2012年度　奈良女子大学附属中等教育学校　公開研究会　数学科学習指導案

１．日時　　　　　平成24年11月22日(木)　13:30－14:20
２．学級　　　　　6年C組数学特論Ⅱ選択者　　男子17名　女子8名　　計25名
３．教室　　　　　6年C組　普通教室

４．科目・単元　　数学特論Ⅱ　「取り尽くし法と区分求積法」

５．単元目標

積分の学習において扱った区分求積法の考え方をさらに深く理解するために、積分概念が発展していく経過を概観する。特に「取り尽くし法」に焦点を当て、具体的な求積方法を理解することに加えて、概念発展の背景にある無限に対する思想的なスタンスや論法の共通点､相違点について考察､議論する。

６．題材観

定積分の学習において、区分求積法の考え方は求積問題に対する明確なイメージを生徒にもたらし、生徒は細かく分割された長方形を頭の中でどんどん細かくしていくことにより、積分が曲線で囲まれた部分の面積を表していることを直感的に理解する。この考え方に影響を与えたのはエウドクソスやアルキメデスの求積問題に対するアプローチとして知られる「取り尽くし法」であるといわれる。当時の議論は極限操作を避け、二重帰謬法と呼ばれる論法が用いられている。しかし、エウドクソスは、求積問題の対象となる図形や立体をどこまでも細かく分割できるという「可能無限」の概念を数学に持ち込んだ。この考え方がやがて極限という概念につながっていく。また、アルキメデスは求積問題に重心という力学的視点を取り入れている。このような偉大な先人の思考に触れ、積分の概念形成にどのような影響を与えたのかを考えることで､「面積とは？」､「無限とは？」というように次なる問いを見つけ思索が広がっていく。中等教育における数学の授業でも、そのような機会が必要ではないだろうか。

さらに、今回は「リベラルアーツ」の涵養をテーマとする。本授業は「リベラルアーツ」をどう捉えるかの議論に対する一つの試行としての側面を有する。自らが学んだことがどのような意味を持ち、どのような点で特徴的であるのかを把握することは、学習の大きな目的の一つであり、同時に次の学習や研究の動機にもなり得るのではないかと考える。また、本授業のような題材を扱うためには、数学のみならず、歴史、哲学、物理など学問の枠を超えた理解が求められる。さらに、今回のような問いに答えるためには、計算や処理だけではなく、資料を読解し他者の意見を聞き自ら思考し結論を構成せねばならず、その過程において、概念の把握がなされ主体的な学習者としての意識が生まれるものと考える。

７.「数学特論Ⅱ」について

「数学特論Ⅱ」は6年生理系生徒を対象としてⅡ期に開講される2単位の科目であり、週5時間の授業を数学ⅢC の入試演習3時間と発展的内容2時間に分けて授業を行っている。発展的内容としては、本単元の内容に加えて、テイラー展開や近似公式、微分方程式の基本などを扱う。理系生徒の大半は履修しているが、演習を一部に含むため、進路に応じて選択しない生徒も存在する。

８．生徒観

この学年は､授業者が6年を通じて数学を担当してきた｡全体的には数学に対する興味や関心が高く、意欲的に課題に取り組む姿勢が見られる。学力的には、数学を非常に得意とする生徒がいる一方で、苦

手意識を有している生徒まで幅広く存在している。授業での思考や理解も早く、一つ一つの課題を丁寧に取り組むことができる姿勢が備わっている。また、周囲と議論し相互の考え方を検討しながら課題の解決にあたる様子や質問をしあったり教え合ったりする様子も見られる。

９．指導計画

全 6 時間

⑴区分求積法について復習し、アルキメデスの求積方法について理解する。・・・・・3 時間

⑵アルキメデスや取り尽くし法に関する記述をもとに、区分求積法との共通点や相違点について考察する。・・・・1 時間(本時)

⑶アルキメデス以後の求積方法の発展について概説する。・・・・・2 時間

10. 本時の学習指導

前時までに学習した取り尽くし法と区分求積法を比較して検討した共通点や相違点をもとに、「アルキメデスは積分の創始者であるといえるか」という問いについて、個人の考察結果をもとに議論を行うことができる。また、議論を受けて、再度自分の考えを補強ないしは修正することができる。

11. 本時の目標

・課題に対して積極的に取り組み、自分の意見をまとめ、議論に参加する。(関心・意欲・態度)

・取り尽くし法と区分求積法の違いについて考察し、無限に対する考え方の違いを認識することができる。(数学的な見方・考え方)

・自分の考え方を図や文章で説明したり、相手に伝えたりすることができる。(数学的な技能)

・取り尽くし法と区分求積法に関する理解をもとに、議論において論理的に判断できる。(知識・理解)

12. リベラルアーツの観点

本校数学科では、これまで「数学的リテラシー」育成を目標として、指導内容や指導法、また評価に関する研究を行ってきた。その一つの成果として、現実世界における問題を数学の問題へと翻訳(「理想化・単純化」)して、数学の世界の中で解を見出し、その解を再翻訳して現実問題を解決するという一連の活動を「数学する」活動として規定し、このような過程で諸課題を解決する能力の育成を重要視してきた。これは、PISA の提唱する「数学化サイクル」に重なる部分が多い。また、その能力を評価するべく、「リテラシーテスト」を毎年 4 年生対象に行い、経年変化を調べてきた。

このような経緯の中で、Ⅱ期 SSH の研究主題が「中等教育 6 年間において、自然科学リテラシーを基盤とするリベラルアーツの育成のためのカリキュラム開発と、高大接続のあり方についての研究開発」と設定され、数学科においても「リベラルアーツ」を涵養する授業展開等の工夫を検討してきた。これまで重視してきた「数学する」活動に加えて、歴史的な背景や概念自体をじっくり考察する活動、数学の世界の中でさらに抽象化、一般化する活動、時間をかけて数学的な思考を行う活動の意義や効果について議論がなされた。今回の公開授業は、その一つを試行的に行うものであり、積分概念の理解にどのような効果があるのか、あるいは中等教育段階で学問に対するどのような姿勢や態度を身に付ければよいのかについて検討する材料になればと考える。

13. 評価

ア　取り尽くし法と区分求積法について、さまざまな視点から比較、検討することができる。
（数学的な見方・考え方）

イ　自分の意見を表明し、議論に参加することができる。（関心・意欲・態度）

「十分満足であると判断される」状況(a)と評価する具体例

ア　対象である図形を分割するという共通点や、極限操作の違い、重心の考え方の利用などの相違点に注目する。

イ　自分の意見を伝えるだけではなく、相手の意見に対し、質問や反論を行ったり、補足したりする。

「努力を要すると判断される」状況(c)と評価される生徒への手立て

ア　再度、取り尽くし法と区分求積法の概略を生徒自身の言葉で説明させる。

イ　議論の突破口として、論点を与えたり、疑問に思うことやわからないことを相互に質問させたりする。

14. 展開

公開授業までに行った授業の展開についても触れておく。

（※：生徒の反応、○教師の発問など、●教師の支援、☆評価の観点、★リベラルアーツの観点）

	学習活動	指導上の留意点	評価の観点
	1時間目		
課題提示	1．導入と課題の提示 **課題** 積分を学習したときに、区分求積法により、面積や体積の計算の意味を知りました。そこで、このような考え方がどのようにして生まれ、発展してきたのかについて考えてみよう。		
	○積分を用いることにより、面積や体積、曲線の長さが求められることを振り返り、区分求積法の考え方で説明する。	●区分求積法について、全体で復習する。その際に、微小区間や極限の扱いについて振り返る。 ●どのようにして積分の考え方が生まれたのか、どのように区分求積の考え方に発展していったのかを学ぶ必要性と意義を生徒に問う。	☆区分求積法を自分の言葉で説明できる。（知識・理解）

<table>
<tr><td>探究活動</td><td>２．アルキメデスについての説明

○「はじめに、アルキメデスがどのような人物であったのか、当時の数学をはじめとする科学を取り巻く状況はどのようなものだったのかをみてみよう。」

※アルキメデスについて知っていることを列挙する。
※文献などを調べる。

３．エウドクソスの比例論と取り尽くし法

○「アルキメデスの考え方を理解するためには、当時用いられていた論法を知らなければなりません。当時の数学の問題に対するアプローチとして主に用いられていたのは“比”の考え方でした。」</td><td>●アルキメデスの伝記を紹介する。特に業績について確認する。

●当時の学問が論理を中心とした純粋科学を重視し、実用的な技術を軽んじていたことを文献から把握させる。

●準備として、エウドクソスによる比例論および取り尽くし法について概説する。

●帰謬法(背理法)を利用していることを、段階を踏んで丁寧に説明する。

●比を用いて証明を行おうとしていたため、証明自体が複雑で、現代の証明に慣れている我々からは見ると大変込み入った証明になることを実感させたい。</td><td>★古代ギリシアにおける学問に対するスタンスを把握する。

☆比例論や帰謬法を理解することができる。（知識・理解）

★厳密性を確保するために、比例論と帰謬法を駆使していることを感じ取る。</td></tr>
<tr><td colspan="4">２時間目および３時間目</td></tr>
<tr><td>講義</td><td>４．アルキメデスの「方法」

○「では、実際にアルキメデスが行った考察について、見ていくことにしよう。」</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2"><u>課題</u>
アルキメデスは、
「放物線のすべての切片は、同じ底辺と同じ高さをもつ三角形の面積を３分の１だけ超過する」
こと確かめるために３通りの議論を行っています。それらを比較して、どこが同じで、どこが異なるのかを検討しましょう。また、われわれの学んだ区分求積法の考え方との類似点や相違点を考えてみよう。</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>講義</td><td>○課題のいう命題の状況を理解するために、図示してみる。

○はじめに、天秤の発想について理解する。

○①および②について、全体で確認しながらアルキメデスの考え方を理解する。

※図形を天秤にかけて面積比を計算する方法を理解する。
※図形を幅のない線分に分けて考えていることに気付く。
※まったく理解できていない。</td><td>●積分の計算問題として挑戦してみる。座標をいれて、計算によりアルキメデスの主張を確認する。

●線分には長さに比例する、平面図形には面積に比例する重さを与えて議論していることを確認する。

●3 通りの議論について順を追って説明していく。(※資料参照)
①『方法』命題 1 での議論
天秤の発想＋無限小
②『放物線の求積』前半での議論
天秤の発想＋二重帰謬法</td><td>☆3 通りの議論のそれぞれを理解することができる。(数学的な見方・考え方)

★3 通りの議論の要点を把握し、区分求積の考え方と対比できる。</td></tr>
<tr><td colspan="4">4 時間目(本時)</td></tr>
<tr><td>探究活動</td><td>○②における「二重帰謬法」について説明する。</td><td>●厳密な議論を行うよりは、「無限に細かくする」という操作を避けて議論している点に気付かせたい。</td><td></td></tr>
<tr><td>考察</td><td>○「ここまでに紹介した 2 つの方法について検討してみることにしよう。次の 2 つの点から考えてみる。
(1) 2 つの方法を比較して共通点と相違点を挙げてみよう。
(2) 2 つの方法と区分求積法の考え方を比較して、共通点と相違点を挙げてみよう。」

○「次に、グループで議論してみましょう。」

○「各グループでの議論の様子をみんなに紹介してください。」</td><td>●個人で考察を行い、ワークシートにメモさせる。

●個人の意見を披露しあい、賛同できる部分や納得できない部分について議論を行う。

●全体で議論の様子を共有する。他のグループの意見として参考になるものについてメモを取るように指示する</td><td>☆自分の考えを相手に説明し、議論に参加することができる。(数学的な技能)

★無限に小三角形を埋めていくという「可能無限」も考え方が出現していることを把握する。</td></tr>
</table>

	○「このような２つの議論に対して、アルキメデスは証明としての資格を与えていません。なぜでしょうか。」	●アルキメデスの記述から、当時の数学の特性をつかみ、第３の議論へと繋げていく。	
講義	○③について理解する。 ○二重帰謬法について再度確認しながら議論を進める。	●どんどん隙間に小三角形を埋めていくことを認めたうえでの議論であることに気付かせたい。 ●第３の方法 ③『放物線の求積』後半での議論 数列の和＋二重帰謬法 について説明する。	☆現代では無限等比級数として処理できることを理解する。(数学的な見方・考え方)
	５時間目		
考察	○「それでは、第３の方法とこれまでの議論の共通点や相違点について、はじめに個人で考察してみましょう。」 ○「次に、グループで議論してみましょう。」 ○「各グループでの議論の様子をみんなに紹介してください。」 ○「では、再度自分の考えをまとめてみましょう。」	●個人で考察を行い、ワークシートにメモさせる。 ●個人の意見を披露しあい、賛同できる部分や納得できない部分について議論を行う。 ●全体で議論の様子を共有する。他のグループの意見として参考になるものについてメモを取るように指示する。 ●全体の報告を受けて、再度個人で意見をまとめる。ただし、全体を１つの方向へ導くような結論付けは行わない。	★他者の意見を受けて、自分の意見を補完あるいは修正することができる。 ☆積極的に議論に参加する(関心・意欲・態度)
	５．まとめ ○「アルキメデスが後世に与えた影響と、積分や微分の考え方がどのように発展していったのかを見てみよう。」	●アルキメデスの発想や議論が後世の積分概念にどのような影響を与えたのかを概説する。 ●初めに行った積分計算による方法と比較を行うことで、式を用いた表現方法や積分計算の有用性を認識させる。	

		●全体で共有できた部分についてはまとめを行い、意見が分かれた点については、それぞれの論点を確認し、単元の最後に再度検討する機会を設ける。	

15. 参考文献

[1] 「アルキメデスの数学」，伊達文治 著，森北出版

[2] 「積分の歴史」，V. A. ニキフォロフスキー 著，馬場良和 訳，現代数学社

[3] 「天秤の魔術師　アルキメデスの数学」，林栄治，斎藤憲 著，共立出版

[4] 「アルキメデスの『機械学』の復元」，佐藤徹 著，科学の名著 9 (朝日出版社)所蔵

[5] 「測る」，上野健爾 著，東京図書

[6] 「変化を捉える」，高橋陽一郎 著，東京図書

[7] 「数学史」，佐々木力著，岩波書店

[8] 「近世数学の歴史－微積分の形成をめぐって」，中村幸四郎，日本評論社

4. 放物線の求積

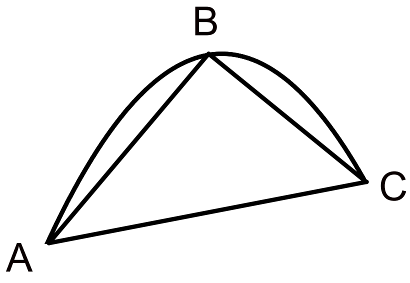
アルキメデスは、次の命題について、3 通りの方法で議論している。

放物線のすべての切片は、同じ底辺と高さをもつ三角形を 3 分の 1 だけ超過する。

具体的にいうと、放物線 ABC と線分 AC で囲まれる図形を「放物線の切片 ABC」ということにする。ここで、点 B は線分 AC と平行な接線を引くことができる放物線上の点、つまり

線分 AC からの距離が最大になる放物線上の点

とする。



このとき、上の命題は、

(放物線の切片 ABC):△ABC＝4:3

が成り立つことを主張している。

■実際にこの命題が成り立つことを、積分を用いて確かめてみよう。

この命題を証明するにあたり、アルキメデスは次の補助定理をはじめに示している。

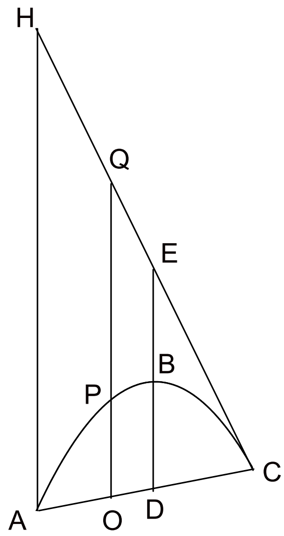
補助定理

放物線の切片 ABC において、点 C における接線を引き、点 A を通り、放物線の軸に平行な直線との交点を H とする。また、放物線 ABC 上に任意の点 P をとり、点 P を通る軸に平行な直線と線分 AC との交点を O，直線 CH との交点を Q とする。

このとき、

OP：OQ＝AO：AC

が成り立つ。

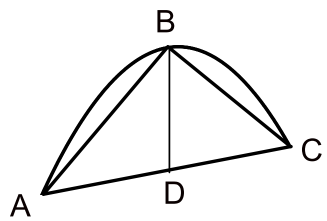


この補助定理は、放物線の以下の性質から導くことができる。

Ⅰ．放物線の切片 ABC 上の点 B における接線と線分 AC が平行であるとする。点 B を通る軸に平行な直線と線分 AC との交点を D とするとき、

AD＝CD

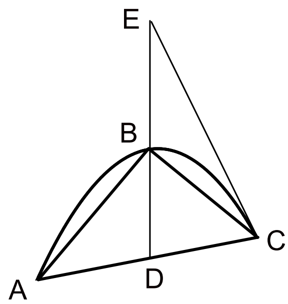
が成り立つ。



Ⅱ．放物線の切片 ABC 上の点 B における接線と線分 AC が平行であるとする。点 B を通る軸に平行な直線と線分 AC との交点を D として、直線 BD と接線の交点を E とするとき、

EB＝BD

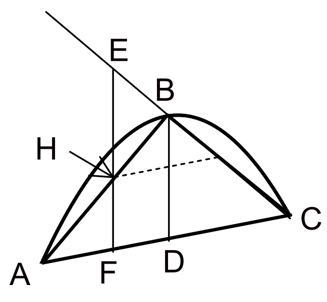
が成り立つ。



Ⅲ．放物線の切片 ABC 上の点 B における接線と線分 AC が平行であるとする。点 B を通る軸に平行な直線と線分 AC との交点を D として、半直線 CB 上に点 E をとり、E を通る軸に平行な直線と放物線の交点を H とするとき、

EF：EH＝DA：DF

が成り立つ。



■２つの議論を比較して、それぞれの特徴をまとめてみよう。

【方法①】	
【方法②】	

■２つの議論を比較して、共通点と相違点を挙げましょう。

共通点	
相違点	

■２つの議論と区分求積法とを比較して、共通点と相違点を挙げましょう。

共通点	
相違点	

■アルキメデスは、著書『方法』のなかで次のように記述しています。

「さて、以上の定理はここまで述べてきたことでは証明されたわけではない。それは、結論が正しいことを示しているといえるだけのものである。それゆえ、この定理が証明されていない点に注意するとともに、結論は正しいと考えて、その幾何学的な証明を整えるべきであろう。」

なぜアルキメデスはこの議論では不十分であると記述しているのですか。あなたに考えをまとめよう。

［あなたの意見］

［他者の意見］

この文章や２つの議論を通じてアルキメデスの数学（幾何）に対する考え方が見えてきます。彼の数学に対するスタンスとはどのようなものだったのでしょうか。あなたの考えをまとめてみよう。

［あなたの意見］

［他者の意見］

【方法③】