三角形の特徴的な点とその軌跡

4年C組　川野 聡真
4年C組　山田 悠晟
指導教員　川口 慎二

１．要約

私たちは三角形の特徴的な点について興味をもち、よく知られている関数との関係について探究の授業で調べてみることにした。なお、この研究において、グラフや作図はすべて動的数学ソフトウェアである GeoGebra を用いた。

キーワード　曲線、三角形の五心、軌跡

２．研究の背景と目的

2年生の幾何で学習した五心の軌跡というものが気になった。また、2, 3年生の授業で学習した曲線についても興味をもち、その両方を研究対象とした。特に三角形に関係する点の軌跡と曲線について興味があり、探究することにした。

３．研究内容

３―１　二次関数と五心

最初に、放物線 $y=x^2$ 上に点 A$(-1, 1)$と点 B$(1, 1)$をとり、点 C$\left(t,\ t^2\right)$は放物線上を移動する。このときの五心の軌跡を調べた。

３－１－１　外心の軌跡

点 C が$(0, 0)$のとき、△ABC は直角二等辺三角形であり、外心は斜辺 AB の中点となるのでそのときの外心 D は$(0, 1)$となり、外心 D の軌跡は半直線 $y \geq 1$ となる。ただし、A と C，また B と C が一致するとき三角形は存在しないので A，B における法線と y 軸の交点である$\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$ を除く。

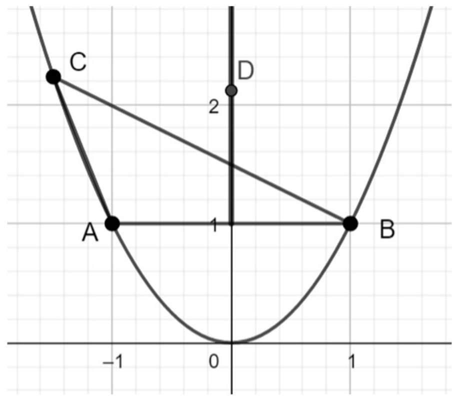

図１　外心の軌跡

３－１－２　重心の軌跡

点 C が$\left(t,\ t^2\right)$に存在するとき、重心 G の座標は

$$G\left(\frac{-1+1+t}{3},\ \frac{1+1+t^2}{3}\right)=\left(\frac{t}{3},\ \frac{t^2+2}{3}\right)$$

となる。

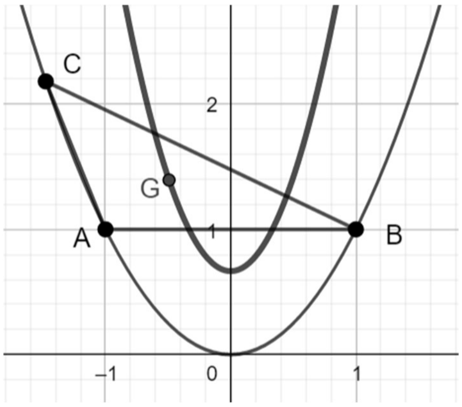

図２　重心の軌跡

よって、重心 G の軌跡をパラメーター表示すると

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{3} \cdots ① \\ y = \dfrac{t^2+2}{3} \cdots ② \end{cases}$$

となる。t は媒介変数である。

①を変形した $t = 3x$ を②に代入すると、

$$y = 3x^2 + \frac{2}{3}$$

となる。

しかし、点 C が線分 AB との交点上にあるときは、重心 G は存在しないので、$y = 1$ を代入して、

$$1 = 3x^2 + \frac{2}{3},\ x^2 = \frac{1}{9} \quad \text{より} \quad x = \pm\frac{1}{3}$$

となる点を軌跡から除かねばならない。

したがって、求める重心 G の軌跡は放物線 $y = 3x^2 + \dfrac{2}{3}$ から 2 点 $\left(\pm\dfrac{1}{3}, 1\right)$ を除く部分となる。

３－１－３　内心の軌跡

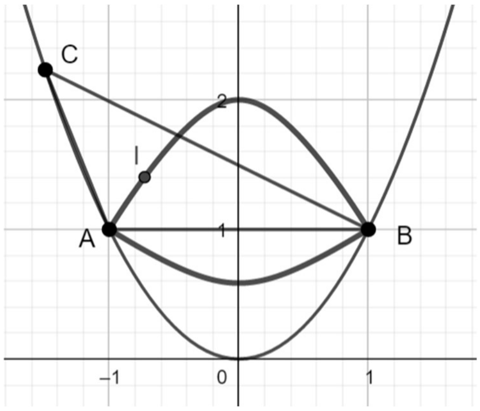

図３　内心の軌跡

点 $C\left(t, t^2\right)$ に存在するとき、AB＝2 であり、二点間の距離の公式より、

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(t+1)^2 + \left(t^2-1\right)^2} \\ &= \sqrt{(t+1)^2 + \{(t+1)(t-1)\}^2} \\ &= \sqrt{(t+1)^2\left\{1+(t-1)^2\right\}} \\ &= \sqrt{(t+1)^2\left(t^2-2t+2\right)} \\ &= |t+1|\sqrt{t^2-2t+2} \end{aligned}$$

であり、また、

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(t-1)^2 + \left(t^2-1\right)^2} \\ &= \sqrt{(t-1)^2 + \{(t+1)(t-1)\}^2} \\ &= \sqrt{(t-1)^2\left\{1+(t+1)^2\right\}} \\ &= \sqrt{(t-1)^2\left(t^2+2t+2\right)} \\ &= |t-1|\sqrt{t^2+2t+2} \end{aligned}$$

となる。

ここで、内心座標の公式を用いる。内心の座標の公式とは、以下のようである。

定理１

座標平面上の３点 A(x_a, y_a), B(x_b, y_b), C(x_c, y_c)について、△ABC の内心 I の座標は

$$I\left(\frac{ax_a+bx_b+cx_c}{a+b+c},\ \frac{ay_a+by_b+cy_c}{a+b+c}\right)$$

である。

定理１を用いると、$y=x^2$ 上を点 C が動き回るときの内心 I の座標は媒介変数tを用いて、

$$\begin{cases} x=\dfrac{-|t-1|\sqrt{t^2+2t+2}+|t+1|\sqrt{t^2-2t+2}+2t}{|t+1|\sqrt{t^2-2t+2}+|t-1|\sqrt{t^2+2t+2}+2} \\ y=\dfrac{|t-1|\sqrt{t^2+2t+2}+|t+1|\sqrt{t^2-2t+2}+2t^2}{|t+1|\sqrt{t^2-2t+2}+|t-1|\sqrt{t^2+2t+2}+2} \end{cases}$$

と表される。

点 C が A や B から遠ざかっていくにつれて I は(0, 2)に限りなく近づいていくが、(0, 2)と一致することはない。

３－１－４　垂心の軌跡

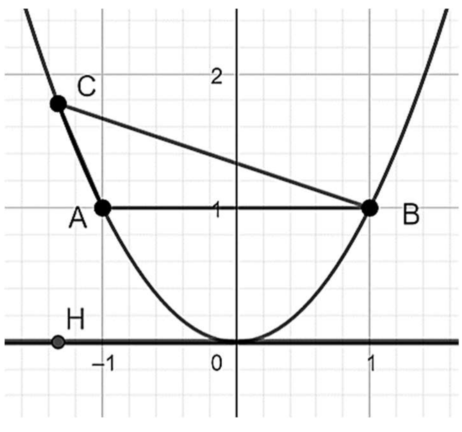

図４　垂心の軌跡

点 H の座標は点 C から AB に下ろした垂線と A から BC に下ろした垂線の交点である。点 C から AB に下ろした垂線は点 C の座標が(t, t^2)であるとき、

$x=t$ …①である。

ここで直線 BC の方程式を求めると、

$$y=\frac{t^2-1}{t-1}x+1-\frac{t^2-1}{t-1}$$

である。。ただし、$t=\pm1$のとき、点 C は点 A あるいは点 B は一致するため、垂心 H は存在しない。したがって、$t\neq\pm1$とする。

いま、直線 BC が $y=(t+1)x-t$ とわかるので、点 A から BC に下ろした垂線の変化の割合は

$$-\frac{1}{t+1}$$

とわかる。この垂線は点 A(−1, 1)を通るので、A から BC に下ろした垂線の方程式は、$y=-\dfrac{1}{t+1}(x+1)+1$，つまり、

$$y=-\frac{1}{t+1}x+\frac{t}{t+1} \quad \cdots②$$

となる。

①と②の交点を求めると、$y=0$ となる。したがって、垂心 H の軌跡は$y=0$（つまりx軸）から(±1, 0)を除いたものになる。

３－１－５　傍心の軌跡

傍心の軌跡については、GeoGebra で軌跡をうまく描画することができず、さらに軌跡の方程式や媒介変数表示を求めることができていないので今後研究を進めたい。

３－２　円と五心

次に円 $x^2+y^2=1$上に点 A(1, 0)と点 B(−1, 0)をとり、点 C$(\cos\theta, \sin\theta)$は円上を移動する。このとき、△ABC の五心の軌跡を調べた。

３－２－１　外心の軌跡

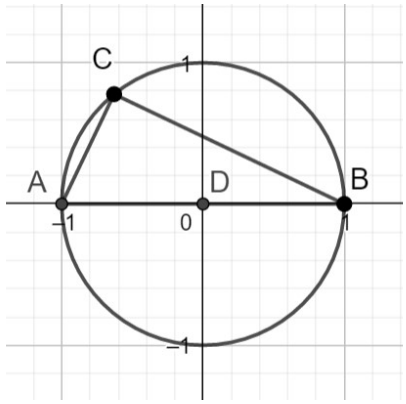

図５　外心の軌跡

△ABC において、AB は円の直径なので、円周角の定理より、常に∠C＝90°であり、直角三角形の外心は斜辺の中点なので、外心 D は原点 O と常に一致している。

３－２－２　重心の軌跡

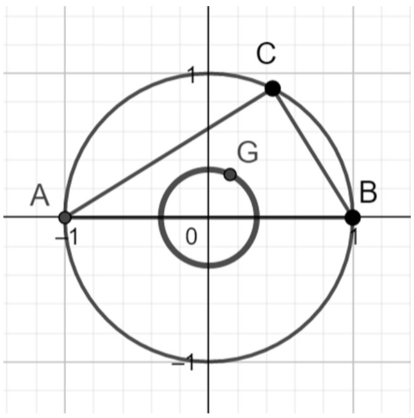

図６　重心の軌跡

点 C が $(\cos\theta, \sin\theta)$ であるとき、点 G の座標は

$$G\left(\frac{-1+1+\cos\theta}{3}, \frac{0+0+\sin\theta}{3}\right)$$
$$=\left(\frac{\cos\theta}{3}, \frac{\sin\theta}{3}\right)$$

であり、これより求められる重心 G の軌跡は、θを媒介変数として

$$\begin{cases} x=\dfrac{\cos\theta}{3} & \cdots① \\ y=\dfrac{\sin\theta}{3} & \cdots② \end{cases}$$

となる。①より $\cos\theta=3x$，②より $\sin\theta=3y$ なので、$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ より、$(3x)^2+(3y)^2=1,\ 9x^2+9y^2=1$ なので、$x^2+y^2=\dfrac{1}{9}$ となる。

しかし、点 C の座標が線分 AB（つまり x 軸）上との交点になるとき、重心は存在しないので、$y=0$ を代入して、

$$x^2=\frac{1}{9},\ x=\pm\frac{1}{3}$$

のときを除く。

したがって、重心 G の軌跡は、円

$$x^2+y^2=\frac{1}{9}$$

から、2 点$\left(\pm\dfrac{1}{3},\ 0\right)$を除いた部分となる。

３－２－３　内心の軌跡

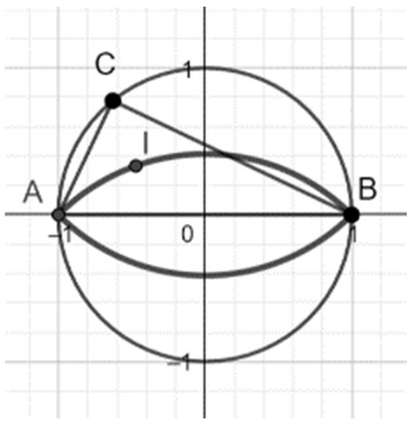

図７　内心の軌跡

点 C の座標が $(\cos\theta, \sin\theta)$ であるとき、二点間の距離の公式より、

$$
\begin{aligned}
AC &= \sqrt{\{\cos\theta-(-1)\}^2+(\sin\theta-0)^2} \\
&= \sqrt{(\cos\theta+1)^2+\sin^2\theta} \\
&= \sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta+2\cos\theta+1} \\
&= \sqrt{2(1+\cos\theta)} \quad \cdots ①
\end{aligned}
$$

であり、また、

$$
\begin{aligned}
BC &= \sqrt{(\cos\theta-1)^2+(\sin\theta-0)^2} \\
&= \sqrt{(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta} \\
&= \sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta-2\cos\theta+1} \\
&= \sqrt{2(1-\cos\theta)} \quad \cdots ②
\end{aligned}
$$

となる。

ここで、**３－１－３節**と同様に、内心座標の公式を用いる。すると内心Ｉの座標はθを媒介変数として、

$$
\begin{cases}
x = \dfrac{-\sqrt{2-2\cos\theta}+\sqrt{2+2\cos\theta}+2\cos\theta}{2+\sqrt{2+2\cos\theta}+\sqrt{2-2\cos\theta}} \\
y = \dfrac{2\sin\theta}{2+\sqrt{2+2\cos\theta}+\sqrt{2-2\cos\theta}}
\end{cases}
$$

とわかる。

３－２－４　GeoGebra で導出した軌跡

ここで、GeoGebra には軌跡の方程式を導出する機能がある。入力バーに

Locus(＜軌跡の点＞，＜駆動点＞)

と入力すると、求める軌跡がグラフ内に描かれる。ここで、その軌跡の図形の名前を「loc1」と定義したとき、その下の入力バーに

LocusEquation (loc1)

と入力すると、求めたい軌跡の方程式が導出される。この機能を用いると、一定以上の複雑な軌跡の方程式以外は導出することができる。

これを踏まえて内心Ｉの軌跡を入力バーに「Locus (I, C)」と入力し、軌跡を描き、その軌跡を「loc1」と定義し、その下の入力バーに「LocusEquation (loc1)」と入力した。すると、5 回中 4 回は導出できなかったが 1 度だけ

$$x^4+2x^2y^2-2x^2+y^4-6y^2=-1$$

という方程式が導出された。

この方程式を入力バーに入力すると下の図８のようなグラフが描かれた。

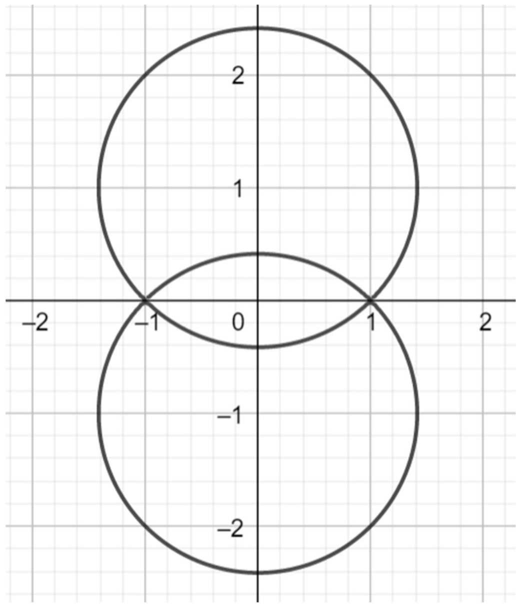

図８　GeoGebra が導出した軌跡

これと、円 $x^2+y^2=1$ および求めた内心の軌跡を同じ座標平面に重ねて描くと図９のようになる。

図９を見ると、

$$x^4+2x^2y^2-2x^2+y^4-6y^2+1=0 \quad \cdots(*)$$

の一部と、３－２－３節で導出した内心Ｉの軌跡が一致しているように見える。

ここで、(*)式を因数分解すると、

$$
\begin{aligned}
&x^4+2x^2\left(y^2-1\right) \\
&\qquad +\left(y^2-1+2y\right)\left(y^2-1-2y\right)=0
\end{aligned}
$$

$$x^4+2x^2\left(y^2-1\right)+\left(y^2-1\right)^2-4y^2=0$$

$$\left\{x^2+\left(y^2-1\right)\right\}^2-4y^2=0$$

$$\left(x^2+y^2-1\right)^2-4y^2=0$$

$$\left(x^2+y^2-1+2y\right)\left(x^2+y^2-1-2y\right)=0$$

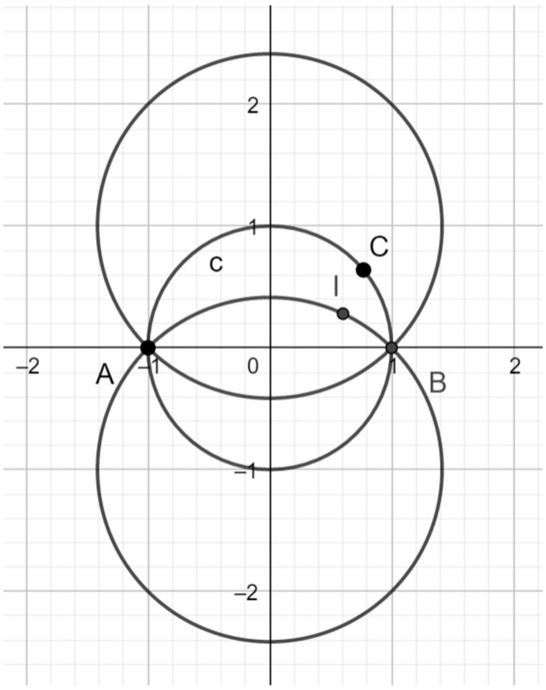

図９　GeoGebra が導出した軌跡と
内心の軌跡

したがって、$x^2+y^2-1+2y=0$ または $x^2+y^2-1-2y=0$ である。

（ⅰ）$x^2+y^2-1+2y=0$ のとき

$x^2+(y+1)^2=2$ より、中心が$(0,\ -1)$にあり、半径$\sqrt{2}$の円だとわかる。

（ⅱ）$x^2+y^2-1-2y=0$ のとき

$x^2+(y-1)^2=2$ より、中心が$(0, 1)$にあり、半径$\sqrt{2}$の円だとわかる。

このことから、内心の軌跡は円の一部ずつを合わせたものと予想した。

３－２－５　垂心の軌跡

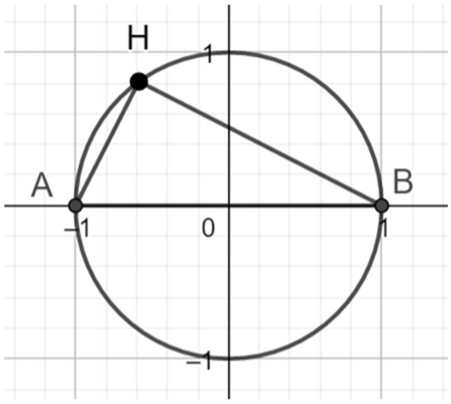

図 10　垂心の軌跡

△ABC において、AB は円の直径なので、円周角の定理より、常に∠C＝90°なので、点 C と点 H は常に一致し、垂心 H の軌跡は　$x^2+y^2=1$から$(-1,0)$と$(1,0)$を除いた部分となる。

３－２－６　傍心の軌跡

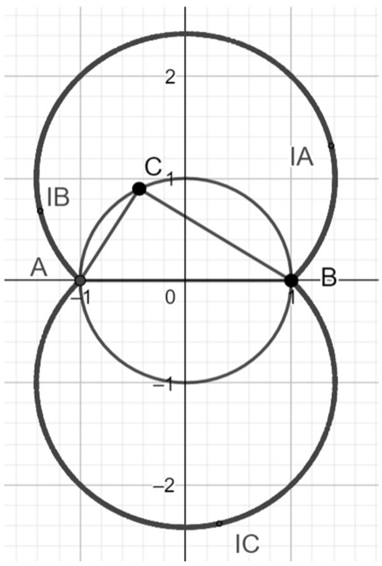

図 11　傍心の軌跡

この図 11 は△ABC の傍心 I_A, I_B, I_C の軌跡である。これは、見た目から３－２－４

で GeoGebra が導出したグラフから３－２－３で導出した内心の軌跡を除いたもののように見える。

また、GeoGebra 内では△ABC の傍心 I_A, I_B, I_C は

$$x^4+2x^2y^2-2x^2+y^4-6y^2+1=0$$

に沿って移動していた。したがって、この内心の軌跡と、傍心の軌跡を合わせたものが $x^4+2x^2y^2-2x^2+y^4-6y^2+1=0$ と一致すると予想した。

４．今後の課題・展望

$x^4+2x^2y^2-2x^2+y^4-6y^2+1=0$ が 2 つの円を表す方程式であることは証明できたが、これの一部が３－２－３節で求めたパラメーターと一致することは正確には証明できなかった。これを証明するのが次の課題である。また、３－２－４節において、内心の軌跡と傍心の軌跡を合わせたものが

$$x^4+2x^2y^2-2x^2+y^4-6y^2+1=0$$

と一致することを証明したい。

さらに、GeoGebra の機能についての知識を深め、より探究活動に役立てたい。３－２－４節において、入力バーに

LocusEquation (loc1)

と入力したときに 5 回中 4 回は導出できなかった原因を追究したい。

今後の展望としては、今回は二次関数や円を用いたが、三次関数、指数関数、アステロイド、懸垂線などの関数や曲線でも同様の研究を行いたい。また、五心だけでなくフェルマー点や、ナポレオン点などの軌跡についても調べたい。

５．参考文献

[1]「三角形の内心とは？内心の意味や座標＆ベクトルの求め方を解説」
math-travel.com

[2]「GeoGebra 初心者のための日本語マニュアル」
sakura.ne.jp

[3]「GeoGebra における「軌跡」の扱い方について：LocusEquation コマンドの新機能紹介（数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究）」
kyoto-u.ac.jp

６．謝辞

今回の探究活動にあたり多大なご指導を賜りました顧問の川口先生、いろいろなアドバイスをくれた「基盤探究Ⅰ」の同じ川口講座のみなさんには深く感謝いたします。ありがとうございました。