数式のイメージ化で理解を助ける

5年C組　水野　珠希
5年C組　松井　駿介
指導教員　米田　隆

１．概要

数学を学ぶ過程で、多くの理解しがたい概念や難しい数式を日常的な現象に落とし込み、イメージ化し、直感的な理解を助けるための工夫を考えた。

２．研究理由

私たちは相対性理論からワープを考察することを目標として研究をスタートし、一年間勉強に励んだ。その中で何度も感じた、数式を直感的に理解したい、腑に落としたいという気持ちはおそらく誰もが抱く感情であると思う。数学や科学に登場する数式を直感的に理解することは、運用においても大いに助けとなる重要な過程であると考える。そのために、これまでよりもより理解しやすい解釈の仕方を提案したい。

３．研究内容

数式や数学的概念を日常的な場面をたとえに用いて解釈し、視覚的なイメージに落とし込むことでより簡単に理解できる方法を考える。

３－１　勾配(grad)　図１

勾配は３次元スカラー場に対して考えることも多いが、ここでは視覚的イメージのしやすさを優先し２次元スカラー場に対する勾配を視覚化する。f(x,y)で表される２次元スカラー場fは、３次元空間上で(x,y,f(x,y))としてグラフを描くことが可能であり、これは現実世界の地形のように見ることが可能である。ここで、ある点(x,y)における勾配は、地形の(x,y)地点と同じ高さを繋いだ等高線について垂直な方向のうち高い方を向いている(x,y)地点の地面の傾きが大きさのベクトルとして考えることが可能である。

３－２　発散(divergence)　図２

発散も勾配と同様に２次元ベクトル場に対するものを視覚化する。ベクトル場は水の流れに表すことによって理解しやすくなると考えた。ある点ベクトルの向きを水の流れる向きに対応させ、ベクトルの大きさを水の流れる速さに対応させる。そうすることで、発散は、正になる場所は水が湧き出る場所、が負になる場所は水が消滅する(水の下に穴があって流れ出ていると考えるとイメージしやすい)と考えることができる。

３－３　回転(rotation)　図３

回転も発散同様、２次元ベクトル場を水の流れに表して考える。ある点における回転はその場所に葉っぱ等を浮かべる場合を考える。葉っぱがある点に浮かべられ、場所は固定されて自由に回ることができる状況を考えると、葉っぱは周りの流れの速さの差によって回る。ここで、その点での回転は、回る向きに対して右ネジにおける親指の向きで回る速さを大きさとしたベクトルとして表すことができる。回転は３次元ベクトル場に対して行われる演算のため、このイメージを３方向それぞれで行うイメージで考えることができる。

3−4　スカラー場の線積分　図４

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} A$$

スカラー量が分布している場をスカラー場と呼ぶ。スカラー場内の曲線Cに沿ってスカラー量の和を取ることを、スカラー場の線積分と言う。

図のように、雨の降っている場所を水桶を持って曲線Cに沿って一定の速度で通過するとする。雨の降っている場所は、降水量

というスカラー量が分布したスカラー場である。水桶を持ってここを通過したあとに水桶に溜まった水の量は、曲線Cに沿って降水量の和を取った値になる。
スカラー場の線積分はこのようなものだと捉えることができる。

3−5　ベクトル場の線積分　図５

$$\int_C f(x)\,ds$$

ベクトル量が分布している場をベクトル場と言う。ベクトル場内の曲線C上の各点について分布しているベクトルと曲線Cの接線ベクトルの内積を計算し、その和を取ることをベクトル場の線積分と呼ぶ。
ベクトル場の線積分によって、サッカーのドリブルの上手さを測ることができる。
曲線Cに沿ってドリブルすることを考える。
ドリブルのボールタッチでボールにかかる力が一定であり、一定の細かい間隔でボールを蹴るとき、ボールを蹴る力の分布をベクトル場と捉えてベクトル場の線積分を行うと、曲線の接線方向に近い方向に蹴ると線積分の値が大きくなり、方向が外れるほど値が小さくなるので線積分で得られる値によってドリブルの上手さを測ることができる。

3−6　局面の面積　図６
曲面の面積を測りたいとき、曲面状の相異なる2曲線に沿った接ベクトルを考える。
曲線各点の2曲線の接ベクトルを非常に細かく考えて外積をとると、その接ベクトル2つで囲まれた領域の面積を求めることができる。
これは、山の面積を求めたいときに小さな定規を使って山の上すべての領域でたくさんの四角形を作り、いくつの四角形ができたかを数えるようなものである。
図のように、山の表面は遠くから見ると曲面だが、近づくと局所的には平面と見ることができる。山を移動しながら、表面に沿って隙間なく定規を当てて四角形を作ってゆきそれを数えれば、山の表面積を求めることができる。
数式における接ベクトルが定規として作用するのである。

3−7　テンソル　図７
スカラー量、ベクトル量はすでに紹介した。今度は量の次元に注目する。

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

スカラー量は0次元　ベクトル量は1次元の量である。
次元を一般化したものをテンソルと言う。
つまり、スカラー量もベクトル量もテンソルの一種なのである。
テンソルの用例の一つは、2つの量を繋げることである。力と変位を繋げる事例として猫がクッションに座ることを考える。
クッションにかかる力は大雑把に考えると猫にかかる重力であるから、延長下向きの猫の質量に比例したベクトルである。この力に対してクッションは延長下向きに猫の形にへこむのではなく、ゆったりとした曲線を描いて沈む。延長下向きとそれに垂直な2つの異なる座標軸を考えると、力は一方向にだけかかっているのに、変位は力の方向以外にも生じる。猫がクッションに与える一方向の力は、クッションに3方向の変位を生じさせる。この力と変位をテンソルがつなげられる。
同じように今度は斜めに力を加えるとしても、座標軸に沿って力を分解しそれぞれの成分に対して3方向の変位を考えることで、与える力によって生じる変位を計算できる。

５．考察

数式をイメージでとらえることで新しい解釈を探すという作業は、誰しもが学習の過程で経験することだと思う。一人一人が考えて終わるよりも、解釈を共有する場所があれば、教科書の理解を簡単に深めることができると感じた。

６．今後の展望

今後も相対論につながる数学を勉強する中で、理解に用いた解釈を共有していきたい

図１

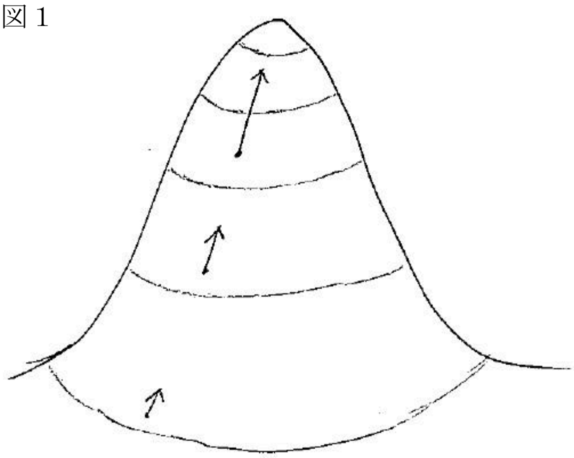


図2

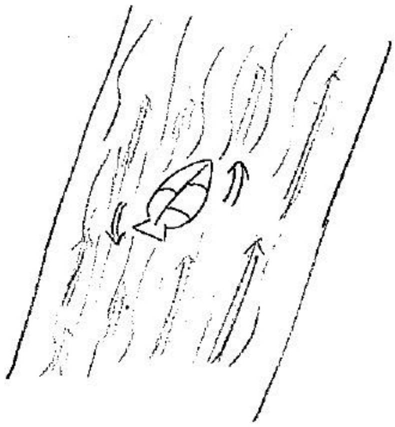


図4

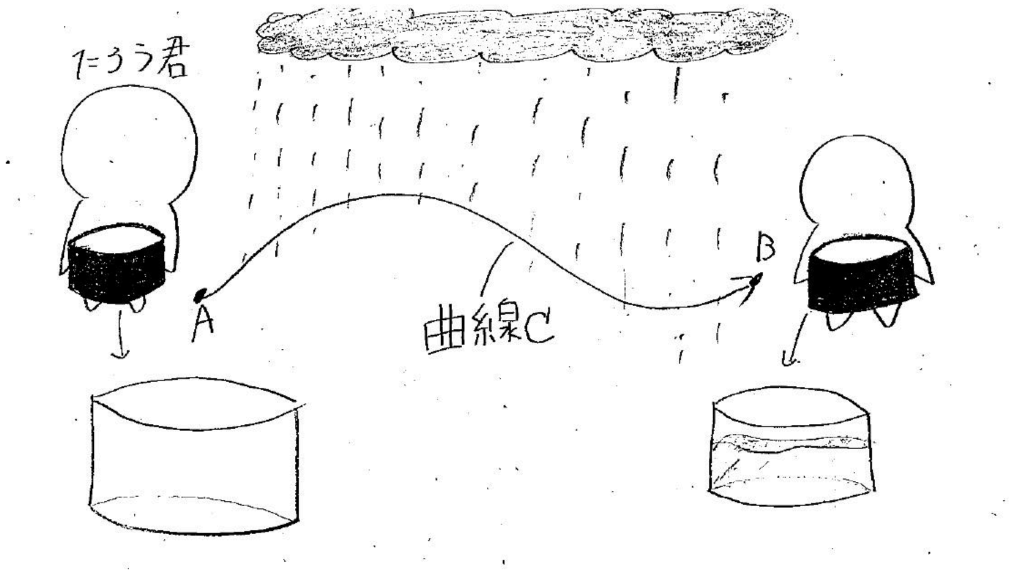


図５

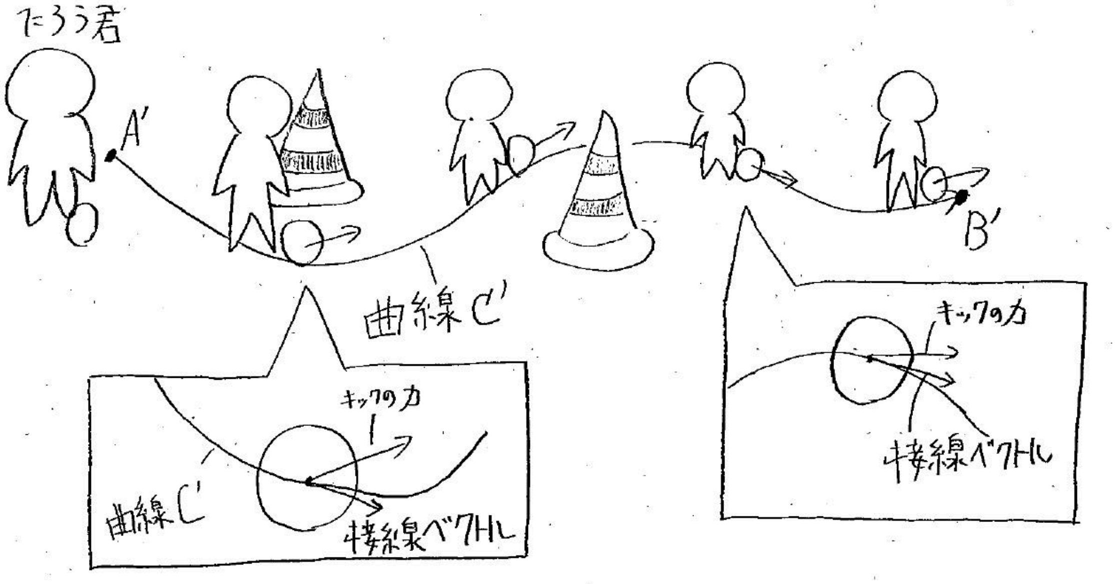
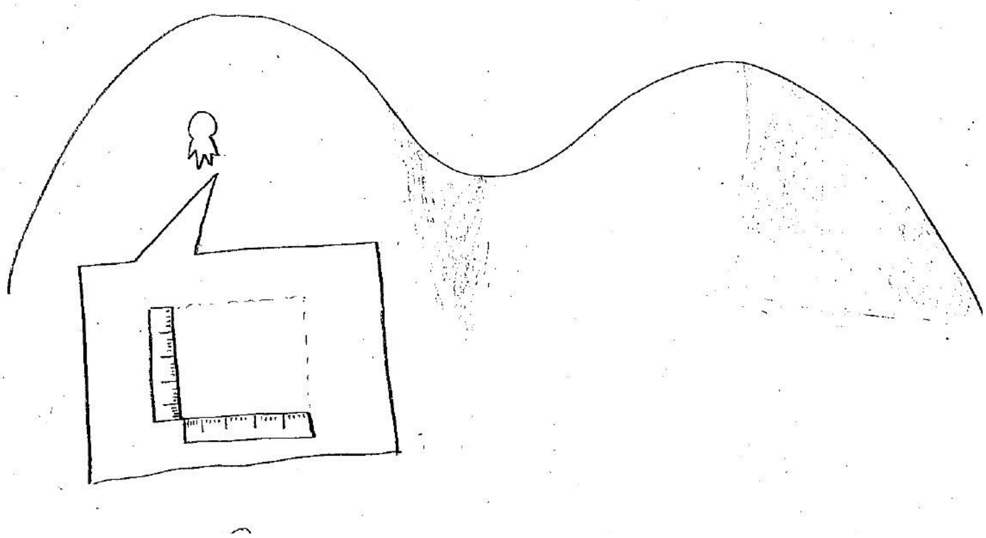


図6



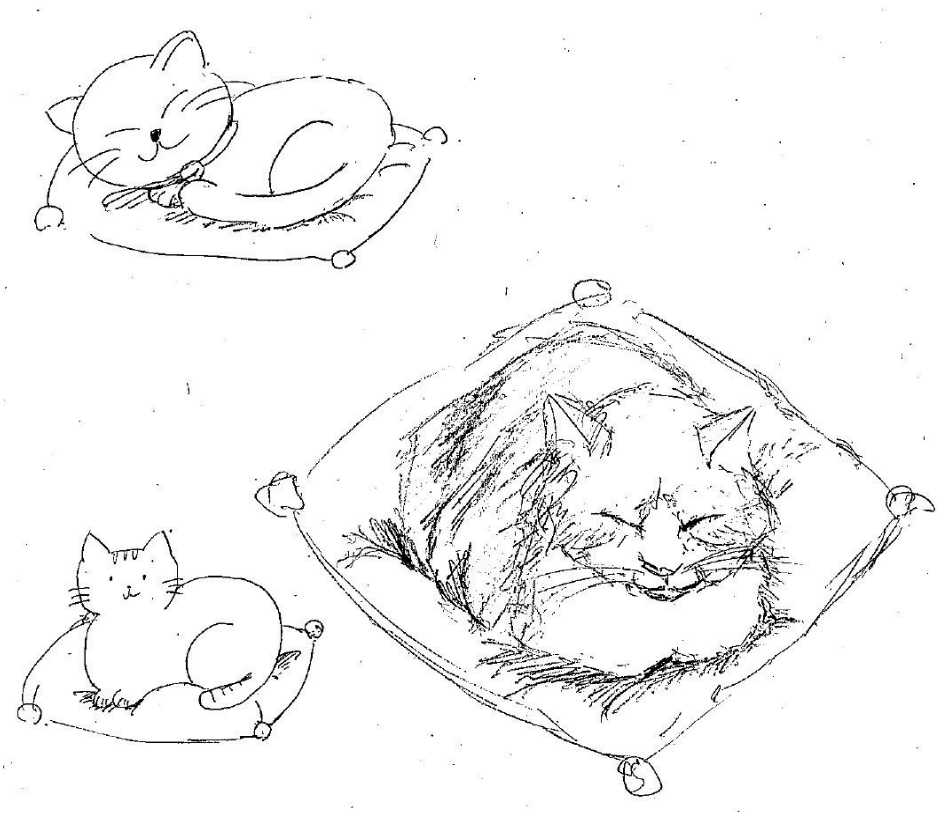


図7