

「論理」入門  
探究数学における取り組み

### 1. はじめに

数学は論理の上に成り立っている。論理とまでいかななくても、「説明する」ことは日常的な活動である。中学では論理的に説明する場として、さまざまな「証明」をする。三角形の合同、相似、円、円周角の定理、三平方の定理など。しかし、それ以前に「平行線は同位角が等しい」などで証明（説明）が必要である。

昨年度、一年生の定期考査で平行線を組み合わせて角の大きさを求める問を出した。角を求めるだけでなく、説明も問うたが、うまく解答できない生徒がいた。考査後、その生徒たちをよんでその説明を一通りし、書くように指示した。しかし、説明は分かったようだが、書くことができない。言ったとおりの記述で良かったのだが、「説明すること」「論理的に文を構成すること」ができないと感じた。

数学で根幹をなす「論理」を、中学生も学ぶ場が必要であるのではないか。本校の1,2年では、代数分野2時間、幾何分野2時間の他に、「探究数学」の1時間を設けている。探究数学では、基礎・基本の徹底や、代数や幾何で学んだ事柄の探究活動などを行っている。この時間を利用して「論理」を教えてみた。

### 2. 実践

探究数学は昨年度から始まり、試行錯誤・自転車操業で内容を作っている。これまでは、1時間完結のものも多く、「論理」入門も単発で行ってきた。「論理」に関する内容は、1年生の1月から4時間行っており、これで5時間目になる。

- |                  |           |                 |
|------------------|-----------|-----------------|
| ・かつとまたは（海峡）      | 2006年1月   |                 |
| ・三段論法（桃）         | 2006年1,2月 | （講座によって時期が異なる）  |
| ・ド・モルガンの法則（海峡再び） | 2006年4,5月 | （講座によって時期が異なる）  |
| ・推論（赤と黒のカード）     | 2006年10月  |                 |
| ・命題（4枚のカード）      | 2006年10月  | ※実践は2ページ以降の資料参照 |

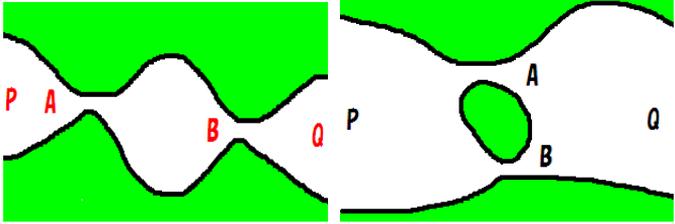
タイトルだけでは、かなり難しいことを教えているように見えるが、ゲームしたり、日常の文を扱ったりして、論理を身近に感じるように工夫している。

### 3. 考察

今回は実践中とあって十分な考察ができていないが、これまでの実践を通して気づいたことを上げておく。

- ・生徒が自ら発見することをねらっていたため、十分な説明や練習をしていない。生徒の中には納得のいかないときがある。また、1時間完結の授業を構成・実践したが、生徒の感想を受けて2時間目の授業を行うとよい。
- ・各自で解決していく授業形態よりも、班活動などで互いに高めあう形態の方が、生徒の満足度が高い。
- ・生徒たちは、三角形の合同や相似の証明は形式があるので証明が書けるが、形式のない説明をするのはやはり不得手である。そのためにも、いつもとは違った切り口のこの授業は、有効である。
- ・リテラシーは、数学的プロセスとして、「思考と推論」「論証」「コミュニケーション」「モデル化」「問題設定と問題解決」「表現」「記号による式や公式を用い、演算を行うこと」を多用している（PISAのものを引用）。唯一今までで扱っていないのが、「テクノロジーを含む道具を用いること」である。

◎かつとまたは（海峡）

展開	学習内容	留意点・リテラシー
導入	<p>①「海Pから海Qへ行くには、どのようなコースがあるか？」</p> <p>②「この場合は？」</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・AかつB、AまたはB</li> </ul>  <ul style="list-style-type: none"> <li>・AかつBかつC、AまたはBまたはC</li> </ul> <p>③「これを記号で簡単に、十や×を使って表すことにします」</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・AかつB → <math>A \times B</math></li> <li>・AまたはB → <math>A + B</math></li> </ul>	<p>①海峡のみ通り、陸地は使わない</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・行くことのできるコースを矢印を使って、図示する。</li> </ul> <p>②ともに通るときは「かつ」、どちらか一方の場合は「または」と数学ではいうことを知らせる</p> <p>③かつとまたはのどちらが+で×か、生徒のイメージをきく</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・なぜ「かつ」が×で、「または」が+と表すか説明ず、形式的に書き換える</li> <li>・本来扱う<math>\wedge \vee</math>は使い分けが難しい</li> </ul>
展開	<p>④少し複雑な海峡の問題を記号で表す。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・発表する。</li> </ul> <p>⑤「記号で表した式を見て、気がつくことはありませんか」</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・<math>A \times (B + C)</math> と <math>A \times B + A \times C</math> が同じであることを見つける</li> </ul> <p>⑥「今度は、式を見てどんな海峡か、図をかこう」</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・答えの図を板書する</li> </ul> <p>⑦状況を海峡から、日常文にして、式で表す。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・私は晴れの日は歩き (W)、雨の日はバスに乗る (B)</li> <li>・私はペン (P) とノート (N) を持っている</li> <li>・パン (B) と牛乳 (M) かジュース (J) を買ってきて</li> </ul>	<p>④時間をとって考えさせ、生徒に発表させる。同じ図でも異なる表し方があるので、それを聴く。</p> <p>⑤ノートに書くように指示</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・分配法則がここでも成り立つことに気づかせたい</li> </ul> <p>⑥式の意味を読み取って、図を表す</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・生徒に図を発表させる。まだ意味を捉えていない生徒のために、図が正しいことを確認する。</li> </ul> <p>⑦<math>W+B, P \times N, B \times (M+J)</math></p>
まとめ	⑧学習確認問題をする	

感想

1. なんか頭使うので分かりづらかった。しかもなんで、十と×かが分からなかった
2. 言葉を文字で表して計算するのは意外と楽しかったが、少し難しかった
3. 物事の順序の大切さが分かった
4. 長い文を書かなくても良いのでずいぶん楽だった
5. 1つの事を言い表すのに、いろいろな言い方があるということに驚いた
6. こんな式にも分配法則が成り立つのにはびっくりした
7. 図を数式で表すのができるのはびっくりした
8. 普段の生活から数学へ結びつける面白さがあって、おもしろかった
9. 代数と幾何が合体しておもしろかった
10. 「かつ」「または」に「×」「+」を入れるだけで、意味が分かるのがおもしろかった

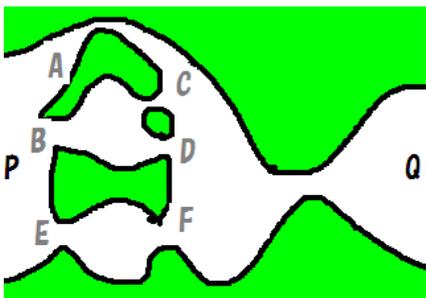
◎三段論法（桃）

展開	学習内容	留意点・リテラシー
導入	<p>①「川が流れています。P 地点から桃を流すと、Q 地点に流れ者きました。Q 地点から桃を流すと R 地点に流れ者きました。では、P 地点から桃を流すと R 地点に流れ者きますか？」</p> <p>②記号で表し、図をかいて確かめる ・「P から Q に流れる」を「<math>P \rightarrow Q</math>」と表す事にする</p>	<p>①状況を図に描いてイメージさせながら、間を考えさせる</p> <p>②三段論法 <math>P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \therefore P \rightarrow R</math></p>
例題	<p>③文章をきいて、記号に表す。質問に答える</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・ <math>P \rightarrow Q, R \rightarrow Q \quad ? P \rightarrow R</math></li> <li>・ <math>P \rightarrow Q, P \rightarrow R \quad ? Q \rightarrow R</math></li> </ul>	<p>③川をイメージしながら考える</p>
発展	<p>④「次の説明は、きちんとした（論理的な）説明だろうか？」</p> <p>(1)犬は哺乳類である。哺乳類は動物である。だから、<u>犬は哺乳類である。</u></p> <p>(2)トマトは赤い。赤は情熱的だ。だから<u>トマトは情熱的だ。</u></p> <p>(3)人の顔はつるつるしている。ヤカンのはつるつるしている。だから、<u>人の顔はヤカンだ。</u></p> <p>(4)桃太郎は強い。桃太郎は鬼退治をする。だから、<u>強いものは鬼退治をする。</u></p>	<p>④はじめの2文が正しいとしたときに、3 文目が正しいかどうかを判断することに注意</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・ 記号で表して、どのパターンかを調べる</li> <li>・ 三段論法(1)(2) <math>P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \therefore P \rightarrow R</math></li> <li>・ 間違い <math>P \rightarrow Q, R \rightarrow Q \therefore P \rightarrow R</math>(3) <math>P \rightarrow Q, P \rightarrow R \therefore Q \rightarrow R</math>(4)</li> </ul>
まとめ	<p>⑤学習確認問題をする</p>	

感想

1. 論理的に考えるのは、結構難しかった
2. 三段論法で解くときの考え方が分かったが、どこでどう活用されているのか？
3. 図を書くだけでは何通りもあってめんどくさかったが、 $P \rightarrow Q$  の形で表すとわかりやすくなった
4. あの長い文章が記号を使うだけで、短くなるのがおもしろかった
5. 川の話だけではなく、身のまわりのことについても、三段論法が使えるのがおもしろかった
6. 論理的に考えて、どうやったらこうなるとかを考えて、筋道が通ってるか通っていないか考えるのがおもしろかった
7. 物事の筋道を考えるのに利用できる。続編が出ると良い
8. 言葉で見るだけではわかりにくい内容も、最初にやった川の問題に置き換えてみるととてもわかりやすいことに気づいた
9. 証明の基礎が分かった。今度から文章にする前に→でやりたい
10. ややこしかったけれど、いろんなモデル化でも記号でいえるかいいないかわかる

◎ド・モルガンの法則（海峡再び）

展開	学習内容	留意点・リテラシー
導入	<p>①「今日は1年でやった「海峡」の続きです。今日は、通れなくなるのはどんな場合かを考えよう」</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・ notA</li> <li>・ notA + notB, notA+notB+notC</li> <li>・ notA*notB, notA*notB*notC</li> <li>・ notA* (notB+notC), notA+ (notB*notC)</li> </ul> <p>②「何か気がついたことはありませんか」</p>	<p>①図を示し、通れる場合を記号で表す（思い出しの作業）</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・ 次に、通れない場合を表す</li> <li>・ 記号は、<math>\bar{A}</math>を使う</li> </ul> <p>②ド・モルガン法則を発見させたい</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・ 何故成り立つかは難しいので説明しない</li> </ul>
練習	<p>③複雑な海峡の図で、P から Q を通れないのを記号で表す</p> 	<p>③ ( ) の使い方に注意する</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・ 記号で形式的に作ったものが、本当に通れない場合を表しているかを確認する</li> </ul>
発展	<p>④言葉編</p> <p>(1)私はペンを持っている</p> <p>(2)私はペンとノートを持っている</p> <p>(3)AさんとBさんは、数学が好きだ</p> <p>⑤上の2例を考えるために、次の例を説明する「家でお母さんに、『お前は勉強もしないし、手伝いもしない』と言われた。反論するのは『勉強も手伝いもしている』時しかないだろうか」</p>	<p>④否定の文を尋ねる</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・ (2)(3)は難しい</li> <li>・ 記号で表して、<u>ド・モルガン法則</u>を利用して考えるとどうなるかを示す</li> </ul> <p>⑤身近な例を示す</p>
まとめ	⑥学習確認問題をする	

感想

1. いつでも否定すると、またはとかが変化するの面白いと思った
2. 「と」と「か」というたった一字の言葉で文章が変わることに驚きました
3. 通常の否定文が数学的に考えると、一つの法則になっていることが面白かった
4. なぜ記号が逆になるかよく分からなかった
5. 数学をやっているのか、国語をやっているのかわからなくなった。数学と国語はつながっているのかなあと思った
6. 日本語で否定すると、なんか不自然な感じがした。数学的(?)に考えるとそれが自然になるのがおもしろい
7. 否定の文のやつがどっちでもいいと思っていたが、片方だったのに驚いた
8. 文をかつ、またはの文で表して否定にしてまた、文に戻すとその文の否定文ができていたことに驚いた
9. 肯定と否定で「かつ」「または」が入れかわることに少し感動した。
10. 否定文にするときの解釈の仕方は日本語的にはちょっと変だと思う

◎推論（赤と黒のカード）

展開	学習内容	留意点・リテラシー
導入	<p>①ゲームの説明をきく</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・赤 2 枚と黒 1 枚ある。2 人に 1 枚ずつ配り、自分のカードを相手にだけ見せる。自分のカードは何かを当てる。</li> <li>（1 回目生徒 A が赤、教師が黒。2 回目生徒 B が赤、教師も赤）</li> <li>・生徒 A に自分のカードを答える</li> <li>・教師が持っているカードは何かを、他の生徒が答える</li> <li>・その理由も答える</li> </ul>	<p>①ゲームをする 2 人のうち、1 人は生徒 A (B)、もう 1 人は教師が行う。他の生徒は、生徒 A のカード（トランプ）だけを見る</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・確率で当てるのではなく、推論する。答えは「赤」「黒」「わからない」のいずれか</li> <li>・誤答の場合は、はじめにどんなカードがあったのかを確かめる</li> <li>・見えているカード以外に、答えもヒントになることを押さえる</li> </ul>
班活動	<p>②赤 3 枚と黒 1 枚、3 人でゲームを行う</p> <p>③どんなパターンがあり、誰から答えるかで、ゲームゲームがどう進行するのかをまとめる</p>	<p>②4 人で 1 班。ゲームをしない 1 人はカードを配り、ゲームを眺めている</p> <p>③同じカードでも、答える順で答えが変わってくる</p>
発表	<p>④みんなの前でゲームを行い、その答えの理由を答える</p>	<p>④答えや理由がおかしい場合は、意見を出させる</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・1 班 1 回のゲーム。時間があるだけ、多くの班に発表してもらう</li> </ul>
まとめ	<p>⑤学習確認問題をする</p>	

感想

1. 最後に Y が「自分が黒やから、みんな赤って言ったのか、自分が赤やからみんな赤だと思ったのかどっちかわからない」って言ったのがなるほどと思った。
2. 誰が最初に答えを言うかによって、分かるか分からないかわ変わってくるのが面白いと思った
3. はじめにかわらなくても、「わからない」と言うことなどで分かるようになることがすごいです
4. 推理はできてもそれを言葉にして、発表するのが「わかるからわかる」などの意味がむちゃくちゃになるから難しかったです
5. 論理的な考えは、結構混乱するので難しい。図とか表とか書いたら結構分かった
6. 面白かったです。推理っていってもちゃんと理由があるし、納得できました。今回の授業はかなり“リカイできました”
7. 最初はよく分からなかったけど、発表をきいていたら分かった
8. トランプを使ったゲームはつまらなかった
9. カード遊びが楽しかった。推理していく感じだから、公式丸覚えとかより面白くて、解くのが楽しかった。こういう感じの授業またやりたい
10. ばば抜きに強くなる可能性を秘めていて、推理することの大切さというか便利さというか考えてみると面白い。
11. はじめは何を言われているのかわからなかったけど、実際にトランプを使ってやってみると分かった。友達と討論？みたいにして考えることで納得できた

◎命題 (4 枚のカード)

展開	学習内容	留意点・リテラシー
導入	①「今日は、『□は□である』について考えていきます」 ②『母音は偶数である』があっているかどうかを確かめるには、どのカードをめくればよいか ・英字ばかりの場合で題意をつかむ ・英字と数字が混じったもので、めくるカードを答える	①本時のテーマを示す。 ②生徒を当てながら、題意をつかませるようになる ・ここでは、理由は聞かない。後の班活動や発表できく ・複数のめくり方をきき、次の活動に生かす
班活動	③班毎にどのカードをめくればよいかを考える ④班員一人ずつが、めくるべきカードを答えられるように特訓する	③班で議論できるように支援する ④全ての人が理解できることを目指す
発表	⑤班の代表者が答える ・意義・意見・反論・質問などをする ・お酒を飲むの人は、20才以上である ・雨の次の日は、晴れである ・ユダヤ教は、金曜日に働いてはいけない	⑤答え、理由、真偽を聞いてから、質疑に入る
まとめ	⑥学習確認問題をする	

感想

1. 数字から文字に変わると全く別のものに見えてわかりにくかった
2. 今日の授業はかなり頭を使った。でも、「条件に当てはまるか」ということを考えるのは面白かった
3. 最初は全てめくらないといけないと思ってたけど、条件に合うようにめくればよいことが分かりました
4. 最初は分からなかったけれど、実際にやると理由づけてどのカードをめくればいいのか分かって良かった
5. 難しく感じたけれど、中身は簡単で面白かった。P ならば Q みたいな事について何となく分かった
6. 班の人に説明されたら分かったけれど、自分だけで考えたら分からなかったと思う
7. 分かるまでに時間がかかったけど、慣れれば面白い。これでクイズとかも作れそう

[5]の回答例

- ・裏面がどうなっているかを考える
- ・条件に入っているものだけを調べる
- ・母音と奇数をめくればよい
- ・～①は～②のとき、～①のカードをめくって、～②じゃないカードをめくる

探究数学Ⅱ(2006.10)4枚のカード

2年 組 番 氏名 \_\_\_\_\_

[1]次の4枚のカードでは、どのカードをめくれば、下線の文が正しいかどうか分かるか。めくるべき必要最小限のカードに○で選べ。

(1) 片面「お酒を飲むか否か」、もう片面「どんな人か」

「お酒を飲むのは、20才を過ぎてから」が守られているか？  
カード [19才のタクヤ] [61才のキク] [ビールを飲む] [下戸]

(2) 片面「信じている宗教」、もう片面「休む曜日」

「ユダヤ教は、金曜日に働いてはいけない」が守られているか？  
カード [Pさんヒンズー教] [日曜日] [Qさんユダヤ教] [月曜日]

[2]次の①から④のカードは、片面にアルファベット、もう片面には数字が書かれている。

カード① [W] [9] ② [A] [3] ③ [h] [6] ④ [i] [1]

(1) 「大文字の裏は3の倍数である」が成り立っているかどうか。

(2) (1)を判断するのに、あなたはどのカードを確かめましたか。

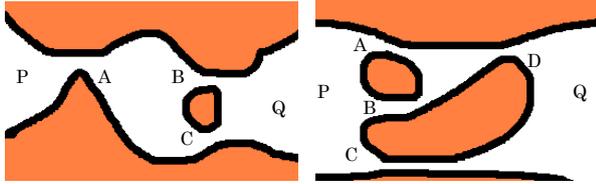
[3]今日の4枚のカードを解決する(めくるカードを決める)には、どう考えればよいか。

[4]今日の授業の感想をしっかりと書きましょう。

.....  
.....

[1]次の図で、海 P から海 Q へ行くには、どの海峡が開いていなければならないか。式で表せ。

- (1) (2)



[2]次の式で表される[1]のような海峡の図をかけ。

- (1) A または (B かつ C) (2)  $A \times D + B \times D + C \times D$

[3]次の文章を、式を使って簡単に表せ。

(1) 私は数学と美術が好きだ。(M: 数学が好き, A: 美術が好き)

(2) 休日は、勉強してから、スポーツか読書をする。(A: 勉強をする, B: スポーツをする, C: 読書をする)

[4]今日の授業の感想を書こう。

.....  
 .....

[1]桃を川の A から流すと B まで流れ、C から流すと A に流れる。次の内、正しいもの (かならず起こるもの) はどれか。

- ・ 桃を A から流すと C に流れる
- ・ 桃を B から流すと A に流れる
- ・ 桃を B から流すと C に流れる
- ・ 桃を C から流すと B に流れる

[2]文を記号 (A: リンゴ, 傘 R: 赤い, 雨) を使って、P→Q の形で表そう。

- (1) リンゴは赤い。  
 (2) 雨が降ったら傘をさす。

[3]文を記号を使って表そう。記号は自分で決めて良いが、何をどの文字にしたか示しておくこと。また、下線部分の主張をするために、次の説明は筋の通ったもの (論理的なもの) といえるか。いえるものには○を書こう。

(1) 雨が降ったら傘をさす。昨日は雨だった。だから、昨日は傘をさした。

(2) 果物は甘い。栗は甘い。だから、栗は果物である。

(3) 数学はやりがいがある。なぜなら、数学は難しく、難しいものはやりがいがあるからだ。

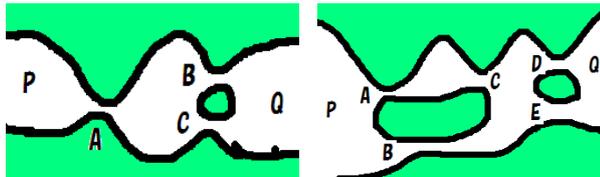
[4]今日の授業の感想を書こう。(みんなの感想は次の授業に反映されます)

.....  
 .....

探究数学 II (2006.4) 海峡再び

2年 組 番 氏名

[1]海 P から海 Q へ通れないのは、海峡がどのような状態の時か。記号を使って表そう。



[2]次の記号で表される海峡がある。海 P から海 Q へ通れないのは、海峡がどのような状態の時か。記号を使って表そう。

- ①  $(A \times B) + C$   
 ②  $(A + B) \times C + D$

[3]次の文の否定を書こう。

- ① ドーナツかサンドイッチを食べる。  
 ② 定期券とパスカードを持っている。  
 ③ クラスのみんなが携帯電話を持っている。

感想

.....  
 .....

探究数学 II (2006.10) 赤と黒のカード

2年 組 番 氏名

[1]赤のカード 3 枚、黒のカード 2 枚あります。A,B,C の 3 人がそれぞれ 1 枚ずつカードを持って、ゲームをしました。

(1)1 回目。C には、A も B も黒のカードを持っているのを見えました。最初に C、次に B が自分のカードを言いました。それぞれ何と言いましたか。また、その理由は何ですか。

- ・ C の答え 「.....」
- ・ C の理由 .....
- ・ B の答え 「.....」
- ・ B の理由 .....

(2)2 回目。C には、A が赤、B が黒のカードを持っているのを見えました。最初に C、次に A が自分のカードを言いました。それぞれ何と言いましたか。また、その理由は何ですか。

- ・ C の答え 「.....」
- ・ C の理由 .....
- ・ A の答え 「.....」
- ・ A の理由 .....

[2]今日の授業の感想をしっかりと書きましょう。

.....  
 .....

[3]おまけ。<難しいので、できなくても可。レポート課題>

3 回目。C には、A も B も赤のカードを持っているのを見えました。A、B ともに「わからない」と言いました。C のカードとその理由は何ですか。

参考文献

- ・「赤いぼうし」野崎 昭弘, 安野 光雅 童話屋
- ・「ケータイを持ったサル」正高信男 中公新書