

第103回全国算数・数学教育研究(埼玉)大会発表資料
2021年8月22日(日)

物理と数学の協働授業

流体中の物体の運動と終端速度の考察

奈良女子大学附属中等教育学校

研究のねらい

- **理数協働授業**として、物理学と数学が合同で開発できる教材・実験を考えた。
- **数理モデル**を用いて、力学において成果をあげているアプローチの、一端にふれられる授業研究・実践を紹介したい。

研究の背景

過去の学校設定科目 6年生「数理科学」

- 数学の教員が「過去と未来を見通す」というテーマで特に**微分方程式**を取り上げ、主に数理的側面から自然科学を探究する授業を展開、種々の**自然現象・社会事象**を理論的・関数的に扱った。
- 現象のモデル化・シミュレーションの一つとして**コンピュータ上で計算させる**にとどまっていた。
- 今回一連の融合授業を開発していくに当たっては、もっと**理科の授業に近づく**ことを考えている。

研究の方法

1. 物理学の授業により近づくことを考える

思考実験ではなく、実際に**実験**を行い、
力学のモデル化が本当に自然現象を説明できているのかを
検証する作業を加える。



具体的現象と**抽象的概念(数学的解釈)**の往還が可能になり、
それが科学的探究の本質的な方法であろうと思われる。

研究の方法

2. 指導者が協働する

一連の授業に理科と数学の教員が **交互に現れたり、同時に**出てITを行ったり といった方法をとる。



自然現象の解析には本来**さまざまな分野からのアプローチ・協働が必要である**ことが生徒にも実感される。

今回の実践では「**物理基礎**」の通常講座の授業をベースとして、そこに数学科教員が割り込んでいく、という方法をとる。

研究の内容

テーマ：流体中の物体の運動と終端速度の数学的解析

空気中を落下する水滴や液体中を落下する小球は、重力によって加速するが、**速度が増すと同時に加速度が小さくなる**。今回の一連の授業では、



1. 斜面上を**重力**により移動する台車に帆をつけ**空気抵抗**を受けさせ、一定時間ごとの速度を測定することにより、**v-tグラフ**上に曲線を描かせる。

2. 一方、**速度とその増加率の関係**に着目させ、グラフを**数式モデル**で表現できないか考察し、実際の物体の運動の様子が、**数学的解析**により予測できるか試みる。

単元『流体中の物体の運動』の指導計画

第1時

抵抗力を受ける運動の $v-t$ グラフ
(物理学的意味)

主担：物理 授業観察：数学

第2時

$v-t$ グラフの数学的意味

主担：数学 授業観察：物理

第3時

台車を用いた測定による $v-t$ グラフの作成
(記録タイマーを用いた速度の測定実験)

主担：物理 実験補佐：数学

第4時

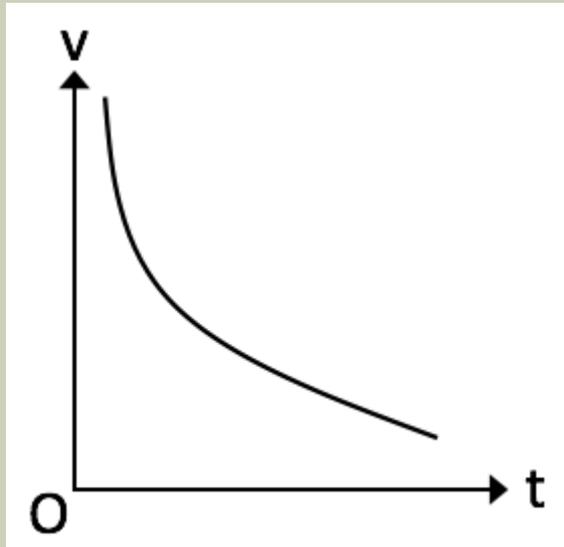
結果をもとにした数学的解析

TT：物理・数学

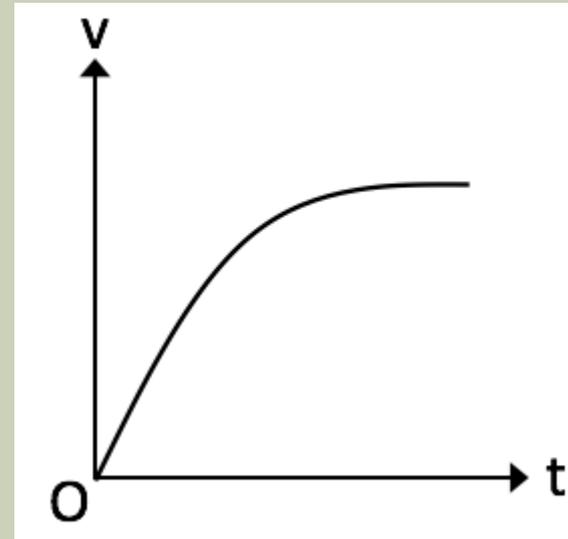
第1時

抵抗力を受ける運動の $v-t$ グラフの予測

①重力が作用しているにも関わらず、落下物が加速せずに等速になるのは何故か？



②空気抵抗が作用する場合、落下時間と速度の関係を示すグラフ($v-t$ グラフ)は、どうなるか？



②に対する2つの意見

第2時

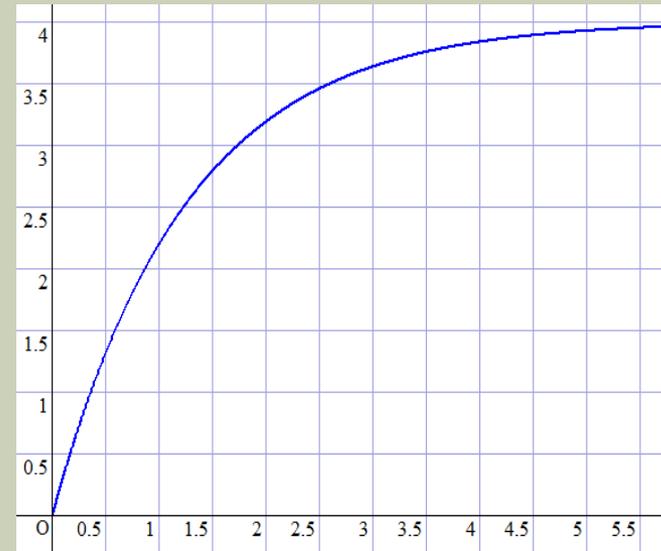
$v - t$ グラフの数学的意味

① 加速度の変化(減少率)を最も単純な変化(一定)と仮定し、速度が増加するほど加速度が減少すると考え、一次関数で表す。



一次関数($v = 3t$)のグラフ

② $a = k - cv$ となるが、このモデルの式は $dv/dt = k - cv$ ということ(微分方程式)であり、解く手立ては難しい。

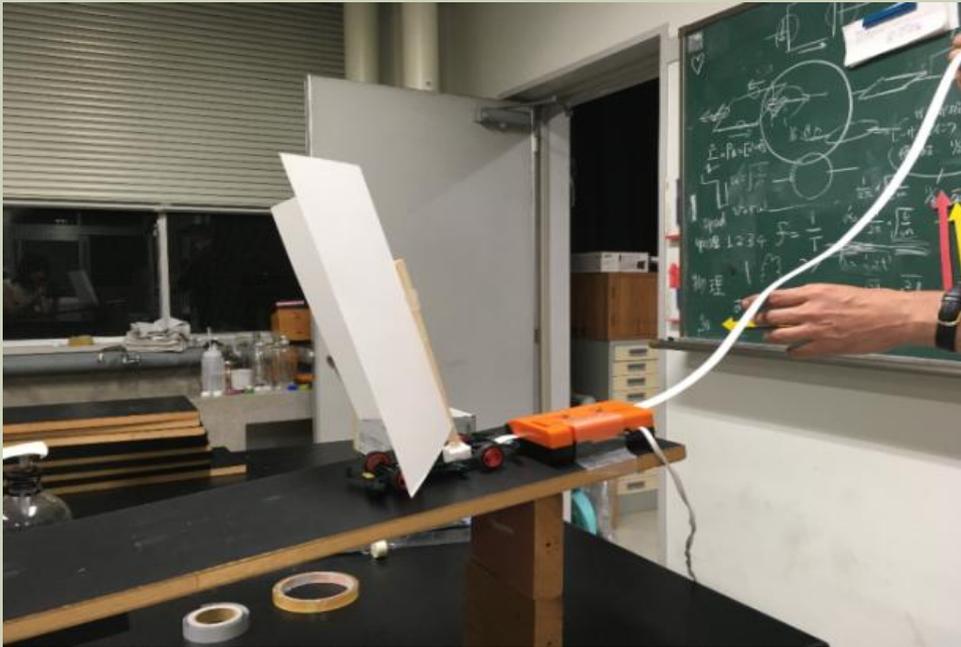


空気抵抗がある物体の $v - t$ グラフ

第3時

記録タイマーを用いた速度の測定実験

実際に用いた実験装置



- ミニ四輪駆動車、おもり
- 空気抵抗のための帆
- 斜面(2m, 傾斜 5°)
- 記録テープの自重の影響軽減

実験方法とデータ解析の手順

1. 実験装置を各班で準備
2. 記録タイマーの打点カウントを60打点(1分間)とし、位置データを取得
3. 6打点で0.1秒間の変位に相当するため、6打点ごとの変位を実測し、右表（実験プリント）にまとめる
4. 3のデータをもとに、単位時間あたりの**変位**から**速度**を、単位時間あたりの**速度変化**から**加速度**を算出し、同表にまとめる。
5. 4で得られた速度及び加速度のデータからグラフを作成し、変化の様子を分析する。

時間(s)	移動距離(cm)	速度[cm/s]	加速度[cm/s ²]
0-0.1			
0.1-0.2			
0.2-0.3			
0.3-0.4			
0.4-0.5			
0.5-0.6			
0.6-0.7			

実験のようす



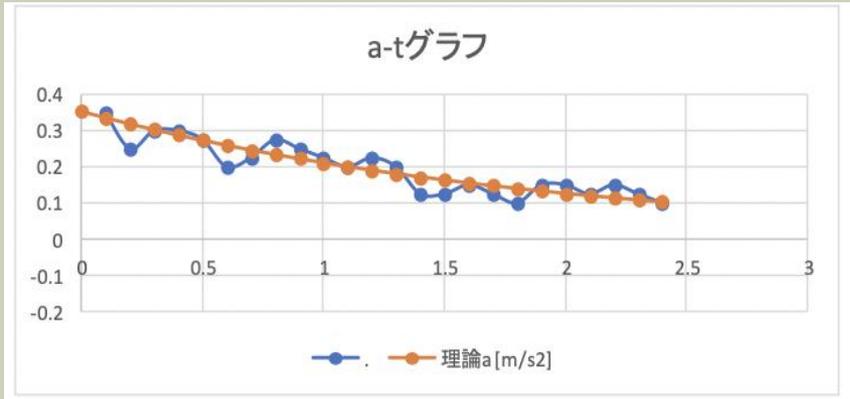
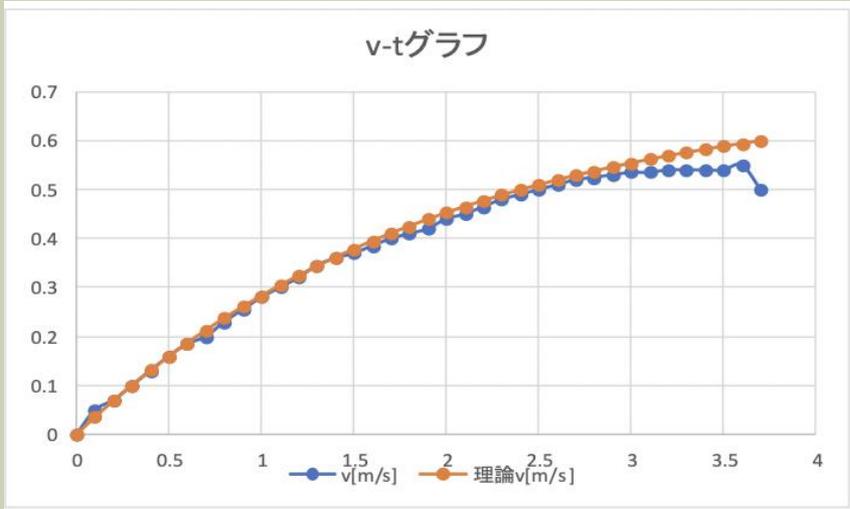
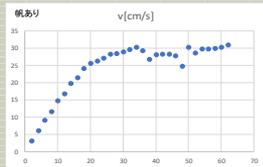
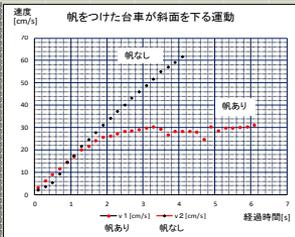
第4時

実験結果をもとにした数学的解析

4年物理基礎 実験：帆をつけた台車が斜面を下る運動
 2019.10.03 提出者4年 組 番 氏名 <<データ原本>>
 実験メンバー <<メンバー名>>

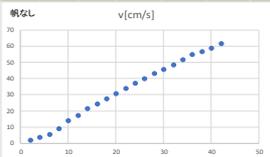
【取り】 放物タイマーの測字は、1秒に10打点
 読み取りは、1m分度で、原点からの距離を2打点ごと(0.2秒ごと)に読む
 カーブNo (7)
 台車の設定]帆の有無(有)、追加おもり(50)g、全体の質量(146)g
 斜面の傾き]斜面に沿って(1660)cmの所の高さが(197)cm
 No.7

打点	t[s]	s[cm]	Δx[cm]	v[cm/s]	Δv[cm/s]	a[cm/s ²]	時刻 t	前車 v [cm/s]	前車 v [cm/s]
0	0.0	0.00	0.63	3.15			0.1	3.15	2.1
2	0.2	0.83	1.22	6.1	2.95	14.75	0.3	6.1	3.7
4	0.4	1.85	1.82	9.1	3	15	0.5	9.1	5.5
6	0.6	3.67	2.33	11.65	2.55	12.75	0.7	11.65	9.2
8	0.8	6.00	2.95	14.75	3.1	15.5	0.9	14.75	14.25
10	1.0	8.95	3.37	16.85	2.1	10.5	1.1	16.85	17.35
12	1.2	12.32	3.98	19.9	3.05	15.25	1.3	19.9	21.5
14	1.4	16.30	4.30	21.5	1.6	8	1.5	21.5	24.6
16	1.6	20.60	4.83	24.15	2.65	13.25	1.7	24.15	27.85
18	1.8	25.43	5.12	25.6	1.45	7.25	1.9	25.6	31
20	2.0	30.55	5.25	26.25	0.65	3.25	2.1	26.25	34.1
22	2.2	35.80	5.43	27.15	0.9	4.5	2.3	27.15	37.3
24	2.4	41.23	5.67	28.35	1.2	6	2.5	28.35	40.1
26	2.6	46.90	5.70	28.5	0.15	0.75	2.7	28.5	43.15
28	2.8	52.60	5.90	29	0.5	2.5	2.9	29	45.85
30	3.0	58.40	5.94	29.7	0.7	3.5	3.1	29.7	48.7
32	3.2	64.34	6.08	30.4	0.7	3.5	3.3	30.4	51.75
34	3.4	70.42	6.14	28.2	-1	-5	3.5	29.4	55
36	3.6	76.30	5.88	29.4	-2.6	-13	3.7	26.8	57
38	3.8	81.66	5.36	26.8	1.4	7	3.9	28.2	59
40	4.0	87.30	5.65	28.25	0.05	0.25	4.1	28.25	61.65
42	4.2	92.95	5.67	28.35	0.1	0.5	4.3	28.35	
44	4.4	98.62	5.64	28.2	-0.65	-2.25	4.5	27.9	
46	4.6	104.20	5.58	27.9	-3.15	-15.75	4.7	24.75	
48	4.8	109.15	6.08	30.4	5.65	28.25	4.9	30.4	
50	5.0	115.23	5.72	28.6	-1.8	-9	5.1	28.6	
52	5.2	120.95	6.00	30	1.15	5.75	5.3	29.75	
54	5.4	126.90	5.95	29.75	-7.105E-14	-3.553E-13	5.5	29.75	
56	5.6	132.85	5.95	29.75	0.25	1.25	5.7	30	
58	5.8	138.85	6.05	30.25	0.25	1.25	5.9	30.25	
60	6.0	144.90	6.20	31	0.75	3.75	6.1	31	
62	6.2	151.10					6.3		
64	6.4								
66	6.6								
68	6.8								
70	7.0								



【取り】 放物タイマーの測字は、1秒に10打点
 読み取りは、1m分度で、原点からの距離を2打点ごと(0.2秒ごと)に読む
 カーブNo (8)
 台車の設定]帆の有無(無し)、追加おもり(100)g、全体の質量(146)g
 斜面の傾き]傾がスの追加]読みのまま
 No.8

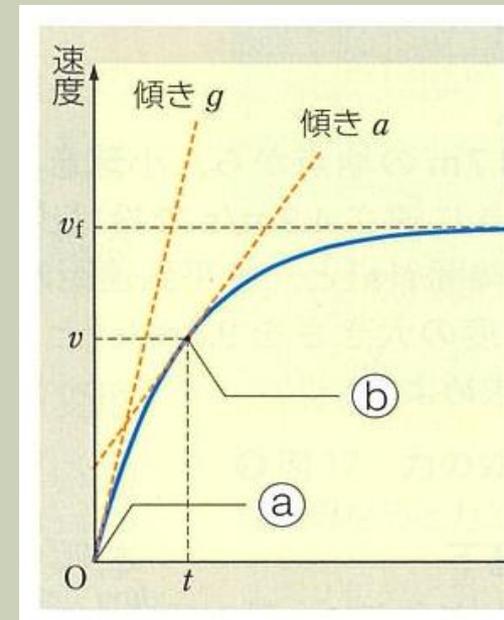
打点	t[s]	s[cm]	Δx[cm]	v[cm/s]	Δv[cm/s]	a[cm/s ²]
0	0.0	0.00	0.42	2.1		
2	0.2	0.42	0.74	3.7	1.6	8
4	0.4	1.16	1.10	5.5	1.8	9
6	0.6	2.25	1.84	9.2	3.7	18.5
8	0.8	4.10	2.85	14.25	5.05	25.25
10	1.0	6.95	2.85	14.25	3.1	15.5
12	1.2	10.42	4.30	21.5	4.15	20.75
14	1.4	14.72	4.92	24.6	3.1	15.5
16	1.6	19.64	5.57	27.85	3.25	16.25
18	1.8	25.21	5.57	27.85	3.15	15.75
20	2.0	31.41	6.20	31	3.1	15.5
22	2.2	38.23	7.46	37.3	3.2	16
24	2.4	45.69	8.02	40.1	2.8	14
26	2.6	53.71	8.63	43.15	3.05	15.25
28	2.8	62.34	8.63	43.15	2.7	13.5
30	3.0	71.51	9.17	45.85	2.85	14.25
32	3.2	81.25	10.35	51.75	3.05	15.25
34	3.4	91.60	11.00	55	3.25	16.25
36	3.6	102.60	11.40	57	2	10
38	3.8	114.00	11.40	57	2	10
40	4.0	125.80	11.80	59	2.65	13.25
42	4.2	138.13	12.33	61.65		
44	4.4					



第4時

実験結果をもとにした数学的解析

- 立てた数式モデルは $ma = mg - cv$
- 実験値と理論値を比較する際、ある時刻の $v = at$ に1行前の a を代入することでその時刻の v を求め、次の a は $a = g - cv/m$ から算出
(Excel による**逐次代入計算**)
- $v-t$ グラフの曲線の傾きの値が、**加速度 a の値に相当することに着目**
- $v-t$ グラフの傾きの値が緩やかに
→ $a-t$ グラフでは a の値の漸減
→ v の値は次第に一定値(**終端速度**)に



授業評価1

Q1: 物理分野における概念理解

運動や空気抵抗の理解が深まった。概念を可視化することができた。	39
空気抵抗の概念が実験とグラフによりイメージしやすくなった。	25
空気抵抗の変化の仕方がよくわかった。	9
公式を理解することにより現象を理解できる。	7
物理を学んでいくうえで数学的な視点も重要だと感じた。	4
数学的な表現をすることで、物理の現象をわかりやすく伝えることができる。	4
曖昧な考えを数値を扱うことで分かりやすく考えられた。	3
シミュレーションにより、実験前でも結果を予想することができることがわかった。	3
空気抵抗が物体の重さ、速度に関連していることが理解できた。	2
原理を用いた理論値と実験値が合ってくる面白さを知った。	1

授業評価2

Q2: 数学分野における概念理解

実際の現象を数学を用いて解明できることがわかった。	24
関数の理解が深まった。	21
グラフの形状から現象を見つけられることを知った。	19
空気抵抗を受けたときの $a-t$ グラフと $v-t$ グラフの関連性があることや差異がわかった。	12
データの整理の重要性を理解した。	8
三角比がどのように使われているかよくわかった。	6
具体を抽象化する、一般化する方法を知った。	4
公式化することによりわかりやすく理解できた。	3
実際のデータを用いることで、学習内容がより理解できた。	1
もともと物理には数学の前提があるから、とりわけ変化はない。	7

授業評価3

Q3: 課題や授業への感想

数学と物理が密接に関連していることを知った。	17
両方の教科の理解が深まった。	15
おもしろかった。	12
理科と数学の融合授業は新鮮で面白かった。	7
複合的な視点から考えることができた。	7
狙っている結果を実験で出すことは難しい。	6
物理と数学を組み合わせることにより、より正確な解析が可能になる。	6
現象を数学的に見るということの重要性を理解した。	4
難しかった。	21
授業の時間が短い	5
物理は数学的な分野なので、物理的視点と数学的視点の違いがよくわからなかった。	4
普通の授業との違いがよくわからない。	3
物理というより数学の授業だった。	2
数学と物理の使う内容がずれていたので合わせたほうがより分かりやすい	2
v-tグラフとa-tグラフが対象になる原理がいまいちよくわからない。	1

成果と課題

■ 理科・数学の知識を往還させることで 双方からの現象理解が一層深まった

- ・ 理科の課題をテーマに数学的なアプローチを新たな視点として加えることで**考察が深まる**ことが体験できること、そのことを自然現象にフィードバックさせたときに**さらに探求する可能性**がある(完結しない)ことを知ること

■ 数学の学習進度が追いついていないと深められない 段階での実践となったことから、消化不良感が残った → 現行の理科と数学の学習進度の再考が必要

■ 実験データの取得から**数学的な解釈**までを行うには、 総じて時間不足

今後の方向性

この題材は高等学校のどの学年でも
スパイラル的に扱うことができる

4年生

t に依存して変化する値 v を含む数式により a が決まるというような、
見たことのない複雑な関数(グラフ)を定義することによっても、
自然現象の説明(モデル化)が可能であるのを経験してもらう。

5年生

「逐次代入」の部分を一步進め「数列」としてとらえ、
(隣接2項間一次漸化式)と書き換えると、
より数学的な考察を深めることができる。

$$m \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} = mg - cv_n$$

今後の方向性

6年生

微分方程式を陽的に解くと、

$$v = \frac{mg}{c} \left(1 - e^{-\frac{ct}{m}} \right)$$

となるが、解き方まで踏み込んでグラフが想像できるか。

「自然現象を微分方程式によりモデル化する」発想

数学としてのアプローチ方法も上記種々の段階あり

今までより多様な視点から自然現象を解析していく発想が育成されることを目指し、理科と数学の融合授業案を今後もさらにいろいろな分野で複数実践していく。

まとめ

- 理科での実験・観察はグループ活動で行われることが多い。
そこにこういった**数学的な考察**を加える発想を持たせることで、「**共創力**」がさらに広がる
- さまざまな題材を今後は「**理数融合授業**」の形で、
実験を伴いながら理科の教員と協働して展開していくのが、
新しい方向性であり「**理数探究**」の授業研究につながる