

# ルービックキューブの解法と群論

4年A組 中谷 太紀  
指導教員 川口 慎二

## 1. 要約

ルービックキューブの複数の解法において、効率的な解法とはどのようなものか、数学の群論を用いて考える。

キーワード ルービックキューブ、解法、群論

## 2. 研究の背景と目的

ルービックキューブには多くの解法が存在し、それぞれ多様な特徴を持っている。これらの効率などを定量的に評価することができないかと考えた。

## 3. 研究内容

### 3-1 置換群

一般に、ルービックキューブは回転を要素として群の構造をもつことが知られている。本研究ではルービックキューブのステッカーの一つ一つを要素とする群を考え、複数の解法を比較する。

一般に  $a$  と  $b$  を入れ替えることを  $a$  と  $b$  の「互換」といい、 $(a\ b)$  と表す。また、 $a$  を  $b$  に、 $b$  を  $c$  に移す操作を  $a, b, c$  の「巡回置換」といい、 $(a\ b\ c)$  と表す。このとき、 $(a\ b\ c)$  は  $(a\ b)$  を行った後に  $(a\ c)$  を行う操作と同じである。これを

$$(a\ b\ c) = (a\ b) \circ (a\ c)$$

と表し、互換の積という。

### 3-2 基本的な記号と用語

#### 3-2-1 回転記号

シングマスター記法という表記方法を利用してルービックキューブの状態を記録する。

ルービックキューブを置いたときに、手前の面 (F 面) が緑、奥の面 (B 面) が青、上の面 (U 面) が白、下の面 (D 面) が黄、右の面 (R 面) が赤、左の面 (L 面) が橙になるようにする。

このとき、各面 (F 面・B 面・U 面・D 面・R 面・L 面) を時計回りに  $90^\circ$  回転する操作をそれぞれ

$$F \cdot B \cdot U \cdot D \cdot R \cdot L$$

と表記することにする。また、各面反時計回りに  $90^\circ$  回す操作を

$$F' \cdot B' \cdot U' \cdot D' \cdot R' \cdot L'$$

のようにクォーテーションをつけて表し、各面を  $180^\circ$  回転させる操作を

$$F2 \cdot B2 \cdot U2 \cdot D2 \cdot R2 \cdot L2$$

のように、後ろに数字の 2 をつけて表記する。さらに、各面を 2 列同時に回す操作は、

$$Fw \cdot Bw \cdot Uw \cdot Dw \cdot Rw \cdot Lw$$

のようにアルファベットの  $w$  をつけて表す。

そして、R 面と L 面に挟まれた列を「M 列」、F 面と B 面に挟まれた列を「S 列」、U 面と D 面に挟まれた列を「E 列」とし、M 列を L と同じ方向に、S 列を F と同じ方向に、E 列を D と同じ方向に回す操作をそれぞれ、「 $M \cdot S \cdot E$ 」と表記する。また、結果として「 $R M' L'$ 」をもたらす持ち替えを  $[x]$ 、結果として「 $U E' D'$ 」をもたらす持ち替えを  $[y]$ 、結果として「 $F S B'$ 」をもたらす持ち替えを  $[z]$  とする。

#### 3-2-2 ステッカー

ここで、各面の中央にあるパーツを「センターパーツ」、各面の辺の部分にあるパーツを「エッジパーツ」、各面の頂点の部分にあるパーツを「コーナーパーツ」と呼ぶ。

各面のステッカーの表記は、エッジパーツの場合、[ステッカーのある面、ステッカーのあるエッジパーツの他のステッカーがある面]というようにアルファベット 2 文字で表記する。コーナーパーツの

場合、[ステッカーのある面、ステッカーのあるコーナーパーツの他のステッカーのある面 1、ステッカーのあるコーナーパーツの他のステッカーのある面 2]というようにアルファベット 3 文字で表記する。

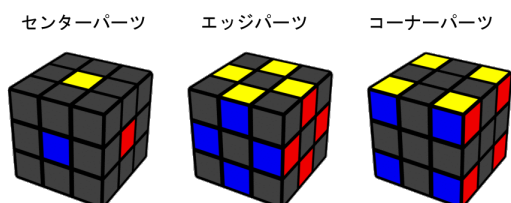


図1 パーツの位置と名称

UFR ならば、前面と上面と右面を含むコーナーパーツの上の面のステッカー、UF ならば、前面と上面を含むエッジパーツの上面のステッカーとなる。

	UBL	UB	UBR																				
	UL	<b>U</b>	UR																				
	UFL	UF	UFR																				
LBU	LU	LFU	FUL	FU	FUR	RFU	RU	RBU	BUR	BU	BUL												
LB	<b>L</b>	LF	FL	<b>F</b>	FR	RF	<b>R</b>	RB	BR	<b>B</b>	BL												
LBD	LD	LFD	FDL	FD	FDR	RFD	RD	RBD	BDR	BD	BDL												
	DFL	DF	DFR																				
	DL	<b>D</b>	DR																				
	DBL	DB	DBR																				

図2 各面のステッカー

### 3-3 解法

#### 3-3-1 Old Pochmann 法

「Old Pochmann 法」と呼ばれる解法は、コーナーパーツとエッジパーツそれぞれについてルービックキューブ上のある一点を定め（これを「バッファ」と呼ぶ）、その点とそろっていないパーツを交換し、それを正しい位置に戻すことによってすべてのパーツを元に戻すという解法である。このとき、パーツを正しい位置と交換する手順を「インターチェンジ」、交換する位置に持って行く手順を「セットアップ」、交換した後に元の位置に戻す手順を「逆セットアップ」という。Old Pochmann 法ではインターチェ

ンジには「T-perm」と呼ばれる手順を用いる。

T-perm : [R U R' U' R' F R<sup>2</sup> U' R' U' R U R' F'] この手順は結果として以下のような置換をもたらす。

(UR UL) (RU LU) (UFR UBR)  
(FUR BUR) (RUF RUB)

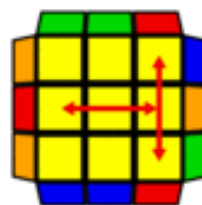


図3 T-perm

まず、この置換の(UR UL) (RU LU)の部分を用いてパーツの交換をする。UR の位置にあるパーツの本来の位置にあるパーツを交換先である UL に持っていき T-perm を使って交換することで本来の位置に戻すことをエッジパーツすべてがそろうまで繰り返す。

その後、コーナーパーツにおいて、

(UFR UBR) (FUR BUR) (RUF RUB)

の部分を利用し、同様にして 2 パーツの交換を繰り返すことによって全面を完成させる。

表1 エッジの手順表

コーナー	置換	セットアップ	逆セットアップ	手数
UFR	(RFD UFR)	F	F'	1
UFL	(RFD UFL)	F R'	R F'	2
UBR	(RFD UBR)	R D'	D R'	2
RFU	(RFD RFU)	R'	R	1
RFD	e	x	x	0
RBU	(RFD RBU)	R <sup>2</sup>	R <sup>2</sup>	1
RBD	(RFD RBD)	R	R'	1
FUR	(RFD FUR)	F <sup>2</sup> D	D' F <sup>2</sup>	2
FUL	(RFD FUL)	F' D	D' F	2
FDL	(RFD FDL)	D	D'	1
FDR	(RFD FDR)	D R	R' D'	2
DFR	(RFD DFR)	D' F'	F D	2
DFL	(RFD DFL)	F'	F	1
DBL	(RFD DBL)	D F'	F D'	2
DBR	(RFD DBR)	D <sup>2</sup> F'	F D <sup>2</sup>	2
BRU	(RFD BRU)	R' F	F' R	2
BRD	(RFD BRD)	D'	D	1
BLD	(RFD BLD)	D' R	R' D	2
LUF	(RFD LUF)	F <sup>2</sup>	F <sup>2</sup>	1
LDB	(RFD LDB)	D <sup>2</sup>	D <sup>2</sup>	1
LDF	(RFD LDF)	D <sup>2</sup> R	R' D <sup>2</sup>	2

表2 Old Pochmann 法における  
コーナーの手順表

エッジ	置換	セットアップ	逆セットアップ	手数
UL	e	x	x	0
UF	(UL UF)	M2 D' L2	L2 D M2	3
UB	(UL UB)	M2 D L2	L2 D' M2	3
RB	(UL RB)	Dw L	L' Dw'	2
RD	(UL RD)	D2 L Dw L'	L Dw' L' D2	4
RF	(UL RF)	Dw' L'	L Dw2	2
FU	(UL FU)	MD' L2	L2 D M'	3
FR	(UL FR)	Dw2 L	L' Dw2	2
FD	(UL FD)	MD L2	L2 D' M'	3
FL	(UL FL)	L'	L	1
DF	(UL DF)	D' L2	L2 D	2
DR	(UL DR)	D2 L2	L2 D2	2
DB	(UL DB)	D L2	L2 D'	2
DL	(UL DL)	L2	L2	1
BU	(UL BU)	M' D L2	L2 D' M	3
BR	(UL BR)	Dw2 L'	L Dw2	2
BD	(UL BD)	M' D' L2	L2 D M	3
BL	(UL BL)	L	L'	1
LU	(UL LU)	L Dw' L	L' Dw L'	3
LF	(UL LF)	Dw' L	L' Dw	2
LD	(UL LD)	L Dw L'	L Dw L'	3
LB	(UL LB)	Dw L'	L Dw'	2
				49

### 3-3-2 T2 法

これは筆者が独自に考案した手順である。先述の Old Pochmann 法をベースにした解法で、T-perm を利用したエッジ解法をコーナーにまで拡張したものである。エッジパーツの解法は Old Pochman 法を共通であるが、コーナーパーツのインターチェンジを新たに覚える必要がないので、暗記がする必要がある手順を削減することができるという特徴がある。この T2 法における手順を表3に示す。

### 3-4 解法の検討

#### 3-4-1 比較

ルービックキューブがランダムにバラバラになった状態について手順を評価することは難しいため、初期段階として特定の状態から解くことについて考える。

本節では SuperFlip, MinorityCross, Wire, GiftBox という 4 つの状態について検証する。

表3 T2 法におけるコーナーの手順表

コーナー	置換	セットアップ	逆セットアップ	手数
UFR	e	x	x	0
UFL	(UFR UFL)	F2 D' F2	F2 D F2	3
UBL	(UFR UBL)	L2 F2 L2	L2 F2 L2	3
RFU	(UFR RFU)	F D' F2	F2 D F'	3
RFD	(UFR RFD)	F'	F	1
RBD	(UFR RBD)	D' F D F'	F D' F' D	4
FUR	(UFR FUR)	F2 D F'	F D' F2	3
FUL	(UFR FUL)	F' D F'	F D' F	3
FDL	(UFR FDL)	D F'	F D'	2
FDR	(UFR FDR)	D' R' D R	R' D' R D	4
DFR	(UFR DFR)	D' F2	F2 D	2
DFL	(UFR DFL)	F2	F2	1
DBL	(UFR DBL)	D F2	F2 D'	2
DBR	(UFR DBR)	D2 F2	F2 D2	2
BRD	(UFR BRD)	D' F'	F D	2
BLD	(UFR BLD)	R' D2 R	R' D2 R	3
BLU	(UFR BLU)	L' D F2 L	L' F2 D' L	4
LUF	(UFR LUF)	F	F'	1
LUB	(UFR LUB)	S L F S'	S F' L' S'	4
LDB	(UFR LDB)	D2 F'	F D2	2
LDF	(UFR LDF)	R' D R	R' D' R	3
				52

#### [1] SuperFlip

「SuperFlip」とは、以下の操作によって得られる状態のことである。

[U R2 F B R B2 R U2 L B2 R U' D' R2 F R' L B2 U2 F2]



図4 SuperFlip

このとき、キューブを完成状態にするために必要な置換は

(UF FU) (UR RU) (UB BU) (UL LU)  
(RF FR) (RB BR) (LF FL) (LB BL)  
(DF FD) (DR RD) (DB BD) (DL LD)

である。

#### ①Old Pochmann 法

エッジパーツにおいて、必要な互換は 12 回であり、一回の置換に必要な手数は 13 手であるため、 $13 \times 12 + 31 \times 2 = 218$  (手)であり、コーナーパーツにおいて、

必要な置換は「恒等置換」、つまり操作は必要ないため、0 手であるので、合計すると、 $218+0=218$  (手)ある。

## ②T2 法

エッジパーツにおいて、一回の置換に必要なのは、 $13 \times 12 + 31 \times 2 = 218$  (手)であり、コーナーパーツにおいて、必要な置換は恒等置換、つまり操作は必要ないため、0 手である。よって、合計すると、 $218+0=218$  (手)ある。

## [2]MinorityCross

「MinorityCross」とは、以下の操作によって得られる状態のことである。

[L2 D' B2 L2 B2 D' F2 D U' B2 L B2 F' L B' F U' F' U L2]



図5 MinorityCross

このとき、キューブを完成状態にするために必要な置換はエッジパーツで

(FU DR RF UB FD UL LF BL FU)  
(UR RB DL)

互換で表すと

(FU DR) (DR RF) (RF UB) (UB FD)  
(FD UL) (UL LF) (LF BL) (BL FU)

であり、コーナーパーツで

(UFR BDL) (UBR BUL)  
(UFL BDR) (DFL FDR)

となる。

## ①Old Pochmann 法

エッジパーツにおいて、必要な互換は 8 回であり、一回の置換に必要な手数は 13 手であるため、 $13 \times 8 + 31 \times 2 = 166$  (手)となる。コーナーパーツにおいて、必要な互換は 4 回であり、一回の置換に必要な手数は 15 手であるため、 $15 \times 4 + 49 \times 2 = 158$  (手)あるので、合計して、 $166+158=324$  (手)となる。

## ②T2 法

エッジパーツにおいて、必要な互換は 8 回であり、一回の置換に必要な手数は 13 手であるため、 $13 \times 8 + 31 \times 2 = 166$  (手)であり、コーナーパーツにおいて、必要な互換は 4 回であり、一回の置換に必要な手数は 13 手であるため、 $13 \times 4 + 52 \times 2 = 156$  (手)となり、合計すると  $166 + 156 = 322$  (手)である。

## [3]Wire

「Wire」とは、以下の操作によって得られる状態のことである。

[R L F B R L F B R L F B R2 B2 L2 R2 B2 L2]



図6 Wire

このとき、キューブを完成状態にするために必要な置換は

(UF UB) (UR UL) (DF DB) (DR DL)  
(UFL UBR) (DFR DBL)

である。

## ①Old Pochmann 法

エッジパーツにおいて、必要な互換は 4 回であり、一回の置換に必要な手数は 13 手であるため、 $13 \times 4 + 31 \times 2 = 114$  (手)である。コーナーパーツにおいて、必要な互換は 2 回、一回の置換に必要な手数は 15 手であるため、 $15 \times 2 + 49 \times 2 = 158$  (手)ある。ゆえに、合計すると、 $114+158=272$  (手)となる。

## ②T2 法

エッジパーツにおいて、必要な互換は 4 回であり、一回の置換に必要な手数は 13 手であるため、 $13 \times 4 + 31 \times 2 = 114$  (手)である。コーナーパーツにおいて、必要な互換は 2 回であり、一回の置換に

必要な手数は 13 手であるため、 $13 \times 2 + 52 \times 2 = 130$  (手)となる。

合計して、 $114 + 130 = 244$  (手)である。

#### [4] GiftBox

「GiftBox」とは、以下の操作によって得られる状態のことである。

[U B2 R2 B2 L2 F2 R2 D' F2 L2 B F' L F2 D U' R2 F' L' R']



図7 GiftBox

このとき、キューブを完成状態にするために必要な置換は

(FR LB) (FL RB) (UFR DBL)

(UBR DFL) (UBL DFR) (UFL DBR)

である。

#### ①Old Pochmann 法

エッジパーツにおいて、必要な互換は 4 回であり、一回の置換に必要な手数は 13 手であるため、 $13 \times 4 + 31 \times 2 = 114$  (手)である。また、コーナーパーツにおいて、必要な互換は 2 回であり、一回の置換に必要な手数は 15 手であるため、 $15 \times 2 + 49 \times 2 = 158$  (手)となり、合計すると、 $114 + 158 = 272$  (手)となる。

#### ②T2 法

エッジパーツにおいて、必要な互換は 4 回であり、一回の置換に必要な手数は 13 手であるため、 $13 \times 4 + 31 \times 2 = 114$  (手)である。また、コーナーパーツにおいて、必要な互換は 2 回、一回の置換に必要な手数は 13 手であるため、 $13 \times 2 + 52 \times 2 = 130$  (手)となり、合計すると、 $114 + 130 = 244$  (手)となる。

### 3-4-2 結果

かかった手数は表4のようになった。結果として、T2法のほうがかかる手数が

全体的に短いという結果になった。

表4 必要な手数の比較

	SuperFlip	Minority Cross	Gift Box	Wire
Old Pochmann	218	324	272	272
T2	218	322	244	244

### 3-4-3 考察

覚える手順数とかかる手順から、Old Pochmann 法と T2 法を比較したとき、T2法のほうがより効率的であるといえる。

### 4. 今後の展望

今回は Old Pochmann 法と自作の解法のみについて、特定の状況のもとで検討したが、今後は LBL 法や Roux などメジャーに使用されている解法についての検討や、ランダムに崩した状態について、複数の検討を行い、統計的に結果をまとめたい。

### 5. 参考文献・出典

- [1] 「群論入門 対称性を測る数学」, 芳沢光雄
- [2] 「ルービックキューブと数学」  
<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hnakashima/others/suriwave/suriwaveHN.pdf>
- [3] Tribbox  
<https://tribbox.com/3x3x3/solution/notation/>
- [4] Hinemos  
<https://saxcy.info/hinemos/m2Method.html>
- [5] Cube Voyage  
<https://cubevoyage.net/>
- [6] Ruwix  
<https://ruwix.com/>

### 6. 謝辞

本研究では、担当教諭である川口先生にご指導をいただきました。ありがとうございました。