

[事例] 神童ガウスが考えたこと！

■対象：中学1年生～3年生

■内容：「数と式」

■ねらい

「1から100までの自然数の和を求めよう。」という単純な問題であるが、ガウスの話題から、自然数の和の求め方を工夫することで、計算力ではなく数学的な考え方のよさを実感するようにする。また、代数的な考え方から幾何的な考えをすることで、発想が広がり代数と幾何の関連にも気づくようになる。問題を解くだけでなく、問題を作成することにより、数の和について、生徒が自ら探究する姿勢をもつことをねらう。作問の方法は、3の倍数や、フィボナッチ数列など数列に興味をもったり、1からnまでの場合でも解けるように一般化して公式を作ったりする考えもでるであろう。いろいろな数学的な考え方をする数学的活動をしてけるとともに、高校で学習する数列、数列の和につながる教材となる。

■授業の流れ

学習活動	指導上の留意点・評価等
<p>(課題提示)</p> <p>ガウスは、ドイツに生まれた19世紀前半の最大の数学者である。彼は少年時代から神童ぶりを発揮し、例えば次のような逸話が伝えられている。</p> <p>彼が、小学生のとき先生が、「1から40までの整数を全部たした答えは何でしょう。」という問題を出して、1時間はかかるだろうと思っていたところ、クラスの中で最年少のガウスが一瞬の間に答えを出してしまった。さて、ガウスの気持ちになって、次の問題を解いてみよう。</p>	
<p>【1】$1 + 2 + 3 + \dots + 100$を求める。</p> <p>・この式をSとおくと、逆に書いてたす方法を思いつく。</p> $S = (100 + 1) \times 100 \div 2$ <p>となる。</p>	<p>・ガウスが即答したという、解決方法を考えさせる。</p>
<p>【2】3つとも同じ解き方ではつまらないので、(2)(3)について違った方法を考えてみる。</p> <p>(2)について</p> $\begin{array}{ccccccc} \bigcirc & + & \bigcirc\bigcirc & + & \bigcirc\bigcirc\bigcirc & + & \dots \\ & & \bigcirc\bigcirc & & \bigcirc\bigcirc\bigcirc & & \\ & & & & \bigcirc\bigcirc\bigcirc & & \end{array}$ <p>・例えば、$1 + 3 + 5 = 3^2$となる。</p> <p>・偶数の和の場合も、図的に表せないかを考える。</p> $\begin{array}{ccccccc} \bigcirc\bigcirc & + & \bigcirc\bigcirc\bigcirc & + & \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc & + & \dots \\ & & \bigcirc\bigcirc\bigcirc & & \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc & & \\ & & & & \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc & & \end{array}$	<p>・生徒に自由に考えるための時間を十分に与える。</p> <p>・式の値が図的に捉えられないかを問う。</p> <p>・奇数の和を図にして考える。</p> <p>・図的に表したものを式でも表現させる。</p> <p>・偶数の和を図にして考える。</p>

<ul style="list-style-type: none"> ・式で書くと、 (n 番目) × (n 番目+1) で計算できる。 	<ul style="list-style-type: none"> ・図的に表したものを式でも表現させる。
<p>【3】 自分で問題を作成する。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・いろいろな考えを発表する。 ・n を使い、一般化できる。 	<ul style="list-style-type: none"> ・自然数、奇数、偶数だけではなく、いろいろな数の和を考える。
<p>(まとめ)</p> <ul style="list-style-type: none"> ・式の計算だけではなく図的に捉えることもできる。 ・単純な自然数の和の課題でも、変形すればいろいろな問題が作成できる。 ・一般化するときに文字が有用であることを感じる。 	<ul style="list-style-type: none"> ・文字を利用すると、言葉で説明するよりも簡潔に説明できることやどのような数字であっても応用できることなどを確認する。 ・授業でわかったことや気付いたことをかかせる。

ワークシート

【話題】**

ガウスは、ドイツに生まれた 19 世紀前半の最大の数学者である。彼は少年時代から神童ぶりを発揮し、例えば次のような逸話が伝えられている。

彼が、小学生のとき先生が、「1 から 40 までの整数を全部たした答えは何でしょう。」という問題を出して、1 時間はかかるだろうと思っていたところ、クラスの中で最年少のガウスが一瞬の間に答えを出してしまった。さて、ガウスの気持ちになって、次の問題を解いてみよう。

(1) 次の計算をなさい。

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 =$$

● 1 から 100 までの自然数の和を考えたら、次は 1 から 100 までの奇数の和や偶数の和を考えたいかな。

(2) 次の計算をなさい。

$$1 + 3 + 5 + \dots + 99 =$$

(3) 次の計算をなさい。

$$2 + 4 + 6 + \dots + 100 =$$

● 上記の解き方とは、明らかに違った解き方で解いてみよう。

(2)について

(3)について

(4) 次に、この問題を発展させるとしたら、どのような問題を作りますか。その答えも考えて下さい。

この時間に考えたこと、感想を書きましょう。