Math 数理科学入門

　漸化式の考え方を使うと、次のような考察ができます。

食糧危機到来

　「人口は指数的に増えるが、食料の生産は＜　　　　　＞的にしか増えないから、深刻な食糧危機が来るであろう」

　これは、18世紀のイギリスの経済学者マルサスのエッセイです。もし、一世代ごとに人口が2倍されるとしたら、n世代の人数をa_nとすると、

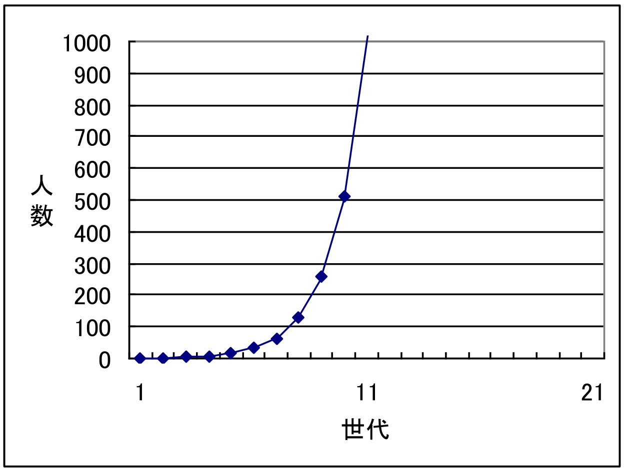
a_{n+1}=（　　　　）　…(*)

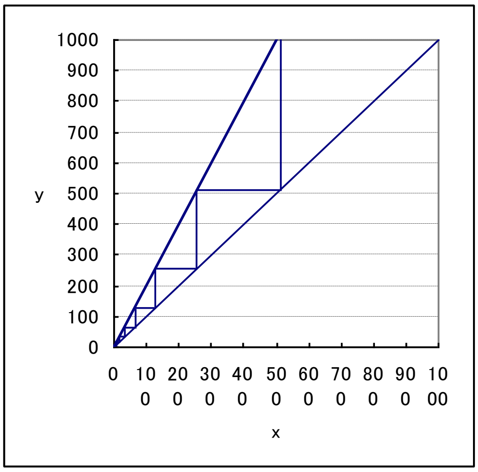
とモデル化できます。例えば、$a_1=1$のとき、

$a_2=2a_1$=（　　），$a_3=2a_2$=（　　），$a_4=2a_3$=（　　），$a_5=2a_4$=（　　），…

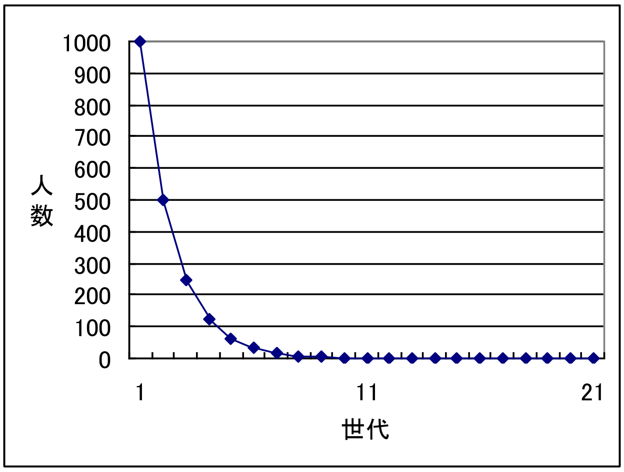
となり、一般項は、a_n=（　　　　　　）となります。次々に2倍されるので、マルサスの言うとおり、指数関数的に増加します。定数2は増加率を表しています。

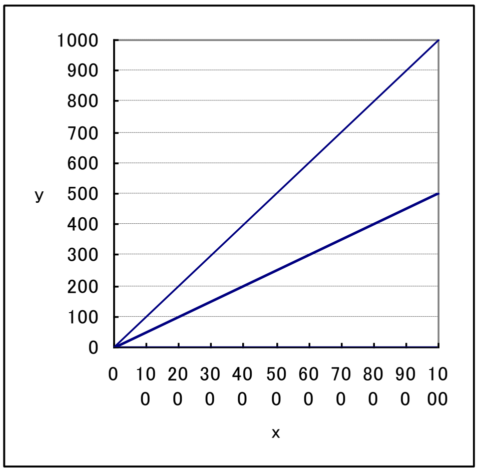
　これをグラフにしたのが左下のグラフです。右下のグラフは、$a_n \to x$, $a_{n+1} \to y$と置き換え、式(*)をy=（　　　）と変えて、視覚的に人口の変化の様子を捉えたものです。





　問1　$a_1=1000$, $a_{n+1}=0.5a_n$ だと、どうなるでしょうか。右下の図を完成させなさい。





5年　　　組　　　番　氏名

従って、$a_{n+1}=ka_n$で、kが1より大きいとき、＜　　　　　　　　　＞が起こり、kが1より小さい（もちろん0より大で）とき、＜　　　　　　　　　＞が起こることが、視覚的に確かめることができました。

ところが、実験室などで昆虫の増殖を調べると、＜　　　　　　　＞や＜　　　　　　　＞に問題がなくても、その個体数は指数関数的に増えないで、ある段階で増加率が減少することが分かりました。1840年頃ベルハルストは、次のようなモデルを提案しました。…（この続きは、数理科学でするか…）

問2　（　　）に適当な数式を、＜　　　＞に適語を入れなさい。

特性方程式の図的解釈

漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ …(★)で定義された数列の一般項を求めるとき、

特性方程式　$\alpha=p\alpha+q$ …(**)

を使うと簡単に求めることができました。しかし、授業では、この式はかなり不可解な状況を表していることを強調しました（覚えてる？）。

この特性方程式を使って解ける理由は､先のマルサスで使った階段のグラフを使うと、理解できます（図形と方程式の知識が必要なので、難しいけど)。

先と同じように、元の漸化式(★)で、$a_n \to x$, $a_{n+1} \to y$ とすると、y=（　　　　）…①という式が得られる。このグラフは、＜　　　　　＞である。

そして、直線 y=x …②と合わせて、グラフをかいて、階段のグラフを描くと、右のようになる。

問3　$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+2$ として、右の空欄に、①②と階段のグラフを示せ。

出来上がったグラフを観察します。

直線①と②が交わっているのも、階段の様子も、前頁と何ら変わりありません。少し場所がずれているだけです。そして、交点のx座標は、＜　　　　　　＞の解になっています。

つまり、漸化式(★)を、特性方程式を使って $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ に変形するのは、①と②の交点を原点に来るようにグラフを＜　　　　　＞移動させて、既知の漸化式$b_{n+1}=pb_n$に持ち込んでいるのです。

数が並んだだけの数列も、グラフを使えば、ダイナミックに変化する様子を観察することができました。

さて、ベルハルストはどんなモデルを考えたんでしょうか。