文字列によって得られる強い関数

4 年 B 組　竹内 伶河
指導教員　川口 慎二

１．要約

巨大数を得るためには「強い」関数が必要となる。文字列によって関数を階層化することで、「強い」関数を得ることができるという点に着目し、より強い関数を得られる文字列の定義を目指した。本稿において「関数が強い」とは、関数の発散速度が速いことを意味している。

２．研究の背景と目的

グラハム数の存在を知り、巨大数に興味をもった。巨大数を得るためには、強い関数を用意するのが適切であるとわかった。

今回は[1]に引き続き、文字列と関数を対応させることにより強い関数を作ることを目指した。

３．研究内容

３－１　ハーディ階層

関数の強さを評価するためにハーディ階層を定義する。そのためにまず、順序数の基本列を定義する。

<u>定義１</u>

共終数が ω である極限順序数 α に対して、α に収束する順序数の単調増加列を、α の**基本列**という。

例えば､順序数 ω の基本列は $0, 1, 2, 3, \cdots$ であり、順序数 $\omega+\omega$ の基本列は

$$\omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3,\ \omega+4,\ \omega+5,\ \cdots$$

である。また、順序数 ω^ω の基本列は

$$\omega^1,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \omega^4,\ \omega^5,\ \cdots$$

である。

ハーディ階層とは、順序数 α に対して、関数 $H_\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を定める順序数による関数の階層 $\left\{H_\alpha(n)\right\}$ のことをいい、関数の大きさを評価したり、比較したりするときに用いられる。数学的には以下のように定義される。

<u>定義２</u>

α を任意の順序数、n を任意の自然数とする。また、$\beta[n]$ を極限順序数 β の基本列の n 番目とする。このとき、関数の階層 $\{H_\alpha(n)\}$ を次のように定義する。

$\alpha = 0$ のとき、$H_\alpha(n) = n$

α が後続順序数のとき、 $H_\alpha(n) = H_{\alpha-1}(n+1)$

α が極限順序数のとき、

$H_\alpha(n) = H_{\alpha[n]}(n)$

この階層 $\left\{H_\alpha(n)\right\}$ を**ハーディ階層**という。

ここで、最小の超限順序数である ω から有限回の加算や乗算、冪乗では到達できない最小の超限順序数を ε_0 と表し、**イプシロ**

ン・ノートまたは**イプシロン・ゼロ**とよぶ。

$\varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}}$ とも表現される。

ε_0 以下の極限順序数 α の基本列を定める方法として、**ワイナー階層**とよばれるものがある。

<u>定義 3</u>

α を $\alpha \le \varepsilon_0$ である極限順序数とする。このとき、α の基本列 $\{a[n]\}$ を以下のように帰納的に定義する。

$\alpha = \omega$ のとき、$\omega[n] = n$

$\alpha = \omega^\alpha$ のとき、$\omega^\alpha[n] = \omega^{\alpha[n]}$

$\alpha = \omega^{\alpha+1}$ のとき、$\omega^{\beta+1}[n] = \omega^\beta n$

$\alpha = \omega^\beta$ かつ β が極限順序数のとき、

$$\omega^\beta[n] = \omega^{\beta[n]}$$

$\alpha = \omega^{\gamma_1} + \omega^{\gamma_2} + \cdots + \omega^{\gamma_{k-1}} + \omega^{\gamma_k}$，ただし、$\gamma_1 \ge \gamma_2 \ge \cdots \ge \gamma_{k-1} \ge \gamma_k$ （**カントール標準形**）のとき、

$$(\omega^{\gamma_1} + \omega^{\gamma_2} + \cdots + \omega^{\gamma_{k-1}} + \omega^{\gamma_k})[n] = \omega^{\gamma_1} + \omega^{\gamma_2} + \cdots + \omega^{\gamma_{k-1}} + (\omega^{\gamma_k}[n])$$

$\alpha = \varepsilon_0$ のとき、

$\varepsilon_0[0] = 1$ かつ $\varepsilon_0[n+1] = \omega^{\varepsilon_0[n]}$

この基本列 $\{a[n]\}$ を**ワイナー階層**という。

ε_0 よりも大きい順序数を定義する方法の一つとして、**ヴェブレン関数**がある。

<u>定義 4</u>

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を任意の順序数とする。このとき、**ヴェブレン関数** $\{\varphi_\alpha(\beta)\}$ を以下のように定義する。

$\alpha = 0$ のとき、$\varphi_\alpha(\gamma) = \omega^\gamma$

$\alpha \ne 0$ のとき、$\varphi_\alpha(\gamma) = \alpha$ より小さいすべての順序数 β に対して $\varphi_\beta(\delta) = \delta$ が成り立つ順序数のうち γ 番目のもの

この関数により、より大きな順序数を表すことができ、ハーディ階層を用いてより強い関数を表すことができるようになる。

また、ヴェブレン関数における $\varphi_1(0)$ は、ε_0 と等しくなる。

３－２　表記の定義

[1]において、写像を用いて関数を強化する方法を考案した。

今回は、その方法とは別のアプローチとして、文字列を定義してそれと関数（順序数）とを１対１で対応させることで強い関数を得た。

以下のような、文字列と関数を対応させた表記を提案する。以下において、n は正整数であり、この表記によって得られる関数の変数である。

変数 n と文字列が １ つ定まると、関数 $f(n)$ が１つに定まる。

( )の２種類の文字によって構成された文字列全体の集合を X とし、X の任意の元を (X) とする。

$(), \{\}$ の６種類の文字によって構成された

文字列の集合をYとし、Yの任意の元を(Y)とする。

$(X)[n]$を以下のように定める。

$$(X)()[n]=(X)[n+1]$$

$$((X)())=\underbrace{((X))((X))\cdots((X))}_{n}$$

また、$(Y)[n]$を以下のように定める。文字列同士がスペースで区切られる場合は右側のものから計算対象となる。

$((Y),)=(Y)$

$\{(Y),()\}=\{(Y)\},\{\}$

$(Y_1),(Y_2)()=(Y_1),(Y_2)(Y_1)$

そして、写像$F:Y\to Y$を以下のように定める。mは任意の自然数である。

$F_0((Y))=()$

$F_{m+1}((X))=(F_m((X)))$

$\{\}=F_n(())$

（より右側かつより内側の 1 つのみ処理する。）

$(Y\{\})=(Y\,F_n(Y\{\}))$

（$(Y(Y))$は内側の(Y)の外側に任意のYの構造が存在する。）

$F_{m+1}((Y))=(Y\,F_m((Y)))$

このように定義した表記のXの限界は、以下のようにハーディ階層で$\mathrm{H}_{\varepsilon_0}(n)$に到達する。

$[n]=H_0(n)$

$()[n]=H_1(n)$

$()()[n]=H_2(n)$

$(())[n]=H_\omega(n)$

$(())()[n]=H_{\omega+1}(n)$

$(())(())[n]=H_{\omega2}(n)$

$(()())[n]=H_{\omega^2}(n)$

$((()))[n]=H_{\omega^\omega}(n)$

$((())())[n]=H_{\omega^{\omega+1}}(n)$

$((())(()))[n]=H_{\omega^{\omega2}}(n)$

$((()()))[n]=H_{\omega^{\omega^2}}(n)$

$(((())))[n]=H_{\omega^{\omega^\omega}}(n)$

$(\{\})[n]\approx H_{\varepsilon_0}(n)$

また、すべてではないが、Yの強さは以下の通りである。

$(\{\})[n]\approx H_{\phi_1(0)}(n)$

$(\{\}\{\})[n]\approx H_{\phi_1(1)}(n)$

$(\{\},(()))[n]\approx H_{\phi_1(\omega)}(n)$

$(\{()\})[n]\approx H_{\phi_2(0)}(n)$

$(\{()\},(()))[n]\approx H_{\phi_2(\omega)}(n)$

$(\{()()\})[n]\approx H_{\phi_3(0)}(n)$

$$(\{(())\})[n] \approx H_{\phi_\omega(0)}(n)$$

４．今後の展望

文字列を使用するといった写像とは別のアプローチによって、より強い関数を得ることに成功した。今後はこの表記の最終的な強さの解析を行い、この表記の更なる拡張を目指していきたい。

５．参考文献

[1] 竹内怜河，「関数を強くする」，奈良女子大学附属中等教育学校サイエンス研究会令和 2 年度生徒研究論文集(2020) http://www2.nara-wu.ac.jp/fuchuko/media/sites/11/20_5.pdf