

# ビュフォンの針の高次元への拡張

## ～図形を用いた確率の計算理論と幾何への応用～

奈良女子大学附属中等教育学校 左藤 開己

### 1 アブストラクト

“ビュフォンの針”とは等間隔で並んだ平行線に対して一定の長さの針を無作為に投げたときに針と直線の交わる確率に関する問題である。私は“ビュフォンの針”の積分を用いた美しい解法に興味を引かれて研究を始めた。

まず私が試みたのは“ビュフォンの針”における針を正多角形に置き換え、“正多角形が平行線と交わる確率”を具体的に求めるということである。そしてその確率はある簡単な式で与えられるということを証明した。さらにその結果から正多角形を含む、より一般的な凸図形において成り立つ法則性を予想し、実際に証明することができた。具体的には“凸図形が平行線と交わる確率”はその図形の周長に比例するというものであり、“数学的帰納法を用いた証明”と“確率の排反利用した証明”の2つの方法で証明を行った。

次に私が試みたのは“ビュフォンの針の確率”や自ら導出した“凸図形が平行線と交わる確率”を高次元へ拡張させるということである。ここで私は“ビュフォンの針”と“平行線に対して針や平面図形を落とす”という事象を高次元空間へ拡張させるためのモデルを発案し、そのモデルを用いてこれらの確率を $n$ 次元へ拡張させた式を導出した。そしてその計算の過程において“ウォリスの積分”と“ $n$ 次元球”の間に成り立つ法則性を発見し、これを用いると高次元化における計算理論を理解することができるということが分かった。

本研究で得られた結果は確率以外に幾何学においても応用が期待できると考えている。例えば、凸図形を様々な角度から平面に正射影させ、そのときにできる影の面積を4倍するとその凸図形の表面積になるという結論を導き出すことができた。その他にも“バルビエの定理”の微分幾何を使わない簡易な証明方法を発案することができた。

今後はこのような幾何学への応用をより深めていきたいと考えている。

### 2. 研究の背景と目的

私は“ビュフォンの針”の積分を用いた解法に興味を引かれ、針ではなく正方形などのその他の平面図形についても積分を用いて確率を導出できると考え、研究を始めた。また一般的なまたは高次元の図形における確率について考察を行い、法則性を見つけ出すことを目的とする。

### 3. 研究内容

#### 3-1 ビュフォンの針

ビュフォンの針の問題とは「間隔 $d$ で描かれた無数の平行線が広がる平面上に長さ $r$ の針を無作為に投げたときにそれが平行線と交わる確率を求める」という問題である(図1参照)。ここで、「針を無作為に投げる」とはその座標と方向を一様乱数で発生させるということである。

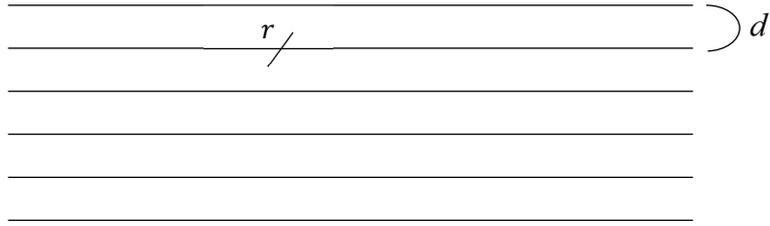


図1 ビュフォンの針

実際に、 $r < d$  のときに交わる確率は  $p = \frac{2r}{\pi d}$  となる。左辺の分母に円周率  $\pi$  が含まれていることから大量の針を投げて、その交差数と試行回数から  $p$  を求め、 $d, r$  を代入することで円周率  $\pi$  の近似値を求めることが可能である（モンテカルロ法）。

### 3-1-1 ビュフォンの針の証明

(証明)

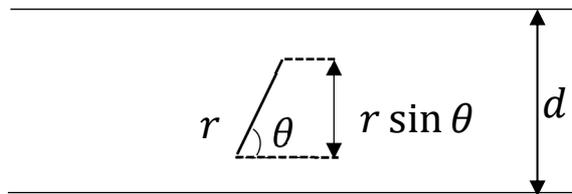


図2 針を傾けたときの様子

平行線に対する針の垂直成分を  $h$  とおくと図2より  $h = r \sin \theta$  が成立する。ここで  $p(\theta) = \frac{h}{d}$  より  $p(\theta)$  のグラフを描くと図3のようになる。

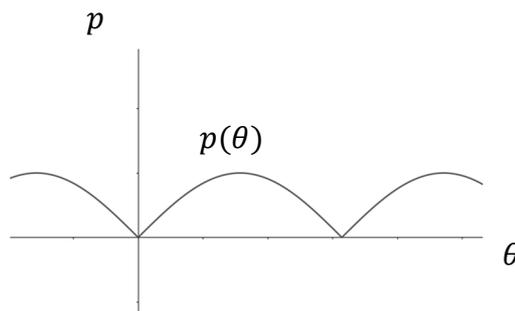


図3  $p = p(\theta)$  のグラフ

求める確率  $p$  はこのグラフの平均の高さとなる。ここで  $p = p(\theta)$  のグラフと  $\theta$  軸、 $p$  軸  $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$  で囲まれた面積を底辺で割るとその平均値  $\bar{p}$  を求めることができる（長方形の高さとみなす。図4参照）。

$$\bar{p} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r \sin \theta}{d} d\theta \div \frac{\pi}{2} = \frac{2r}{\pi d} \quad (\text{証明終})$$

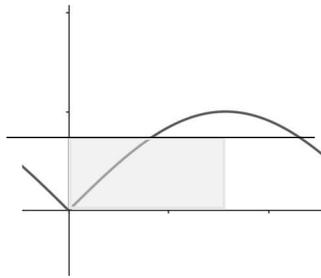


図4 平均値  $\bar{p}$  を求める

### 3-1-2 ビュフォンの針のシミュレーション

エクセルを用いて簡単なシミュレーションを行った。ここで座標（垂直方向のみ）と方向をランダム関数で表した。

表1 シミュレーション結果

落とした針の本数	交わった針の本数	$\pi$ の測定値
10	7.4	2.703
20	11.1	3.063
50	33.1	3.021
100	61.7	3.241
1000	633.1	3.159
10000	6337.1	3.156
1000000	636510.2	3.142

$d=r=1$ とし、それぞれ10回ずつの試行の平均をとっている。試行回数を増やせば増やすほど理論値 ( $\pi=3.141592\dots$ ) に近い値を導き出すことができた。

### 3-2 正多角形への拡張

針の代わりに正多角形を落としたときに、平行線と交わる確率についての研究を行った。

#### 3-2-1 シミュレーション

一辺を  $r=1$ 、 $d=5$  とする。針と同様にシミュレーションを行い、1000回の試行で平行線と交わった図形の数を求めた。今回は正三角形、正四角形、正五角形、正六角形の場合を調べた。

表2 多角形のシミュレーション結果

正三角形	正四角形	正五角形	正六角形
193	258	291	381

このときに平行線と交わる図形の数の比は  $3:4:5:6$  に近い比であり、正  $n$  角形が平行線と交わる

確率は、 $n$  と比例関係があると予想できる。

### 3-2-2 正 $n$ 角形 ( $n=3, 4, 5, 6$ ) での確率

ビュフォンの針と同様に、正射影および向を変化させたときの長さの平均値を利用して求める。またそれぞれの座標は以後、複素数平面を用いて表すことにする。

虚部が正の複素数を  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  としたとき、それらと原点を結んでできる図形の虚軸方向への正射影の長さを  $h$  とおくと

$$h = \text{Max}\{\text{Im}(\alpha_1), \text{Im}(\alpha_2), \dots, \text{Im}(\alpha_n)\}$$

と表すことができる。

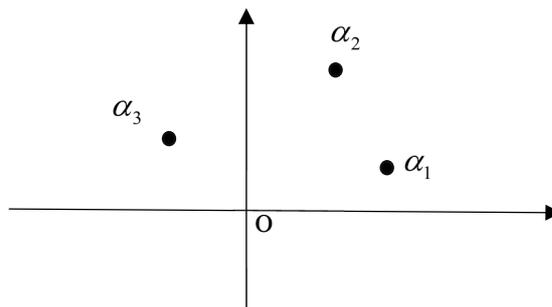


図5 複素数平面における正射影

例えば図5の場合を考える。虚軸方向への正射影において関係するのは  $\alpha_2$  と  $0$  であり、その長さは  $\text{Im}(\alpha_2)$  である。

#### (1) 正三角形の場合

求める確率を  $p_3$  とする。

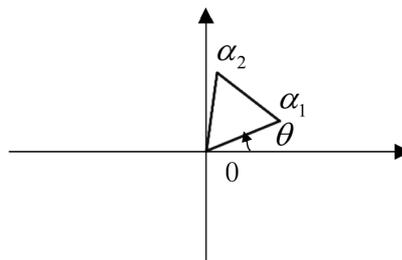


図6 正三角形の場合

図6のように原点中心で正三角形を  $\theta$  だけ回転させて考える。このとき対称性より、 $0 \leq \theta < \frac{2}{3}\pi$  で考えればよい。

・  $\text{Im}(\alpha_2) \geq \text{Im}(\alpha_1)$  のとき

$$\text{Im}\left(r \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + ir \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\right) \geq \text{Im}(r \cos \theta + ir \sin \theta)$$

ここで、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$  なので

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \geq \sin \theta \text{ より、}$$

$$h = \text{Max}\{\text{Im}(\alpha_1), \text{Im}(\alpha_2)\} = r \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right).$$

ゆえに、

$$\bar{h} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} h \, d\theta \div \frac{\pi}{3} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} r \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) d\theta \div \frac{\pi}{3} = \frac{3r}{\pi}$$

$$\text{したがって、} p_3 = \frac{\bar{h}}{d} = \frac{3r}{\pi d}.$$

・  $\text{Im}(\alpha_1) \geq \text{Im}(\alpha_2)$  のとき

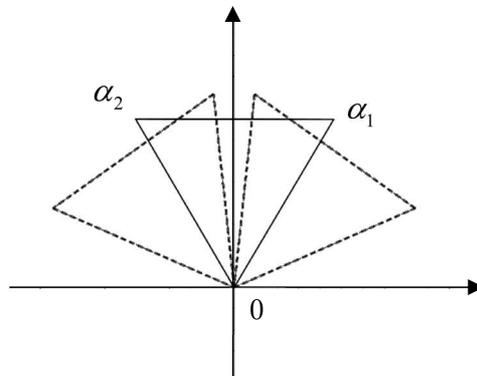


図7  $\text{Im}(\alpha_1) \geq \text{Im}(\alpha_2)$  の場合

対称性（線対称）を利用すれば、同様の結果になる。

(2) 正四角形（正方形）の場合

求める確率を  $p_4$  とする。

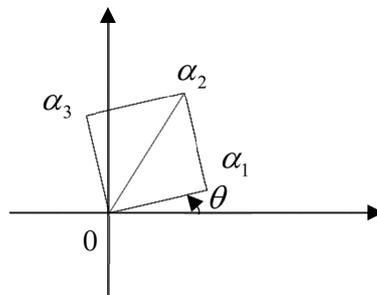


図8 正方形の場合

このとき対称性より、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$  で考えればよい。

三角形の場合と同様に考えると、

$$h = \text{Max}\{\text{Im}(\alpha_1), \text{Im}(\alpha_2), \text{Im}(\alpha_3)\} = \sqrt{2}r \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

となる。したがって、

$$\bar{h} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} h d\theta \div \frac{\pi}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}r \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) d\theta \div \frac{\pi}{4} = \frac{4r}{\pi}$$

より、 $p_4 = \frac{\bar{h}}{d} = \frac{4r}{\pi d}$  となる。

### (3) 正五角形の場合

求める確率を  $p_5$  とする。

正三角形の場合と同様に  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{5}$  で考えると、

$$h = \frac{1+\sqrt{5}}{2} r \sin\left(\theta + \frac{2}{5}\pi\right)$$

なので、

$$\bar{h} = \int_0^{\frac{\pi}{5}} h d\theta \div \frac{\pi}{5} = \int_0^{\frac{\pi}{5}} \frac{1+\sqrt{5}}{2} r \sin\left(\theta + \frac{\pi}{5}\right) d\theta \div \frac{\pi}{5} = \frac{5r}{\pi}$$

ゆえに、 $p_5 = \frac{\bar{h}}{d} = \frac{5r}{\pi d}$  となる。

### (6) 正六角形の場合

求める確率を  $p_6$  とする。

正方形の場合と同様に、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$  で考えると、

$$h = 2r \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

なので、

$$\bar{h} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} h d\theta \div \frac{\pi}{6} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2r \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) d\theta \div \frac{\pi}{6} = \frac{6r}{\pi}$$

ゆえに、 $p_6 = \frac{\bar{h}}{d} = \frac{6r}{\pi d}$  となる。

以上から考えると、正角形を落としたときに、平行線と交わる確率  $p_n$  は、

$$p_n = \frac{nr}{\pi d}$$

と予想できる。

### 3-2-3 正 $n$ 角形での確率

実際に、正角形を落としたときに平行線と交わる確率  $p_n$  が、 $p_n = \frac{nr}{\pi d}$  であることを証明する。

定理 1

間隔  $d$  の無数の平行線が描かれた平面上に、一辺の長さが  $r$  ( $r \ll d$ ) である正  $n$  角形を無作為に落としたとき、それらが交わる確率を  $p_n$  とすると、

$$p_n = \frac{nr}{\pi d}$$

が成り立つ。

(証明)  $n$  の偶奇に分けて証明する。

(1)  $n = 2m - 1$  ( $n$  が奇数) のとき

$\alpha_1$  と  $\alpha_{m-1}$  を結ぶ線分の長さを  $l$  とする。図 9 において、余弦定理より、

$$l = r \sqrt{\frac{1}{2 \left( 1 - \cos \frac{\pi}{2m-1} \right)}}$$

となる。

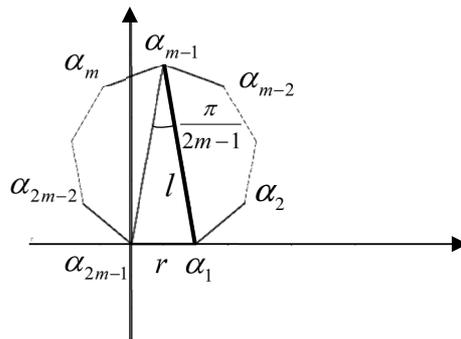


図 9 正  $2m - 1$  角形の場合

ここで、

$$\text{Max}\{\text{Im}(\alpha_1), \text{Im}(\alpha_2), \dots, \text{Im}(\alpha_{2m-1})\} = \text{Im}(\alpha_{m-1}) \text{ とする。}$$

このとき、これまでと同様に、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2m-1}$  で考えると、 $\sin\left(\theta + \pi\left(1 - \frac{2}{2m-1}\right)\right) \geq \sin \theta$  よ

り、 $h = l \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2m-1}\right)\right)$  である。

したがって、三角関数に関する和積公式や半角の公式を利用すると、

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \int_0^{\frac{\pi}{2m-1}} h \, d\theta \div \frac{\pi}{2m-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2m-1}} l \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2m-1}\right)\right) d\theta \div \frac{\pi}{2m-1} \\ &= l \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2m-1}\right)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{2m-1}\right)\right) \right\} \div \frac{\pi}{2m-1} \end{aligned}$$

$$= 2l \sin \frac{\pi}{2(2m-1)} \div \frac{\pi}{2m-1}$$

$$= \frac{(2m-1)r}{\pi}$$

である。したがって、

$$p_{2m-1} = \frac{\bar{h}}{d} = \frac{(2m-1)r}{\pi d}$$

となる。

対称性を利用することにより、

$\text{Max}\{\text{Im}(\alpha_1), \text{Im}(\alpha_2), \dots, \text{Im}(\alpha_{2m-1})\} = \text{Im}(\alpha_{m-1})$  となる場合以外についても、同様の結果を得ることができる。

(2)  $n = 2m$  ( $n$  が偶数) のとき

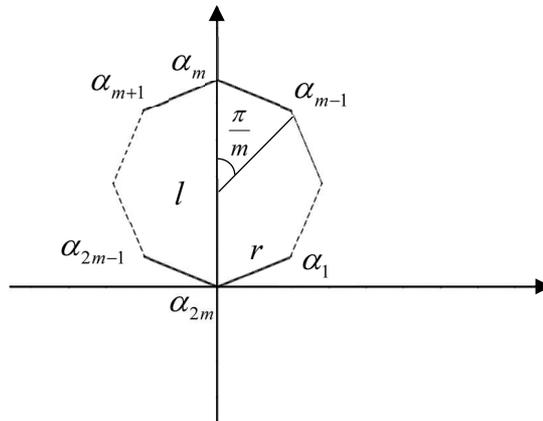


図 10 正  $2m$  角形の場合

$\alpha_m$  と  $\alpha_{2m}$  を結ぶ線分の長さを  $l$  とする。図 10 において余弦定理を用いると、

$$l = r \sqrt{\frac{2}{1 - \cos \frac{\pi}{m}}}$$

となる。

ここで、

$$\text{Max}\{\text{Im}(\alpha_1), \text{Im}(\alpha_2), \dots, \text{Im}(\alpha_{2m})\} = \text{Im}(\alpha_m)$$

とする。

このとき、これまでと同様に、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{m}$  で考えると、 $h = l \sin \left( \theta + \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{1}{m} \right) \right)$  である。

したがって、

$$\bar{h} = \int_0^{\frac{\pi}{m}} h \, d\theta \div \frac{\pi}{m} = \int_0^{\frac{\pi}{m}} l \sin \left( \theta + \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{1}{m} \right) \right) d\theta \div \frac{\pi}{m}$$

$$= l \left\{ \cos \left( \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{1}{m} \right) \right) - \cos \left( \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \right) \right\} \div \frac{\pi}{m}$$

$$= 2l \sin \frac{\pi}{2m} \div \frac{\pi}{m} = \frac{2mr}{\pi}$$

である。したがって、

$$p_{2m} = \frac{\bar{h}}{d} = \frac{2mr}{\pi d}$$

となる。

ゆえに(1)と(2)より、3以上のすべての自然数 $n$ に対して、 $p_n = \frac{nr}{\pi d}$  が成り立つ。 (証明終)

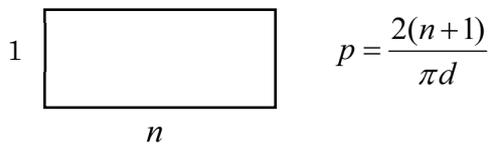
### 3-3 凸図形への拡張

正 $n$ 角形を含む凸図形を落としたときに、平行線と交わる確率について研究を行った。

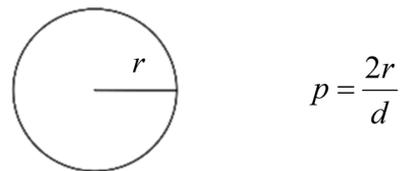
#### 3-3-1 凸図形の場合

さまざまな凸多角形について、平行線と交わる確率を求めた。結果を紹介する。

(1) 底辺 $n$ 、高さ1の長方形



(3) 半径 $r$ の円



(2) 内接する正三角形の一辺を $r$ とするルーローの三角形



(4) 半径 $r$ の半円

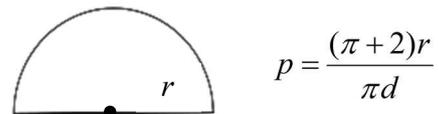


図 11 種々な凸図形の場合

図 11 の(1)から(4)の結果と正 $n$ 角形の場合の確率を合わせて考えると、凸図形の周の長さを $L$ としたとき、その凸図形を落として平行線と交わる確率は、 $p = \frac{L}{\pi d}$  となるのではないかと予想できる。

#### 3-3-2 凸多角形の場合

まず、凸多角形において、 $p = \frac{L}{\pi d}$  が成り立つことを証明する。以後、凸多角形の周の長さを $L$ 、凸

$n$  角形と平行線が交わる確率を  $p_n$  とおく。

(1) 数学的帰納法を用いた証明

(i)  $n=3$  のとき

正三角形と同様に複素数平面上で考える。しかし、それぞれの辺、角度に対称性がないことに注意する必要がある。

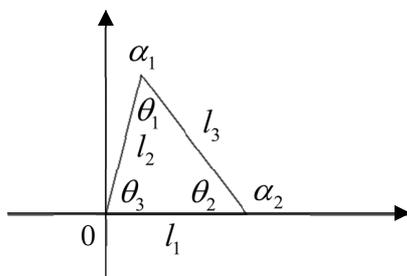


図 12 複素数平面上の凸三角形

①  $\text{Im}(\alpha_2) \geq \text{Im}(\alpha_1) > 0$  のとき  $\sin(\theta + \theta_3) \geq \sin \theta > 0$  なので、 $0 < \theta \leq \theta_2$

②  $\text{Im}(\alpha_1) > \text{Im}(\alpha_2) \geq 0$  のとき  $\sin \theta > \sin(\theta + \theta_3) \geq 0$  なので、 $\theta_2 < \theta \leq \pi - \theta_3$

③  $\text{Im}(\alpha_1) \geq 0 > \text{Im}(\alpha_2)$  のとき  $\sin \theta \geq 0 > \sin(\theta + \theta_3)$  なので、 $\pi - \theta_3 < \theta \leq \pi$

これ以降は、原点中心の点対称を利用できるので、 $0 < \theta \leq \pi$  のみ考えればよい。

①～③より、

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \frac{1}{\pi} \left\{ l_2 \int_0^{\theta_2} \sin(\theta + \theta_2) d\theta + l_1 \int_{\theta_2}^{\pi - \theta_3} \sin \theta d\theta + l_3 \int_{\pi - \theta_3}^{\pi} \sin(\theta - \theta_2) d\theta \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \{ l_2 (\cos \theta_3 + \cos \theta_1) + l_3 (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) + l_1 (\cos \theta_2 + \cos \theta_3) \} \\ &= \frac{1}{\pi} \{ (l_2 + l_3) \cos \theta_1 + (l_3 + l_1) \cos \theta_2 + (l_1 + l_2) \cos \theta_3 \} \end{aligned}$$

ここで、余弦定理から、

$$\cos \theta_1 = \frac{l_2^2 + l_3^2 - l_1^2}{2l_2l_3}$$

$$\cos \theta_2 = \frac{l_3^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_3l_1}$$

$$\cos \theta_3 = \frac{l_1^2 + l_2^2 - l_3^2}{2l_1l_2}$$

を代入して計算すると、

$$\bar{h} = \frac{1}{\pi} (l_1 + l_2 + l_3) = \frac{L}{\pi}$$

となるので、 $p_3 = \frac{\bar{h}}{d} = \frac{L}{\pi d}$  が成り立つ。

(ii)  $n=k$  のとき

$p_k = \frac{L}{\pi d}$  が成り立つと仮定する。

$n=k+1$  のとき、図 14 の  $k+1$  角形において、 $A_k$  を点  $A_k(\alpha_k)$  として、

$$l_1 = A_{k+1}A_1 + A_1A_2, \quad l_2 = A_{k+1}A_2$$

とおく。

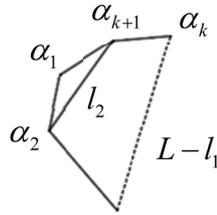


図 13 頂点を 1 つ削る

平行線と  $\triangle A_{k+1}A_1A_2$  が交わる確率を  $p_{(3)}$ ， $k$  角形  $A_2A_3 \cdots A_{k+1}$  が交わる確率を  $p_{(k)}$ ，線分  $A_{k+1}A_2$  が交わる確率を  $p_{(l)}$  とおくと、以下の等式が成り立つ。

$$p_{k+1} = p_{(3 \vee k)} = p_{(3)} + p_{(k)} - p_{(l)} \quad \cdots (*)$$

すると、(i) より、 $p_{(3)} = \frac{l_1 + l_2}{\pi d}$ 。仮定より、 $p_{(k)} = \frac{L - l_1 + l_2}{\pi d}$ 。また、ビュフォンの針における事実より、 $p_{(l)} = \frac{2l_2}{\pi d}$ 。

これらを(\*)式に代入して、

$$p_{k+1} = \frac{l_1 + l_2}{\pi d} + \frac{L - l_1 + l_2}{\pi d} - \frac{2l_2}{\pi d} = \frac{L}{\pi d}.$$

以上より、3 以上のすべての自然数  $n$  に対して、 $p_n = \frac{L}{\pi d}$  が成立する。

(証明終)

## (2) 排反を利用した証明

図 14 のような凸  $n$  角形を考える。平行線は 2 つの辺とのみ交わると考え、それぞれの辺と交わる確率を  $p_1, p_2, \dots, p_n$  とおく。

このとき、いずれかの辺と交わる確率は  $\sum_{k=1}^n p_k \quad \cdots \textcircled{1}$  である。

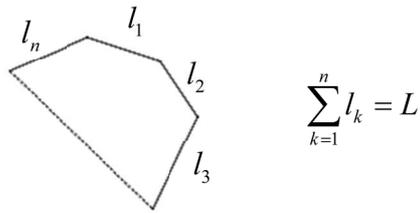


図 14 辺長が  $l_1, l_2, \dots, l_n$  である凸多角形

$p_i \cap p_j (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, i < j)$  は互いに排反であるので (凸性より直線が 3 つ以上の辺と共有点を持つことはない。)

$$p = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (p_i \cup p_j) (i < j) \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで確率の対称性より  $p_i \cup p_j = p_j \cup p_i$  が成立するので

$$q = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (p_i \cup p_j) (i \neq j) \quad \text{とおくと} \quad p = \frac{1}{2} q \quad \dots \textcircled{2} \quad \text{が成立する。}$$

また  $l_i$  が平行線と交わったとき、 $l_i$  以外のいずれかの辺とも交わっているので

$$p_i = \sum_{j=1}^n p_i \cup p_j (i \neq j) \quad \dots \textcircled{3}$$

ここでビュフォンの針より

$$p_i = \frac{2l_i}{\pi d} \quad \dots \textcircled{4}$$

③、④よりこれらを②に代入して

$$p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i = \frac{1}{\pi d} \sum_{i=1}^n l_i = \frac{L}{\pi d} \quad (\text{証明終})$$

### 3-3-3 凸図形での確率と証明

次に曲線部分を凸図形が含んでいても、 $p = \frac{L}{\pi d}$  が成り立つことを証明する。

(1) 図 17 のように凸図形に三角形を内接させる。また、すき間を埋めるように三角形を詰める操作を繰り返す。



図 15 すき間を埋める操作

凸図形の周の長さを  $L$  として、操作を  $x$  回繰り返したときの多角形の周の長さを  $f(x)$  とする。このとき、三角不等式より、 $f(x) < f(x+1)$ 。また、凸性より  $f(x) < L$  である。上に有界な単調増加列は上限に収束するので、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  となる。そこで、操作を  $x$  回繰り返したときに平行線と交わる確率を  $p_1(x)$  とおくと、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p_1(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\pi d} = \frac{L}{\pi d} \quad \dots \textcircled{1}$$

(2) 図 18 のように凸図形に三角形を外接させる。また、すき間にできる三角形を削る操作を繰り返す行う。

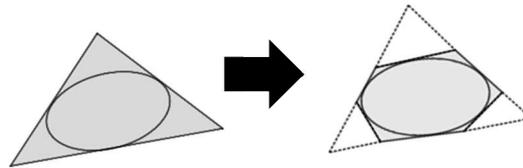


図 16 すき間を削る操作

この操作を  $x$  回繰り返したときの多角形の周の長さを  $g(x)$  とする。このとき、三角不等式より、 $g(x) > g(x+1)$ 。また、凸性より  $g(x) > L$  である。下に有界な単調減少列は下限に収束するので、 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L$  となる。そこで、操作を  $x$  回繰り返したときに平行線と交わる確率を  $p_0(x)$  とおくと、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p_0(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{\pi d} = \frac{L}{\pi d} \quad \dots \textcircled{2}$$

(3) (1)において凸図形と凸多角形との間にある残ったすき間とのみ交わる確率を  $p^{(1)}(x)$ 、(2)において残ったすき間とのみ交わる確率を  $p^{(2)}(x)$  とする。このとき、

$$p_1(x) + p^{(1)}(x) = p = p_0(x) - p^{(2)}(x)$$

が成り立ち、 $p^{(1)}(x) > 0$ 、 $p^{(2)}(x) > 0$  より、 $p_1(x) < p < p_0(x)$   $\dots \textcircled{3}$  が成り立つ。

以上から、①～③より、はさみうちの原理により、 $p = \frac{L}{\pi d}$ 。 (証明終)

ここまでの議論により、次の定理が成り立つことを証明できた。

## 定理 2

間隔  $d$  の無数の平行線が描かれた平面上に、周の長さが  $L$  である凸図形を無作為に落としたとき、それらが交わる確率を  $p$  とすると、

$$p = \frac{L}{\pi d}$$

が成り立つ。

ここで、ビュフォンの針について再考する。底辺が  $\Delta h$ ，高さが  $r$  である長方形を落としたときに、平行線と交わる確率は定理 2 より、 $\frac{2(r+\Delta h)}{\pi d}$  である。ここで、針は底辺の長さが限りなく小さい長方形であると考え、

$$p = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{2(r+\Delta h)}{\pi d} = \frac{2r}{\pi d}$$

となる。循環論法が生じるため、これはビュフォンの針の事実を証明することにはならないが、分子の係数が 2 である理由などを説明することができる。

### 3-4 高次元空間への拡張

ビュフォンの針や定理 1、定理 2 の高次元化に関する研究を行った。

#### 3-4-1 高次元化への拡張理論

定理 2 の次元を単純に 1 つ上げた場合、表面積に比例する等式を導き出すことが可能ではないかと考えた。本節ではその等式を発見することを目標とする。

##### (1) 視点を変える

定理 2 のモデルは現実的に考えると図形を落とす人は 3 次元にいるので直接次元を上げようとする、4 次元空間を考える必要があり、現実的な範囲の次元に収めることが難しくなる。ここで定理 2 のモデルを図 18 のように言い換えて考える。図 18 のモデルは図形の落とす方向を変え、平行に並ぶ線分の上から図形を落とすというモデルであり、このようにすることで 2 次元平面内に収めることが可能になり、次元を拡張を考えやすくなる。

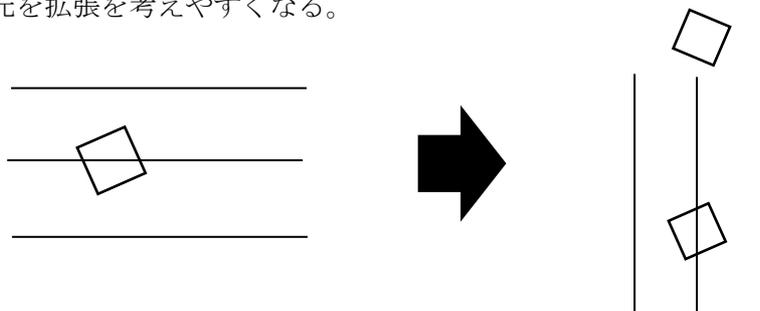


図 17

図 18

##### (2) 3 次元への拡張

###### 【仮説 1】 平行面

直線の次元を上げると平面になるから、平行線は平行面に置き換えることにより、拡張できるという仮説である。

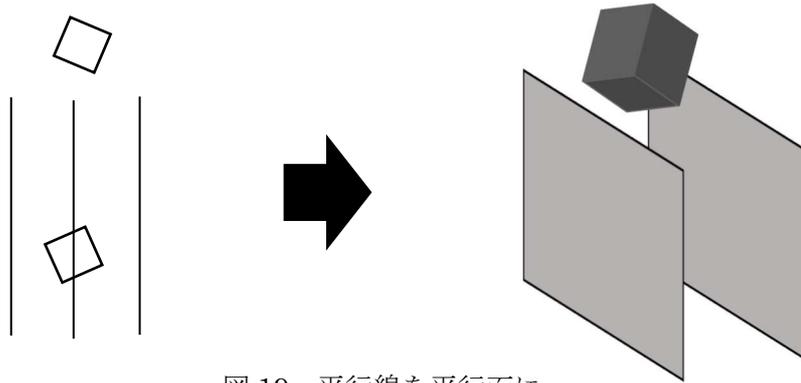


図 19 平行線を平行面に

立体図形を平行面の上から落とすというモデルである。しかし、仮説 1 が誤りであることを示す反例を見つけることができた。

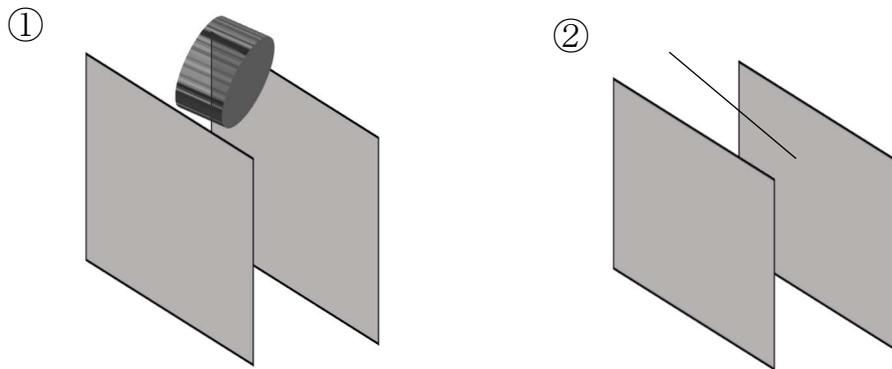


図 20 仮説 1 の反例

図 20 の 2 つの図形を比較したとき、表面積が小さいのは②であるのに対し、明らかに交わる確率が小さいものは①である。よって、平行面に交わる確率は表面積に比例しないと考えられる。

また、単純に定理 2 の分子の次元を 1 つ上げたとしても、仮説 1 のモデルでは分母にある間隔  $d$  の次元（平行面の幅）が上がっていないことが成り立たない原因であると考えられる。

### 【仮説 2】 格子平面

定理 2 の式  $p = \frac{L}{\pi d}$  において右辺の分母、分子は共に 1 次元の単位を表していることが分かる。ここで定理 2 の次元を拡張させたときに得られる式の分母（表面積）、分子（間隔）は 2 次元の単位を表すのではないかと予想した。しかし、仮説 1 の平行面のモデルでは表面積は 2 次元の単位を表しているが、平行面の間隔は 1 次元であり、1 次元の単位を表している。このため、目的の式を導けなかったのではないかと考え、またそれを導くためには間隔の次元を 2 次元へ拡張させる必要があると考えた。ここで発案した格子平面のモデルを紹介する。

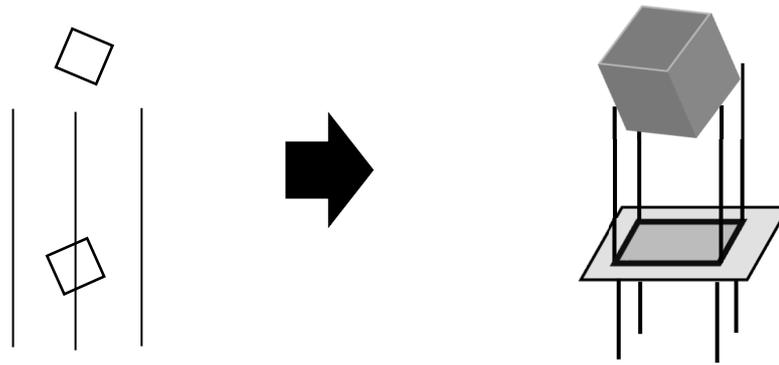


図 21 平行線を格子平面に

立体図形を格子状に並べた線分の上から落とすというモデルである。また図 21 のようにこれらの線分に対して垂直で格子点を含む平面を格子平面と呼ぶ。

図 21 で線分の間隔は 2 次元であり、このようなモデルを 2 次元格子空間（単位正方形）と呼ぶ。また一般的な  $n$  次元において  $n$  次元格子空間と呼び格子点の間隔を単位  $n$  次元格子空間と呼ぶ。さらに落とす対象となる図形が線分と交わることを格子と共有点をもつという。

(3) 定義

$n$  次元格子空間内で  $m$  次元の図形  $A$  が  $k$  次元の領域を動くことができるときに格子と共有点を持つ確率を  $p(n, m, k)$  とおく。

$$\text{(例) } p(1, 1, 1) = \frac{r}{d} \quad (\text{ただし、} r \ll d)$$

$$p(1, 1, 2) = \frac{2r}{\pi d} \quad (\text{ただし、} r \ll d)$$

$$p(1, 2, 2) = \frac{L}{\pi d} \quad (\text{ただし、} L \ll d)$$

3-4-2 定理 2 の 3 次元化

(1)  $p(2, 2, 2)$  の計算

格子平面上において単位正方形（格子点に囲まれた正方形）の面積を  $s$ ，落とす図形の面積を  $c$  ( $c \ll s$ ) とし、その図形が格子点と交わる確率について考える。

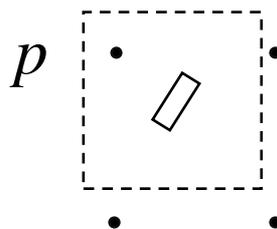


図 22 図形の近傍としての単位正方形

「固定された格子平面上に図形を落とす」とは、逆に考えて「固定された図形上に格子平面を落と

す」としてもよい。図 22 は図形の近傍にある格子点を示している。ここで、格子平面の周期性を利用すると、点 1 つ当たりが動ける座標の範囲は図 22 中の点線で囲まれた単位正方形の内部になる。よって、「格子点と図形が交わる確率」は「単位正方形の内部の 1 つの点  $p$  に着目して、点  $p$  が図形の内部に存在する確率」と置き換えることができる。

よって  $c \ll s$  のとき、 $p(2, 2, 2) = \frac{c}{s}$  が成り立つ。

ここで、 $p(1, 1, 1) = \frac{r}{d}$  と比較すると、1 つ次元が上がったと考えることができる。よって、この等式を定理 2 と同様に拡張させることにより、表面積に比例する等式を発見できると予想した。

## (2) $p(2, 2, 3)$ の計算

### 事実

平面  $P$  に含まれ面積が  $S$  である図形  $A$  を平面  $Q$  に正射影したときの面積は  $S \cos \theta$  である。ただし、 $\theta$  を平面  $P$  と平面  $Q$  のなす角とする。

### (証明)

2 つの平面の交線を座標軸  $x$  とおく。ここで  $x = k$  で図形  $A$  を切断する。このとき  $a \leq k \leq b$  とし、 $A$  の切り口の線分の長さを  $f(k)$  とおくと、

$$S = \int_a^b f(k) dk$$

が成り立つ。また、 $A$  に正射影される図形  $A'$  の切り口の線分の長さを  $g(k)$  とおくと、

$$g(k) = \cos \theta f(k)$$

が成り立つ。よって  $A'$  の面積を  $S'$  とおくと、

$$S' = \int_a^b g(k) dk = \int_a^b \cos \theta f(k) dk = S \cos \theta$$

となる。

(証明終)

ここで、3-4-1 節の(3)④に基づいて単位正方形の面積を  $s$ 、発生させる図形の面積を  $c$  とおく。

仮説 1  $p(2, 2, 3) = \frac{2c}{\pi s}$  である。

ビュフォンの針と同様に考えると、

$$\bar{c} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} c \cos \theta d\theta \div \frac{\pi}{2} = \frac{2c}{\pi} \quad p = \frac{\bar{c}}{s} = \frac{2c}{\pi s} \quad \text{となる。}$$

しかし、これはなす角が一様乱数のもとで図形を発生させたときに、格子点と交わる確率であり、方向を一様乱数のもとで考えたときの確率ではない。

一般に、なす角を決定しても方向ベクトルが決定される訳ではない (図 27 参照)。

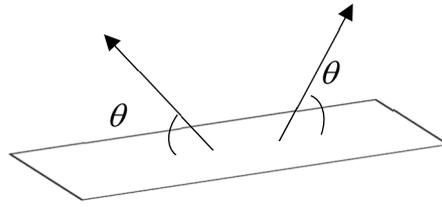


図 23 なす角と方向ベクトル

よって、なす角が一様乱数で表せるとは限らず、仮説 1 の信憑性は下がる。

①方向についてベクトルを用いて厳密に考える。

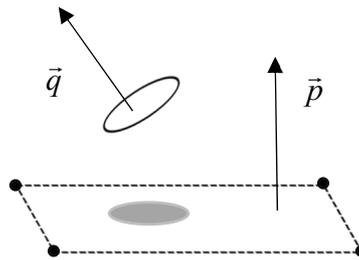


図 24 2つの法線ベクトル

図 24 のように、単位正方形の法線ベクトル  $\vec{p} = (0, 0, 1)$  と発生させる図形の法線ベクトル  $\vec{q} = (x, y, z)$  をおき、2つの法線ベクトルのなす角を  $\theta$  とおく。このとき、 $\vec{q}$  は、 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 、つまり単位ベクトルとし、対称性から、 $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$ 、 $z \geq 0$  で考える。このとき、それぞれのベクトルの内積を利用すると、

$$p = \frac{c \cos \theta}{s} = \frac{c}{s} \cdot \frac{(0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z)}{|\vec{p}| |\vec{q}|} = \frac{cz}{s}.$$

よって、 $\vec{q}$  の方向を一様乱数で発生させたときの  $z$  成分の期待値を求める必要がある。 $z$  成分の期待値を  $E[z]$  と表す。

②球面状の点の一様分布として考える。

$\vec{q}$  の条件である  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  と、 $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$ 、 $z \geq 0$  を幾何的に考えると、 $\frac{1}{8}$  球面と解釈することができる。

$\vec{q}$  の先端を1つの点として考えると、 $\vec{q}$  の方向を一様乱数で発生させるとは、 $\frac{1}{8}$  球面上に点を一様分布させると考えることができる。

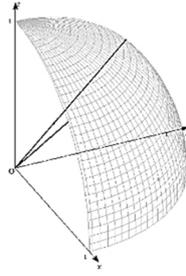


図 25  $\frac{1}{8}$  球面上の一様分布

このとき、球面を媒介変数を用いると、

$$\begin{aligned}x &= \cos \theta \sin \varphi, \\y &= \cos \theta \cos \varphi, \\z &= \sin \theta\end{aligned}$$

と表すことができる。図 29 はこの媒介変数を用いて表した球であり、 $\theta, \varphi$  は等間隔で表されている。しかし、これは明らかに緯線と経線の交点が球面で一様に分布されているとはいえず、北極にその交点が集中していることがわかる。よって、 $\theta, \varphi$  を一様乱数にしても球面上に点を一様に分布できないと考えた。

実際にこれらを一様乱数にすると、 $\theta, \varphi$  は独立で無相関であり、

$$E[x] = E[\cos \theta]E[\sin \varphi] = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi^2},$$

$$E[y] = E[\cos \theta]E[\cos \varphi] = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi^2},$$

$$E[z] = E[\sin \theta] = \frac{2}{\pi}.$$

ここで、 $\frac{2}{\pi}$  は 3-1-1 節の(3)と同様に計算して求めた。よって対称性が崩れており、一様分布とはいえないことがわかる。

### ③正確な一様分布を考える。

なぜ  $\theta, \varphi$  を一様乱数にすると、 $x, y, z$  の期待値が揃わないのかを考えた結果、北極点  $(0, 0, 1)$  に点が集中しており、密度が偏っているからだと考えた。つまり  $\varphi$  を一様乱数にしても密度の偏りは生じないが、 $\theta$  を一様乱数にすると密度の偏りが生じるということである。

ここで  $0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \theta_1$  における領域を  $\Delta s$  とし、 $\Delta s$  が一様乱数となる条件を考える。(  $\Delta s$  が一様乱数となるように点を球面上に発生させれば、間隔が等しくなり、密度の偏りがなくなる。)

$$\Delta s = \int_0^{\theta_1} 2\pi \cos x dx = 2\pi \sin \theta_1$$

となるので  $\theta$  を一様乱数にするのではなく、 $\sin \theta$  を一様乱数にすればよいことが分かる。

確認としてそれぞれの期待値を求めると、 $\theta, \varphi$  は独立で無相関であり、

$$E[\sin \varphi] = E[\cos \varphi] = \frac{2}{\pi},$$

$$E[\sin \theta] = \frac{1}{2}, E[\cos \theta] = \frac{\pi}{4}$$

となるので、

$$E[x] = E[\cos \theta]E[\sin \varphi] = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{1}{2},$$

$$E[y] = E[\cos \theta]E[\cos \varphi] = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{1}{2},$$

$$E[z] = E[\sin \theta] = \frac{1}{2}$$

となり、それぞれの対称性を維持できていることがわかる。

ゆえに、3-4-2節の(2)①より、

$$p(2, 2, 3) = \frac{cE[z]}{s} = \frac{c}{2s}.$$

(3) 次に、 $p(2, 3, 3)$  を求める (定理2の2次元化)。

① 3-3-2節の(2)と同様に考える。

発生させる凸  $n$  多面体のそれぞれの面積を、 $c_1, c_2, \dots, c_n$  とおき、 $F = \sum_{k=1}^n c_k$  とおくと、 $F$  は表面

積を表す。このとき、いずれかの面と交わる確率は  $\sum_{k=1}^n p_k \dots$  ① である。

$p_i \cap p_j (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, i < j)$  は互いに排反であるので (凸性より直線が3つ以上の辺と共有点を持つことはない。)

$$\begin{aligned} p &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (p_i \cap p_j) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} (p_i \cup p_j) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (p_i \cap p_j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} (p_i \cup p_j) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n p_k = \frac{1}{4s} \sum_{k=1}^n c_k = \frac{F}{4s} \end{aligned}$$

② 3-3-3節と同様に考える。

四面体 OABC を考える。 $\triangle OAB, \triangle OBC, \triangle OAC, \triangle ABC$  の面積を  $s_1, s_2, s_3, s_4$  として、それぞれ、

$\triangle OAB, \triangle OBC, \triangle OAC$  と  $\triangle ABC$  のなす角を  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  おく。ここで、 $0 < \theta_i \leq \frac{\pi}{2} (i=1, 2, 3)$  とす

る。このとき、

$$s_4 = s_1 \cos \theta_1 + s_2 \cos \theta_2 + s_3 \cos \theta_3 < s_1 + s_2 + s_3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ（三角不等式の3次元化）。

[1] 表面積が  $F$  である凸（立体）図形の内部に四面体を内接させる。すき間を埋めるように四面体を詰める操作を繰り返し行い、 $x$  回繰り返したときの凸多面体の表面積を  $F(x)$  とおく。

①より  $F(x) < F(x+1)$ 。また、凸性から、 $F(x) < F$ 。上に有界な単調増加列は上限に収束するので、 $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = F$ 。よって、 $x$  回繰り返したときに3次元空間内の格子点と交わる確率を  $P_1(x)$  とおくと、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P_1(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{4s} = \frac{F}{4s} \quad \cdots \textcircled{2}$$

[2] 表面積が  $F$  である凸（立体）図形の外部に四面体を外接させる。すき間にできる四面体を削る操作を繰り返し行い、 $x$  回繰り返したときの凸多面体の表面積を  $G(x)$  とおく。

①より  $G(x) > G(x+1)$ 。また、凸性から、 $G(x) > F$ 。下に有界な単調減少列は下限に収束するので、 $\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = F$ 。よって、 $x$  回繰り返したときに3次元空間内の格子点と交わる確率を  $P_0(x)$  とおくと、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P_0(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{G(x)}{4s} = \frac{F}{4s} \quad \cdots \textcircled{3}$$

[3]（複雑化したモデルで）[1]において凸図形と凸多面体との間にある残ったすき間とのみ交わる確率を  $P^{(1)}(x)$ ，[2]において残ったすき間とのみ交わる確率を  $P^{(2)}(x)$  とする。

このとき、

$$P_1(x) + P^{(1)}(x) = p(2, 3, 3) = P_0(x) - P^{(0)}(x) \text{ が成り立ち、 } P^{(1)}(x) > 0, P^{(0)}(x) > 0 \text{ より、}$$

$$P_1(x) < p(2, 3, 3) < P_0(x) \quad \cdots \textcircled{4} \text{ が成り立つ。}$$

$$\text{以上から、} \textcircled{2} \sim \textcircled{4} \text{より、はさみうちの原理により、 } p(2, 3, 3) = \frac{F}{4s}. \quad (\text{証明終})$$

以上から、3-4-2節の(1)の定義に基づいて、単位格子平面の面積を  $s$ ，発生させる図形の表面積を  $F$  とおくと、次の定理が成り立つ。

### 定理3

$$F \ll s \text{ であるとき、 } p(2, 3, 3) = \frac{F}{4s}$$

が成立する。

### 3-5 n次元空間への拡張

定理2、定理3より、 $p(1, 2, 2) = \frac{L}{\pi d}$ ,  $p(2, 3, 3) = \frac{F}{4s}$  となることがわかった。すると、それぞれの右辺の係数に注目して、なぜ次元が上がると無理数である $\pi$ が消えるのかについて疑問に思った。そこで本節では、これらを一般化してその疑問を解消することを目標とする。

#### 3-5-1 諸定義

以下の記号を定義する。

- $V^{(n)}$  : 落とす対象とする  $n$  次元図形の体積
- $S^{(n)}$  : 落とす対象とする  $n+1$  次元図形の表面積
- $d^{(n)}$  : 単位  $n$  次元格子空間の体積
- $V_n$  :  $n$  次元球の体積
- $S_n$  :  $n+1$  次元球の表面積
- $\mathbb{R}^n$  :  $n$  次元ユークリッド空間

#### 3-5-2 定数に着目した定理2および定理3の一般化

いくつかの手順を経て一般化する。

以下の2つの命題が真であることを前提とする。

##### 命題1

$$p(n, n, n) = \frac{V^{(n)}}{d^{(n)}} \text{ が成立する。}$$

3-4-2 (1) の理論を  $n$  次元へ拡張させると成立すると考えられる。

##### 命題2

$$p(n, n+1, n+1) = \frac{k_n S^{(n)}}{d^{(n)}} \text{ を満たす定数 } k_n \text{ が存在する。}$$

図形の体積を  $u_n$ , それをなす角  $\theta$  で  $\mathbb{R}^n$  に正射影させたときの  $n$  次元図形の体積を  $u_n^\downarrow$  とおく。このとき 3-4-2 の事実①より  $n=2$  において  $u_2^\downarrow = u_2 \cos \theta$  が成立する。これは  $u_1^\downarrow = u_1 \cos \theta$  が成立することを利用して証明されており、帰納的な関係があることからすべての自然数  $n$  に対して、 $u_n^\downarrow = u_n \cos \theta$  が成り立つと考えられる。これにより 3-3-2 (1) <2> と 3-3-2 (2) の証明を応用させると命題2が成立すると考えられる。

(1) 定数の決定

3-5-2節の(1)~(3)の研究をまとめると、結局  $p(n, n+1, n+1)$  は  $S^{(n)}$  に比例するというを示していることになる。よって、その比例定数を決定するには最低限ひとつの図形を当てはめる必要がある。

そこで、 $n$ 次元球を代入すると、

$n+1$ 次元球の正射影が  $n$ 次元球で一定であることを利用すると、

$$p(n, n+1, n+1) = p(n, n, n)$$

が成立し、命題1, 命題2より

$$p(n, n, n) = \frac{V_n}{d^{(n)}} \quad p(n, n+1, n+1) = \frac{k_n S_n}{d^{(n)}}$$

が成立するので  $k_n = \frac{V_n}{S_n}$  が成り立つ。

(5) 定理4の利用

ここで本研究で発見した定理4を紹介する。

定理4 等式  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{V_n}{S_n} \pi$  が成り立つ。

定理4を証明するために、以下の事実を紹介しておく。

$$\begin{aligned} \cdot V_{2n+2} &= \frac{2\pi}{2n+2} V_{2n}, \quad V_1 = 2, V_2 = \pi \\ \cdot S_{2n+2} &= \frac{2\pi}{2n+1} S_{2n}, \quad S_1 = 2\pi, S_2 = 4\pi \end{aligned}$$

(定理4の証明)

漸化式と数学的帰納法を用いて間接的に証明した。

[1]  $n$ が偶数のとき

(i)  $n=2$ のとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{V_2}{S_2} \pi = \frac{\pi}{4} \text{ より、成立する。}$$

(ii)  $n=2k$ のとき題意が成り立つと仮定すると、 $n=2(k+1)$ のとき

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+2} x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^{2k+1} x dx \\ &= (2k+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x dx - (2k+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+2} x dx \end{aligned}$$

ゆえに、

$$(2k+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+2} x \, dx = (2k+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x \, dx \quad \dots(*)$$

ここで仮定より、

$$(2k+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x \, dx = (2k+1)\frac{V_{2k}}{S_{2k}}\pi = (2k+1)\frac{\frac{2k+2}{2\pi}V_{2k+2}}{\frac{2k+1}{2\pi}S_{2k+2}}\pi = (2k+2)\frac{V_{2k+2}}{S_{2k+2}}\pi$$

より、(\*)から、

$$(2k+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+2} x \, dx = (2k+2)\frac{V_{2k+2}}{S_{2k+2}}\pi$$

したがって、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+2} x \, dx = \frac{V_{2k+2}}{S_{2k+2}}\pi.$$

[2]  $n$  が奇数のとき

(i)  $n=1$  のとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1, \quad \frac{V_1}{S_1}\pi = 1 \quad \text{より、成立する。}$$

(ii)  $n=2k+1$  のとき題意が成り立つと仮定すると、 $n=2(k+1)+1$  のとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+3} x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^{2k+2} x \, dx = (2k+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x \, dx - (2k+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+3} x \, dx$$

ゆえに、

$$(2k+3)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+3} x \, dx = (2k+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x \, dx \quad \dots(**)$$

ここで仮定より、

$$(2k+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x \, dx = (2k+2)\frac{V_{2k+1}}{S_{2k+1}}\pi = (2k+2)\frac{\frac{2k+3}{2\pi}V_{2k+3}}{\frac{2k+2}{2\pi}S_{2k+3}}\pi = (2k+3)\frac{V_{2k+3}}{S_{2k+3}}\pi$$

より、(\*\*)から、

$$(2k+3)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+3} x \, dx = (2k+3)\frac{V_{2k+3}}{S_{2k+3}}\pi$$

したがって、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+3} x \, dx = \frac{V_{2k+3}}{S_{2k+3}}\pi.$$

よって、[1], [2]から、数学的帰納法よりすべての自然数で題意は示された。

(証明終)

また一般項を直接求めて計算しても定理4が確かに成立することが確認できた。

[1]  $n$  が偶数のとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{V_n}{S_n} \pi = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} r^n}{\left(\frac{n}{2}\right)! 2(2\pi)^{\frac{n}{2}} r^n} \frac{(n-1)!!}{n!!} \pi = \frac{(n-1)!!}{\left(\frac{n}{2}\right)! 2^{\frac{n}{2}} 2} \frac{\pi}{2} = \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}$$

よって  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{V_n}{S_n} \pi$  が成立する。

[2]  $n$  が奇数のとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!}$$

$$\frac{V_n}{S_n} \pi = \frac{2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} r^n}{n!!} \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)!}{(n+1)\pi^{\frac{n+1}{2}} r^n} \pi = \frac{2^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{n+1}{2}\right)!}{(n+1)n!!} = \frac{(n-1)!!}{n!!}$$

よって  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{V_n}{S_n} \pi$  が成立する。

(証明終)

ここで定理 4 を利用すると

$$p(n, n+1, n+1) = \frac{k_n S^{(n)}}{d^{(n)}} = \frac{V_n S^{(n)}}{S_n d} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \frac{S^{(n)}}{\pi d^{(n)}}$$

となる。また

$$p(n, n, n+1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \frac{2V^{(n)}}{\pi d^{(n)}} \quad \text{となるので、例えば } n=1 \text{ を代入すると}$$

$$p(1, 1, 2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \frac{2V^{(1)}}{\pi d^{(1)}} \text{ が得られる。}$$

これはビュフォンの針の確率を表しており、さらに 3-1-1 を振り返ると確かに

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$  を用いて計算していることが分かる。このように  $p(n, n, n+1)$  と  $p(n, n+1, n+1)$  の式をあえて被積分関数を残して与えることにより、ビュフォンの針、定理 2 の  $n$  次元化を簡潔に説明することができる。

またウォリスの積分を用いて式を展開すると以下の定理を得る。

### 定理 5

$$p(n, n, n+1) = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{V^{(n)}}{d^n} (n: \text{even}) \\ \frac{2}{\pi} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{V^{(n)}}{d^n} (n: \text{odd}) \end{cases}$$

が成り立つ。

### 定理 6

$$p(n, n+1, n+1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{S^{(n)}}{d^n} (n: \text{even}) \\ \frac{1}{\pi} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{S^{(n)}}{d^n} (n: \text{odd}) \end{cases}$$

が成り立つ。

このように、 $n$ が奇数のときには係数に $\pi$ が存在し、 $n$ が偶数のときには係数に $\pi$ が存在しないことから、なぜ定理 2 の次元が上がると $\pi$ が消えるのかについて納得することができた。

## 3-6 応用例

これまでの研究を他の定理や研究に応用させることができないか、応用例を考えた。

### 3-6-1 バルビエの定理の別証明

応用例の 1 つとして、「バルビエの定理」が挙げられる。この定理はバルビエにより、1860 年に発見された。今までは微分幾何の知識（曲率）が証明に必要だと考えられていた。しかし、定理 2 を利用すると簡単に証明することができる。

ここで、定幅図形とは、図 26 のように、図形の角度にかかわらず高さが一定の図形のことを指す。

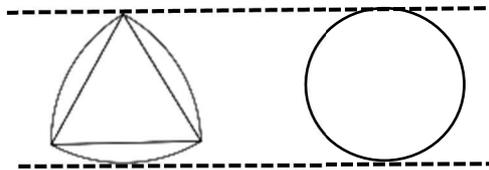


図 26 定幅図形

### 定理 7 (バルビエの定理)

定幅図形の周長は一定である。

ここで以下の命題が命題が真であることを前提とする。

### 命題 3

定幅図形は凸図形である。

逆に凸図形でない平面図形は滑らかに転がすことができないため幅に範囲が生じ、定幅図形でないと考え、命題 3 が成立すると考えた。

(バルビエの定理の別証明)

周長  $L$ 、幅  $r$  の定幅図形を幅  $d$  の平行線に落とし、平行線と交わる確率を  $p$  とおく。

このとき幅が一定なので

$$p = \frac{r}{d} \cdots \textcircled{1}$$

命題 3 より定理 2 を適応できるので

$$p = \frac{L}{\pi d} \cdots \textcircled{2}$$

①、②より  $p$  を消去して

$$\frac{r}{d} = \frac{L}{\pi d} \Leftrightarrow L = \pi r \quad (\text{一定})$$

(証明終)

### 3-6-2 バルビエの定理の 3 次元化

#### 定義

どこから見ても面積が一定に見える立体図形を定積図形と呼ぶ。

ここで以下の命題が命題が真であることを前提とするれば、定理 8 が成立する。

#### 命題 4

定積図形は凸図形である。

#### 定理 8

定積図形を平面に正射影させたときにできる影の面積を  $c$ 、定積図形の表面積を  $F$  とおくと、 $F = 4c$  が成り立ち、定積図形の表面積は一定である。

(定理 8 の証明)

3-4-1(2) の 3 次元モデルにおいて落とす対象とする図形の表面積を  $F$ 、平面に正射影したときにできる影の面積を  $c$  とおき、単位正方形の面積を  $s$  とおき、格子と共有点を持つ確率を  $p$  とおく。

このとき平面に正射影したときにできる影の面積は一定なので

$$p = \frac{c}{s} \cdots \textcircled{1}$$

命題 4 より定理 3 を適応できるので

$$p = \frac{F}{4s} \cdots \textcircled{2}$$

①、②より  $p$  を消去して

$$\frac{c}{s} = \frac{F}{4s} \Leftrightarrow F = 4c \quad (\text{一定})$$

(証明終)

### 3-6-3 期待値の利用 (非凸図形の場合の考え方)

確率を用いて、 $r \geq d$  の場合や非凸図形の場合を考えることは難しい。しかし期待値の加法性を利用すれば考えることができ、以下の定理を得た。

#### 定理 9

間隔  $d$  で描かれた無数の平行線が広がる平面上に周長  $L$  の多角形を無作為に投げたときに生じる平行線との交点の個数の期待値を  $E$  とすると  $E = \frac{2L}{\pi d}$  が成立する。

(証明)

多角形の一辺の長さ  $r_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) に対して平行線と交わる点の個数の期待値を  $E_k$  とする

と  $E_k = \frac{2r_k}{\pi d}$  が成り立つので

期待値の加法性より

$$E \left[ \sum_{k=1}^n k \right] = \sum_{k=1}^n E[k] = \sum_{k=1}^n \frac{2r_k}{\pi d} = \frac{2L}{\pi d}$$

(証明終)

同様に 3 次元においても定理 9 と同様の証明を行うと以下の定理 10 を得た。

#### 定理 10

3-4-1 (2) における図 21 のモデルにおいて多面体の表面積を  $F$ 、単位正方形の面積を  $s$ 、格子との共有点の個数の期待値を  $E$  とおくと  $E = \frac{F}{2s}$  が成立する。

(証明)

多面体の面の面積  $c_k (1 \leq k \leq n)$  に対して格子との共有点の個数の期待値を  $E_k$  とすると  $E_k = \frac{c_k}{2s}$  が

成り立つので

期待値の加法性より

$$E\left[\sum_{k=1}^n k\right] = \sum_{k=1}^n E[k] = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{2s} = \frac{F}{2s}$$

(証明終)

### 3-6-4 周長、表面積の測定

#### 定義

周長  $L$  の凸平面図形をある直線に正射影させたときにできる影の平均の長さを  $\bar{r}(L)$  とし、表面積  $F$  の凸立体図形をある平面に正射影させたときにできる影の平均の面積を  $\bar{c}(F)$  とおく。

$p(1, 2, 2)$  を定理 2 を用いて 2 通りの表記で表し、バルビエの定理の別証明と同様にそれらの確率を消去すると以下の定理を得た。

#### 定理 1 1

$$L = \pi \bar{r}(L) \quad \text{が成立する。}$$

#### 定理 1 2

$$F = 4\bar{c}(L) \quad \text{が成立する。}$$

影の長さ、面積の測定により図形の周長、表面積を測定することが可能になる。

## 4. 考察

応用研究において発見した定理 7 の別証明と定理 8 ~ 定理 1 2 のように本研究で得られた結果 (定理 1 ~ 定理 6) は幾何学への多様な応用が可能になることが分かった。また今後の現社会への応用、学問への貢献が最も期待できる定理 1 2 の展望について紹介する。

4-1 定理 12 の利用方法の検討

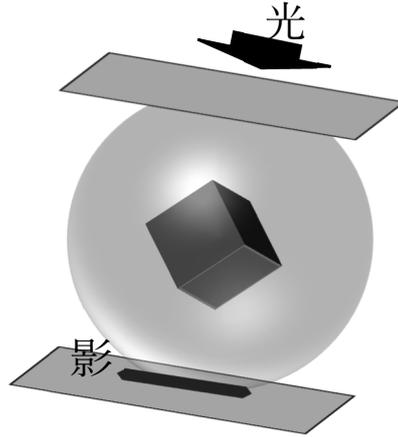


図 27 表面積の測定装置のモデル

推測

凸立体図形の表面積はそれを均等にさまざまな角度から見たときの面積（正射影の面積）を 4 倍すると求められるのではないか。

定理 1 2 を利用する上での難点はどのようにして影の平均を測定するかということである。影の平均の面積とはそれぞれの面（曲面の場合は微小部分）の法線ベクトル  $\vec{p}$ （単位ベクトルとする）の始点を正射影させる平面の法線ベクトル  $\vec{q}$ （単位ベクトルとする）にそろえたときに  $\vec{p}$  の先端が始点を中心とする単位球面上に一様に分布させて図形を正射影させたときの影の面積の平均値を指している。

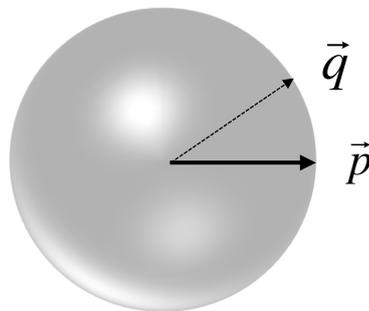


図 28 2つの法線ベクトル

(1) ここで下の図 29 のように正射影させる平面に対して図形（立方体）を設定する。

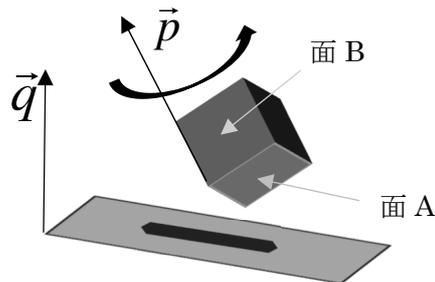


図 29  $\vec{p}$  を動かすモデル

しかし、このように $\vec{q}$ を固定して、 $\vec{p}$ を動かすという方法で影の平均の面積をとるという方法には問題がある。上図において確かに $\vec{p}$ を一様にすれば $\vec{p}$ を法線とする面 $A$ は正射影させる平面に対して一様な方向を向くが、他の面（例えば面 $B$ は一様な方向を向くとは限らない。なぜなら $\vec{p}$ を定めても上図のような回転によって面 $B$ の法線ベクトルの向きが変化するからである。よって $\vec{p}$ を一様な方向に向けたとしても他の面が一様な方向を向くとは限らない。また実際に表面積を測定するときに対称とする図形に接触しなければいけないというのも難点である。

(2) ここで下の図のように図形（立方体）に対して正射影させる平面を設定する。

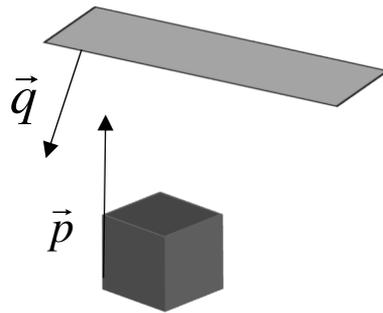


図 31  $\vec{q}$ を動かす

上図のように $\vec{p}$ ではなく $\vec{q}$ を一様な方向を向くようにさせる。このようにすることによって立方体の影の平均の面積を求めることが可能になると考えられる。なぜなら球対称性からそれぞれの面の固定された法線ベクトルに対して $\vec{q}$ は一様な方向を向いているためである。

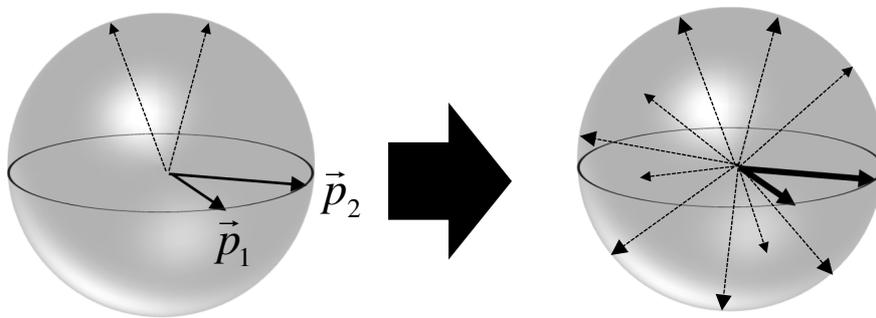


図 32  $\vec{q}$ を様々な方向に向ける

例えば上図のように固定されたベクトル $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ に対して $\vec{q}$ を一様な方向を向くように発生させていくとき、はじめは $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ に対する $\vec{q}$ の方向はそれぞれ差があるように見えるが、 $\vec{q}$ が一様な方向を向くようになればなるほど $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ に対する $\vec{q}$ の方向はともに一様に近づいていることが分かる。このように影の平均の面積を求めることが可能になり、また測定の対象となる図形に接触することなく表面積を測定することができるという点で(2)のモデルは(1)のモデルより優れていると考えた。

(3) シミュレーションによる実験

実際に定理 1 2 の実用が可能であるかを確認する検証実験 (立方体) をシミュレーションを用いて行った。

【方法】

- ① 正射影させる平面の法線ベクトル  $\vec{q}$  (単位ベクトル) 成分を  $(x, y, z)$  と定める。 ( $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ )
- ② 一辺 1 の立方体を定めてそれぞれの面の法線成分を  $(1, 0, 0), (-1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, -1)$  とおく。
- ③  $\vec{q}$  の始点を単位球の中心とし、先端が単位球面上の点としたとき、その点が単位球面上の一様分布になるように  $(x, y, z)$  の乱数を生成する。
- ④ 立方体の影の面積を求め、平均をとる。
- ⑤ 平均の影の面積を 4 倍して表面積に一致するかを確認する。

【結果】

70 回のシミュレーション結果をまとめる。

x 成分	y 成分	z 成分	影の面積				
				-0.99927	-0.03785	0.005403	1.042518
				0.286958	0.286321	-0.91415	1.487431
				0.663861	-0.74151	-0.09724	1.502606
0.629504	-0.63656	-0.44555	1.711616	-0.69239	-0.32381	-0.64479	1.660981
0.92356	0.263975	0.278126	1.46566	-0.8643	0.472727	-0.17181	1.508838
0.200624	0.561016	-0.80313	1.564766	-0.49384	-0.05766	-0.86764	1.419141
0.838223	-0.36346	0.40654	1.608228	0.286585	-0.90572	-0.31232	1.504623
-0.57676	0.755478	0.310809	1.643046	0.37293	-0.84978	-0.37254	1.595259
-0.70881	-0.34391	0.615887	1.668605	0.51894	-0.35299	0.778525	1.650452
-0.36555	0.18808	0.911591	1.465222	0.968288	-0.21515	0.127009	1.310442
0.189516	0.656832	-0.72983	1.576181	0.945685	0.317549	-0.06959	1.332825
-0.81635	0.023214	-0.57709	1.416655	-0.93453	-0.3482	0.073539	1.356273
0.948572	-0.15696	-0.27491	1.380441	-0.29247	0.917806	-0.2685	1.478779
-0.72531	0.37463	0.577565	1.677502				
-0.84358	0.438082	0.310563	1.592229				
0.4818	-0.13321	-0.8661	1.481107	-0.98133	-0.18216	0.061676	1.225171
-0.62665	0.768218	0.130962	1.52583	0.222171	-0.80176	0.554812	1.578746
0.820153	-0.56285	0.102733	1.485732	-0.08928	0.992421	-0.08444	1.166135
-0.58456	-0.52874	0.615405	1.728705	0.459218	-0.60598	-0.64955	1.714741
-0.41082	0.66831	-0.62015	1.699283	-0.31368	0.891524	-0.32679	1.531991
0.111994	-0.87143	0.477557	1.460984	-0.77851	0.172431	-0.60348	1.554422
-0.06423	-0.48496	0.872173	1.421365	0.988953	0.039108	-0.14298	1.171041
-0.56561	0.62852	0.533897	1.728029	-0.75543	-0.55889	0.341998	1.656321
-0.27844	0.842553	-0.46106	1.582052	-0.35038	-0.7564	-0.55235	1.659133

-0.48643	-0.72927	-0.4812	1.696898	-0.75948	0.047573	-0.64879	1.455842
0.842881	-0.3343	-0.42166	1.598839	0.0923	-0.76572	-0.63652	1.494538
0.955366	0.294322	-0.02552	1.275208	0.666899	0.18197	-0.72259	1.571456
-0.16588	-0.34367	-0.92432	1.433874	0.945464	0.260869	0.195054	1.401386
0.823961	-0.04674	0.564716	1.435415	-0.21206	0.472953	-0.85519	1.540203
0.428246	0.310276	-0.84873	1.587247	0.369558	0.013387	-0.92911	1.312057
0.889699	-0.06439	-0.45198	1.406076	0.761708	0.220317	0.609312	1.591337
-0.97158	0.038969	0.233479	1.244029	0.60039	0.632007	0.489999	1.722396
0.327665	-0.55094	-0.76753	1.646133				
-0.08731	0.766935	0.635758	1.490005				
0.623156	0.099661	-0.77572	1.498539				
0.774858	0.630801	0.041052	1.446711				
-0.09155	0.704645	0.70363	1.499823				
0.575792	0.124926	-0.808	1.508714				
0.727394	0.036512	-0.68525	1.449154				
-0.32694	0.905288	0.27123	1.503455				
-0.71864	0.39975	0.568992	1.687385				
-0.25908	-0.69423	-0.67151	1.624817				
-0.97221	-0.21711	0.087614	1.276934				

10回の平均	1.5500
20回の平均	1.5151
30回の平均	1.5085
40回の平均	1.4876
50回の平均	1.4885
60回の平均	1.4900
70回の平均	1.4913

(小数第3位で換算)

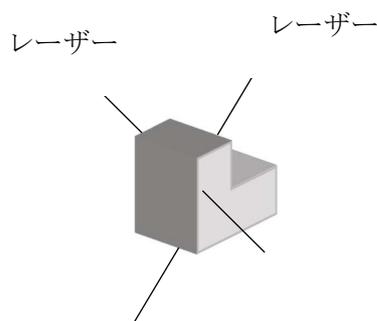
### 【考察】

70回のシミュレーション結果から平均をとると影の平均の面積は約1.4913であることが分かった。ここで $1.4913 \times 4 = 5.9652$ となり、確かに立方体の表面積6に近い値になっていることを確認できた。

このように立方体のシミュレーション結果より確かに(影の平均の面積)  $\times 4 =$  (表面積) が成り立つことを実験的に確認できた。また立方体の他にもこの法則を確認できる図形として球が挙げられる。半径  $r$  の球の影の平均値は  $\pi r^2$  であり、表面積は  $4\pi r^2$  である。確かに(影の平均の面積)  $\times 4 =$  (表面積) が成立していると確認できる。

## 4-2 非凸図形の表面積の測定方法の検討

非凸図形の表面積の測定方法については定理10を利用すれば求められると考えている。



上図のように非凸図形にレーザーで光を当て、その光線が貫くときに生じる交点の個数から表面積を測定できると考えている。

## 5 今後の課題

### 5-1 応用例の研究

定理2および定理3の応用理論に関する研究を進めたいと考えている。今回は周長と面積に関する興味深い不等式を1つ紹介する。

### 等周不等式

平面内の滑らかな曲線で囲まれた領域  $s$  を考える。 $s$  の面積を  $|s|$ 、周長を  $L$  とおくと不等式

$$4\pi|s| \leq L^2$$

が成り立つ。等号は  $s$  が円のときに成立する。

### 5-2 仮説1の研究

3-4-1 (2) の仮説1について平行面と図形の交わる確率に表面積は関係しないという理由からその確率を求めなかったが、実際に確率は何に依存するのかについて考えている。また、その確率は平行面の間隔が1次元であることより、 $p(1, 3, 3)$  と表現できる。つまり正射影を2回行う必要があり、より複雑になるのではないかと考えている。参考までに、 $d$  を平行面の間隔、 $r$  を針の長さとして、 $p(1, 3, 1) = \frac{r}{2d}$  である。3-4-2節(2)の③より空間内での針の座標成分の期待値がわかるので安易に証明できる。

## 6. 参考文献

- [1] 「数学超絶難問」、小野田博一、日本実業出版社
- [2] 「曲線と曲面の微分幾何」、小林昭七、裳華房
- [3] web サイト「高校数学の美しい物語」 <http://mathtrain.jp>