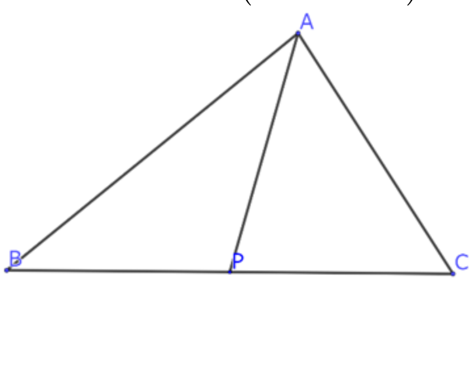
３．研究内容

３－１　中線定理とは

定理 1（中線定理）

△ABC と辺 BC の中点 P について次の式が成り立つ。

$$AC^2 + AB^2 = 2\left(BP^2 + AP^2\right)$$



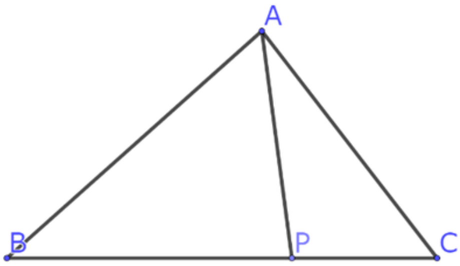
中線定理は三平方の定理で証明できる。

３－２　スチュワートの定理とは

定理 2（スチュワートの定理）

△ABC の辺 BC を点 P で内分すると、次の式が成り立つ。

$$AC^2 \cdot BP + AB^2 \cdot CP = BC\left(BP \cdot CP + AP^2\right)$$



スチュワートの定理は三平方の定理または余弦定理で証明できる。

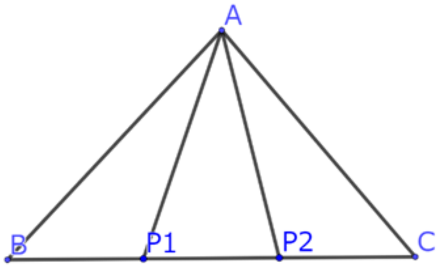
３－３　３等分したとき

命題 1

△ABC の辺 BC を点 P_1, P_2 で三等分したとき、

$$AC^2 + AB^2 = 4BP_1^2 + AP_1^2 + AP_2^2$$

が成り立つ。



この命題には主に 2 つの証明方法がある。

(ⅰ)中線定理を使う方法

①$\triangle ABP_2$ の辺 BP_2 の中点 P_1 に対して中線定理を使う。

$$AB^2 + AP_2^2 = 2\left(BP_1^2 + AP_1^2\right)$$

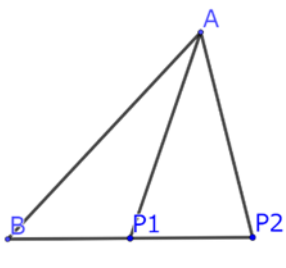
②$\triangle AP_1C$ の辺 P_1C の中点 P_2 に対して中線定理を使う。

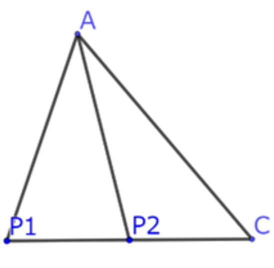
$$AP_1^2 + AC^2 = 2\left(BP_1^2 + AP_2^2\right)$$

③①，②で導いた式を足して計算する。

$$\begin{aligned} &AB^2 + AP_2^2 + AP_1^2 + AC^2 \\ &\quad = 2BP_1^2 + 2AP_1^2 + 2BP_1^2 + 2AP_2^2 \end{aligned}$$

$$AC^2 + AB^2 = 4BP_1^2 + AP_1^2 + AP_2^2$$





(ⅱ)スチュワートの定理を使う方法

①点 P_1 に対してスチュワートの定理を使う。

$$\begin{aligned} &AC^2 \cdot BP_1 + AB^2 \cdot CP_1 \\ &\qquad = BC\left(BP_1 \cdot CP_1 + AP^2\right) \end{aligned}$$

②点 P_2 に対してスチュワートの定理を使う。

$$\begin{aligned} &AC^2 \cdot BP_2 + AB^2 \cdot CP_2 \\ &\qquad = BC\left(BP_2 \cdot CP_2 + AP_2^2\right) \end{aligned}$$

③①，②で導いた式を足して計算する。

$$\begin{aligned} &AC^2\left(BP_1 + BP_2\right) + BC^2\left(CP_1 + CP_2\right) \\ &\quad = BC\left(BP_1 \cdot CP_1 + BP_2 \cdot CP_2 + AP_1^2 + AP_2^2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &AC \cdot^2 BC + AB^2 \cdot BC \\ &\qquad = BC\left\{BP_1\left(CP_1 + BP_2\right) + AP_1^2 + AP_2^2\right\} \end{aligned}$$

$$AC^2 + AB^2 = 4BP_1^2 + AP_1^2 + AP_2^2$$

３－４　n 等分（$n = 4, 5, 6, 7$）した場合

３－３節の(ⅱ)の方法を用いて考えたところ、以下の結果が得られた。

<u>2 等分</u>

$$1\left(AC^2 + AB^2\right) = 2\left(AP^2\right) + 2BP^2$$

<u>3 等分</u>

$$1\left(AC^2 + AB^2\right) = 1\left(AP_1^2 + AP_2^2\right) + 4BP_1^2$$

<u>4 等分</u>

$$3\left(AC^2 + AB^2\right) = 2\left(AP_1^2 + \cdots + AP_3^2\right) + 20BP_1^2$$

<u>5 等分</u>

$$2\left(AC^2 + AB^2\right) = 1\left(AP_1^2 + \cdots + AP_4^2\right) + 20BP_1^2$$

6 等分

$$5\left(AC^2+AB^2\right)=2\left(AP_1^2+\cdots+AP_5^2\right)+70BP_1^2$$

7 等分

$$3\left(AC^2+AB^2\right)=1\left(AP_1^2+\cdots+AP_6^2\right)+56BP_1^2$$

ここで、AC^2+AB^2 と $AP_1^2+\cdots+AP_n^2$ の係数の比の値を調べると、それぞれ

$$\frac{1}{2},\frac{2}{2},\frac{3}{2},\frac{4}{2},\frac{5}{2},\frac{6}{2}$$

になっている。つまり、n 等分するとき比の値は $\dfrac{n-1}{2}$ になると予想できる。

３－５　一般化（n 等分したとき）

まず、次の定理を得た。

定理 3

△ABC の辺 BC を点 $P_1,P_2,\cdots,P_{n-1}$ で n 等分したとき、

$$\frac{n-1}{2}\left(AC^2+AB^2\right)=\frac{1}{6}n(n-1)(n+1)BP_1^2+\sum_{k=1}^{n-1}AP_k^2$$

が成り立つ。

（証明）

点 AP_k においてスチュワートの定理より

$$AC^2\cdot BP_k+AB^2\cdot CP_k=BC\left(BP_k\cdot CP_k+AP_k^2\right)$$

ここで、

$$BP_k=kBP_1,$$
$$CP_k=(n-k)BP_1,$$
$$BC=nBP_1$$

より、

$$kAC^2+(n-k)AB^2=n\left\{k(n-k)BP_1^2+AP_k^2\right\}$$

この式を $1\le k\le n-1$ で足し合わせると、

$$\sum_{k=1}^{n-1}kAC^2+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)AB^2=\sum_{k=1}^{n-1}n\left\{k(n-k)BP_1^2+AP_k^2\right\}$$

式変形を行うと、

$$AC^2\sum_{k=1}^{n-1}k+AB^2\sum_{k=1}^{n-1}n-k=n\left(BP_1^2\sum_{k=1}^{n-1}k(n-k)+\sum_{k=1}^{n-1}AP_k^2\right)$$

$$\frac{n(n-1)}{2}AC^2+\frac{n(n-1)}{2}AB^2=n\left\{\left(n\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}k^2\right)BP_1^2+\sum_{k=1}^{n-1}AP_k^2\right\}$$

となるので、

$$\frac{n-1}{2}\left(AC^2+AB^2\right)=BP_1^2\left\{n\times\frac{1}{2}(n-1)n-\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)\right\}+\sum_{k=1}^{n-1}AP_k^2$$

$$=\frac{1}{6}BP_1^2\left(n^3-n\right)+\sum_{k=1}^{n-1}AP_k^2$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n-1)BP_1^2+\sum_{k=1}^{n-1}AP_k^2$$

と計算できる。　(Q.E.D.)

一方で、インターネットのサイト([3])に次のような定理が掲載されていた。

<u>定理 4</u>

△ABC において、辺 BC を $n+1$ 等分する点を D1,D2,⋯,Dn とするとき、

$$AB^2+AC^2=AD_1^2+AD_n^2+2nBD_1^2$$

が成り立つ。

この定理は同じく $n+1$ 等分した三角形について(ⅰ)の中線定理を用いる方法で拡張している。この定理と著書の証明した定理（定理 3）が互換性をもつということを示す。すなわち、定理 4 から定理 3 を導けばよい。

いま、定理 4 の式を $\dfrac{n}{2}$ 倍すると、

$$\begin{aligned}
&\frac{n}{2}\left(AB^2+AC^2\right)\\
&=\frac{n}{2}AD_1^2+\frac{n}{2}AD_n^2+n^2BD_1^2\\
&=AD_1^2+AD_n^2+n^2BD_1^2\\
&\qquad+\frac{n-2}{2}\left(AD_1^2+AD_n^2\right)\\
&=AD_1^2+AD_n^2+n^2BD_1^2\\
&\qquad+\frac{n-2}{2}\left\{AD_2^2+AD_{n-1}^2\right.\\
&\qquad\qquad\left.+2(n-2)BD_1^2\right\}\\
&=AD_1^2+AD_2^2+AD_{n-1}^2+AD_n^2\\
&\qquad+\left\{n^2+(n-2)^2\right\}BD_1^2\\
&\qquad+\frac{n-4}{2}\left(AD_2^2+AD_{n-1}^2\right)
\end{aligned}$$

今までの式変形を繰り返す。

ここで、この変形を行うたびに、(　)内の式に一つ内側の線分の平方が現れることがわかる。したがって、最終的に n が奇数のときには中線定理のような図が、n が偶数の際は三等分したときのような図が得られるということになる。

①n が奇数の場合

式変形を $\dfrac{n-3}{2}$ 回繰り返すと

$$\begin{aligned}
&\frac{n}{2}\left(AB^2+AC^2\right)\\
&=AD_1^2+\cdots+AD_{\frac{n-1}{2}}^2+AD_{\frac{n+3}{2}}^2+\cdots+AD_n^2\\
&\qquad+\left\{n^2+(n-2)^2+\cdots+3^2\right\}BD_1^2\\
&\qquad+\frac{1}{2}\left(AD_{\frac{n-1}{2}}^2+AD_{\frac{n+3}{2}}^2\right)
\end{aligned}$$

ここで、中線定理を用いると、

（与式）

$$\begin{aligned}
&=AD_1^2+\cdots+AD_{\frac{n-1}{2}}^2+AD_{\frac{n+3}{2}}^2+\cdots+AD_n^2\\
&\qquad+\left\{n^2+(n-2)^2+\cdots+3^2\right\}BD_1^2\\
&\qquad+\frac{1}{2}\left\{2\left(AD_{\frac{n+1}{2}}^2+BD_1^2\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$=\sum_{k=1}^{n} AD_k^2+\sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}}(2j+1)^2 BD_1^2$$

ここで、

$$\sum_{j=1}^{\frac{n+1}{2}}(2j-1)^2$$

$$=4\sum_{j=1}^{\frac{n+1}{2}} j^2-4\sum_{j=1}^{\frac{n+1}{2}} j+\sum_{j=1}^{\frac{n+1}{2}} 1$$

$$=4\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+3}{2}\cdot(n+2)$$

$$-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+3}{2}+\frac{n+1}{2}$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$-\frac{1}{2}(n+1)(n+3)+\frac{1}{2}(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)\{(n+2)(n+3)-3(n+3)+3\}$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)(n^2+5n+6-3n-9+3)$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)(n^2-2n)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

であるから、

(与式)

$$=\sum_{k=1}^{n} AD_k^2+\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)BD_1^2$$

②nが偶数の場合

式変形を$\dfrac{n-4}{2}$回繰り返すと、

$$\frac{n}{2}(AB^2+AC^2)$$

$$=AD_1^2+\cdots+AD_{\frac{n-2}{2}}^2$$

$$+AD_{\frac{n+4}{2}}^2+\cdots+AD_n^2$$

$$+\left\{n^2+(n-2)^2+\cdots+4^2\right\}BD_1^2$$

$$+\left(AD_{\frac{n-2}{2}}^2+AD_{\frac{n+4}{2}}^2\right)$$

ここで、三等分したときの定理を用いて、

(与式)

$$=AD_1^2+\cdots+AD_n^2$$

$$+\left\{n^2+(n-2)^2+\cdots+2^2\right\}BD_1^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n} AD_k^2+\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} 4j^2 BD_1^2$$

すると、

$$\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} 4j^2=4\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} j^2$$

$$=4\cdot\frac{1}{6}\times\frac{n}{2}\times\frac{n+2}{2}\times(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

であるから、

(与式)

$$=\sum_{i=1}^{n} AD_i^2+\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)BD_1^2$$

したがって、いずれのnに対しても、

$$\frac{n}{2}(AB^2+AC^2)$$

$$=\sum_{k=1}^{n} AD_k^2+\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)BD_1^2$$

よって、$\mathrm{D_k}$を$\mathrm{P_k}$と、nを$n-1$と置換する

ことにより、

$$\frac{n-1}{2}\left(AC^2+AB^2\right)$$
$$=\frac{1}{6}n\left(n-1\right)\left(n+1\right)BP_1^2+\sum_{i=1}^{n-1}AP_i^2$$

つまり、中線定理を使う方法でもスチュワートの定理を使う方法でも最終的に得られる式は互換性があるといえる。

<u>定理 4 のメリット</u>

1 つ内側の線分が式に含まれているので帰納的に考えるのに適している

<u>定理 3 のメリット</u>

すべての線分が式に含まれているので全体を同時に考えることができる

４．結果・考察・今後の課題

三角形の 1 つの辺を n 等分したときに成り立つ式を導出して中線定理を拡張することができた。

これからは、中線定理を多角形や多次元の立体に拡張する研究をしたいと思う。

また、中線定理には幾つか証明方法があるので今回証明した定理の別証明を考えたい。

５．参考文献

[1]高校数学の美しい物語、「スチュワートの定理の証明とその仲間」, https://manabitimes.jp/math/688

[2]高校数学の美しい物語、「図形の面積と正射影」, https://manabitimes.jp/math/1003

[3] Accademia Nuts、「中線定理の拡張？」, https://ameblo.jp/accade/entry-12250886087.html

６．謝辞

今回の研究にあたり、ご指導くださいました顧問の川口先生ありがとうございました。