

2008年度 奈良女子大学附属中等教育学校 公開研究会 数学科学習指導案

1. 日時 平成21年2月21日(土) 1限(9:30-10:20)
2. 学級 2年A組 男子20名 女子20名 計40名
3. 教室 2年A組 普通教室
4. 科目・単元 基礎数学Ⅱ(幾何) 「三角形の五心」

5. 単元目標

三角形の五心(内心・外心・垂心・重心・傍心)の定義および性質を理解し、作図方法を習得する。三角形の五心の性質を利用し、また作図を用いて種々の問題が解決できる。さらに、作業や実験を通して、内心や外心、重心の幾何学的意味だけではなく、科学的意味を考察する。

6. 題材観

幾何の歴史を振り返れば、起源が古代エジプトにて、ナイル河の氾濫が起こったあとの肥沃な土地の分配、区画整備にあり、幾何学(geometry)という学問の名が「地球を測る」、「測地術」というギリシャ語に由来することがよく知られている。このように、幾何学は日常生活における重要な問題の解決という具体的な必要性に端を発し、図形に共通する性質を取り出し、分析するという抽象的普遍性を求める学問へと発展した。今回の授業において、現実世界における具体的な課題を幾何の問題として理想化・単純化し、数学の世界で解決を目指し、さらに得られた(数学的)解答を用いて、現象を説明するという一連の活動は、幾何という学問の潮流を体感する機会になると考えられる。

同時に、このような活動は、PISAの提唱する「数学化サイクル」や「モデル化」という側面(本校ではこのような数学的活動を「数学する」という言葉で説明している)を併せもち、「数学的リテラシー」育成の一側面として有効である。また、グループ活動を取り入れることで、自分の意見をまとめるだけではなく、相手にわかりやすく伝える、相手の意見を正しく理解して自分の考えを再構成するという状況を設定することにより、PISAのいう「読解力」育成につなげられる。

また、三角形の五心は古代ユークリッドの時代からその存在が知られていた。以後、自然科学の様々な場面で登場してきた。重心は特に、テコの原理や力のモーメントといった物理概念と密接な関連性を持つ。今回の塩の実験においても、穴の位置からの距離とその地点での山の高さを比較しながら考察することにより、数学と物理、さらには自然現象との関わりを意識することができる。と考える。

7. 生徒観

2年A組は、数学を得意とする生徒と苦手意識を有する生徒まで、能力差が大きい。また、数学に対する姿勢は様々であるが、全体として授業に対して前向きに取り組む姿勢ができています。思考や理解も早く、課題に実直に取り組むことができる姿勢は備わっている。自分の考えや意見を率直に述べる生徒も多いが、周囲と議論・検討しながら課題の解決にあたる力は不十分である。

8. 指導計画

全 12 時間

- (1) 三角形の外心と内心の定義および性質を理解し、その作図方法を習得する。・・・3 時間
- (2) 三角形の垂心の定義および性質を理解し、その作図方法を習得する。・・・1 時間
- (3) 三角形の重心の定義および性質を理解し、その作図方法を習得する。・・・2 時間
- (4) 三角形の傍心の定義および性質を理解し、その作図方法を習得する。・・・1 時間
- (4) 三角形の五心の性質を用いて、具体的な課題を解決する。・・・3 時間(本時はその 2 時間目)
- (5) チェバの定理とその逆を証明し、それらを用いて問題を解決する。・・・2 時間

9. 本時の学習指導

具体的な課題を理想化・単純化することにより、幾何の問題として捉えること、および三角形の五心の性質をもとに状況を判断し、必要な作図を活用して問題を解決し、その過程を論理的に説明することを目指す。

10. PISA の枠組み

■ 数学的な内容(包括的アイデア)	空間と形
■ 数学的プロセス(能力クラスター)	熟考クラスター
■ 数学の用いられる状況	科学的
■ 文脈	塩を用いた実験とその考察
■ 8つの能力	思考と推論、コミュニケーション、モデル化、表現、問題設定と問題解決

11. 本時の目標および評価

- ア 課題に対して積極的に取り組み、自分の意見をグループに発表し、議論に参加する。(関心・意欲・態度)
- イ 課題の状況を捉え、幾何の問題へと理想化・単純化する。(数学的な見方・考え方)
- ウ 三角形の外心が求める解であることを判断し、説明することができる。(知識・理解)

「十分満足であると判断される」状況(a)と評価する具体例

- ア グループの中で、自分の考えを発言するとともに、他者の意見を聞き、議論できる。
- イ 課題のなかで必要な情報を取り出し、幾何の問題としてノートの上で議論や考察ができる。
- ウ 穴をあけた 3 点までの距離の等しい点が三角形の外心であることを用いて、実験結果を説明する。

「努力を要すると判断される」状況(c)と評価される生徒への手立て

- ア グループにおいて、自分の意見をグループの中で発言できるような状況を設定させる。
- イ 課題の状況を丁寧に説明し、ノートの上でどのように考えたらよいかを示唆する。
- ウ 穴があいているため、塩がどのように落ちて、できる頂点がどのような条件を満たすのか考えさせることにより、三角形の外心の作図が必要であることを認識させる。

12. 教具 塩(エンリッチ塩)、タッパー、厚紙、竹串、デジタルカメラ

13. 展開

(※予想される生徒の反応、○教師の発問、●教師の支援、☆評価の観点、◆数学的リテラシー)

	学習活動	指導上の留意点	評価の観点
課題提示	<p>1. 導入と課題の提示</p> <p>前時の課題および実験について、確認する。[ワークシート 実験]</p>		
	<p>実験 3つの穴があいた厚紙の上に大量の塩をのせたとき、塩がこぼれていく様子を観察してみよう。</p> 		
	<p>課題1 3つの穴があいた厚紙の上に大量の塩をのせると、穴から塩がこぼれていき、山ができる。この山の頂点はどこにできるだろうか。</p>		
	<p>予想をワークシートで再確認し、実験結果と課題の解答を班ごとに確認する。[ワークシート 課題1(1)]</p> <p>※重心、外心、内心など。 ※わからない。</p> <p>実験結果から得た結果が、正しいのか否かをどのように判断したらよいのか考える。</p> <p>※串でさして見た、真上から写真を撮って見たなど。</p>	<p>○「前回は、塩を用いて実験を行いました。3つの穴が開いた厚紙の上に大量の塩をのせたら、穴から塩がこぼれていき、山ができました。この山の位置は、どこにできただろうか。今回は、結論をまとめてみよう。」</p> <p>●前時に話し合った結果を相互に確認させる。</p> <p>○「あなたの班の結果が正しいことをどうやって確かめたらよいだろうか。」</p> <p>・実験の際に、1つの穴や2つの穴で試行した班の場合 →その方法と結果について確認させる。</p> <p>・試行した班の場合 →どのような理由から解答を判断したのかを考えさせる。</p>	<p>◆モデル化</p> <p>☆現実世界の問題を幾何の問題として捉えることができる。 (数学的な見方・考え方)</p>

課題提示	<p>山の頂点の位置が正確に捉えにくい状況で、どうやって位置を特定できるのかを考える。</p> <p>※問題を理想化・単純化して幾何の問題として捉える。</p>	<p>○「山の頂点の位置を正確に求めることは難しいようです。では、幾何の考え方を利用したらどうだろうか。」</p> <p>●どのように課題を理想化・単純化し、幾何の問題として認識しているのかを確認する。</p>	
探究活動	<p>2. 個人・グループによる考察</p> <p>自分の考えをワークシートにまとめる。[ワークシート 課題 1(2)]</p> <p>※自分の考え方を文章や図を用いて記述できる。</p> <p>※どのように考えたらよいのか手が出ない。</p> <p>班ごとに意見を出し合い、解答を検討しあう。</p> <p>※班内で、自分の考え方を周りと比較しながら議論を進める。</p> <p>※議論にうまく参加できない。</p> <p>班の結論をワークシートにまとめる。</p> <p>※班の結論をまとめ、各自メモする。</p> <p>※班の一部のメンバーに議論を任せってしまう。</p>	<p>○「まず、自分の考えをまとめてみよう。」</p> <p>○「では、班内で自分の意見とみんなの意見を比べてみよう。そして、グループ全員で、この問題に対する解答を検討してみよう。」</p> <p>●班での議論を促すとともに、自分の意見と他者の意見を比較検討させる。</p> <p>●誰もが、班の意見を自分たちの考えを説明できるように指示を出す。</p>	<p>◆思考と推論、表現 ☆自分なりに考えをまとめているか。 (表現・処理)</p> <p>◆コミュニケーション ☆積極的に議論に参加する(関心・意欲・態度)</p>
考察	<p>3. 全体による考察と問題の解決</p> <p>各班の代表者が班の考えを説明する。[ワークシート 課題 1(3)]</p> <p>自分の班の結果とは異なるものを見ることにより、山の頂点の位置ができる場所について、考察を深める。</p> <p>※外心の位置に山の頂点ができることを推察し、その理由を理解しようとする。</p>	<p>○「それでは、各班に発表してもらいましょう。自分たちの意見とよく比べてみましょう。」</p> <p>●質問がないか、その考え方でよいのかを確認しながら聞くように指示する。</p> <p>●山の頂点が外側や穴の間(三角形の辺上)にできた結果から、自分たちの考察を再検討するヒントとさせる。</p> <p>●△ABCの外心の位置に塩の頂点ができることを幾何学的に確認し、作図方法を確認する。</p>	

<p>考 察</p>	<p>前時の実験の様子を撮影したビデオを見ながら確認し、結論をまとめる。[ワークシート 課題 1(4)]</p> <p>※等高線の考え方から、三角形の外心を作図すればよいことを理解する。 ※外心を2辺の垂直二等分線の交点として作図する。</p>	<p>●穴の位置からの距離に注目させて、等高線が同心円状になることを認識させる。</p> <p>●クラスの議論の結果をまとめて、全員に共通理解をはかり、さらに検討する。</p>	<p>☆作図方法を考察し、手順を再現することができる。 (表現・処理)</p>
<p>ま と め</p>	<p>4. まとめと発展的課題の提示</p> <p>実験結果を幾何の問題として捉えることで、3点を頂点とする三角形の外心に山の頂点ができることがわかった。</p> <p>さらに、班ごとに課題を設定して、その結果を予想する。[ワークシート 課題2]</p> <p>※班ごとに新しい課題を設定して、予想する。 ※興味を示さない。 ※議論に参加しない。</p>	<p>●直接確認することが困難な場面でも、幾何(特に作図)が現実問題の解決に有効であることを確認する。</p> <p>○「今回は3つの穴があいた場合を実験してみました。この他にも、台紙の条件を変えることにより、塩の落ちる様子が変わってきそう。3点の場合の考え方を活かしながら、班で実験を計画して、結果を予想してみよう。」</p> <p>●実験を行い、予想と結果を比較させる。</p>	<p>☆自ら課題を設定して、解決に取り組もうとする。(関心・意欲・態度)</p> <p>◆問題設定と問題解決</p>

14. 低学年における「数学的リテラシー」育成

1, 2年次(低学年)において、「数学的リテラシー」育成の観点から数学の授業をどのように行うのかという課題について考察する。数学を得意とする生徒と苦手意識を有する生徒まで、能力差が大きい状況が深刻になる以前の低学年に対して、数学的リテラシー育成の観点は「基礎・基本の徹底」である。この「基礎・基本」には、数学的内容の基礎として、数や式の代数計算や初等幾何などの力を育成することだけではなく、PISA のいう「数学化サイクル」(本校のいう「数学する」)という一連の数学的活動の基礎をも含む。つまり、現実の課題や問題から必要な情報を抽出し、数学の世界における問題へと翻訳すること、および得られた数学的問題を既存の知識で解決することである。今回の授業のテーマが、「数学化、理想化、単純化」というキーワードであることは、こうした背景による。

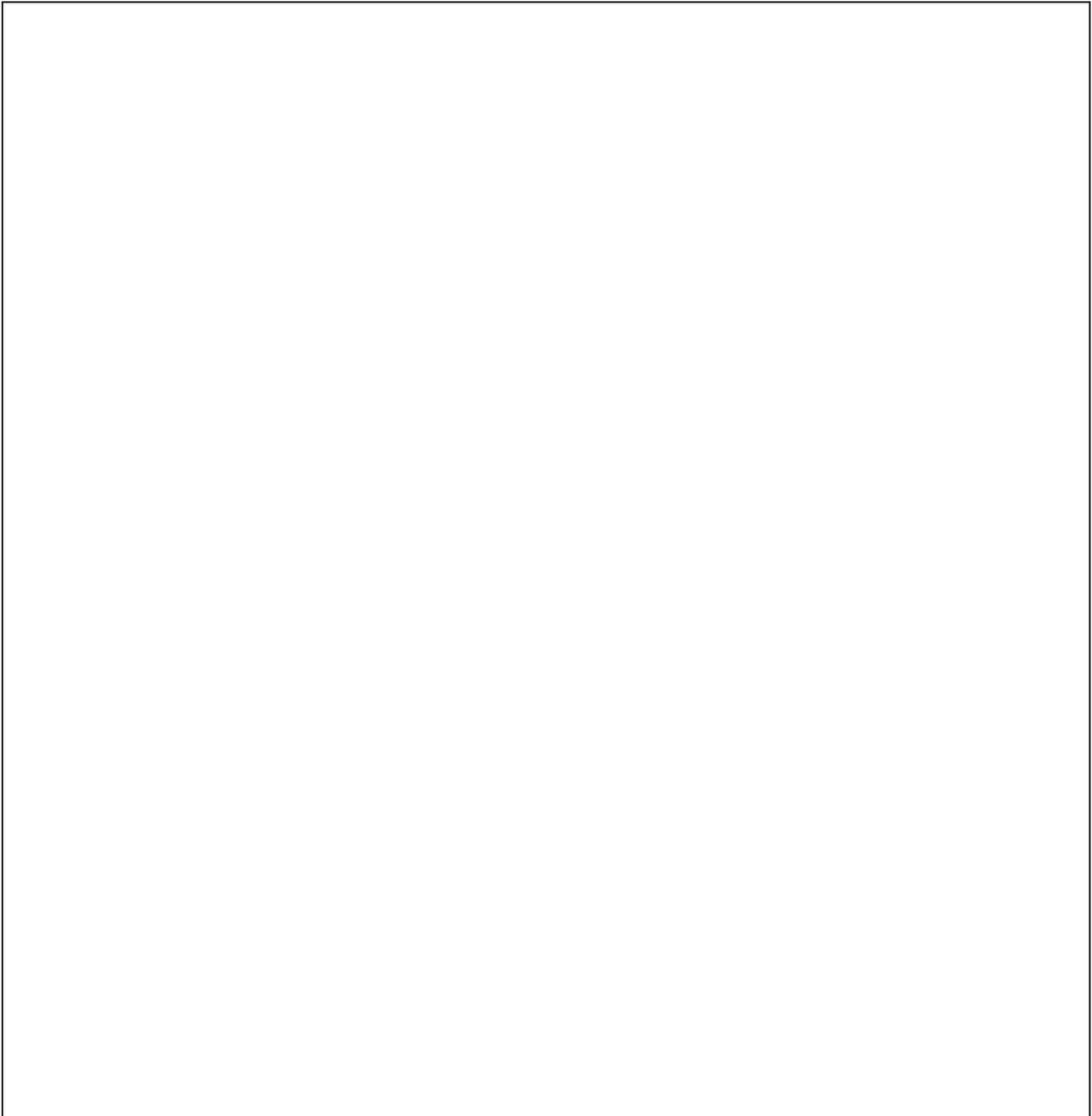
本来の数学化のサイクルでは、数学的に解決された解答を現実の世界に再翻訳するというステップが残っているが、これは低学年には難しいであろう。得られた解答が、数学的には条件を満たしていても、必ずしも現実的な解決になっているかという別の視点が必要になるからである。数学化する段階でどれだけの条件を選択するかは、現実問題の解決においては重要な意味を有する。しかし、条件を多くするほど、扱うべき(考慮に入れるべき)パラメータの数が増え、より複雑な方程式で記述される。したがって、より高度な数学的背景が求められることになる。ゆえに、低学年では、はじめからシンプルな条件設定の課題を扱ったり、複雑な条件が関連した課題の場合でもごく単純な条件のみを抽出したりしている。

実験 一直線上にはない3つの穴があいた厚紙がある。この上に大量の塩をのせたら、塩はどのような状態になるだろうか。実験してみよう。

【実験方法】

- ① グループに1枚ずつ厚紙が配られる。
- ② その厚紙をタッパーの上に乗せて、その上に袋に入っているだけの塩をまんべんなくのせる。
- ③ 穴から塩がもれ落ちていく様子を観察する。

【観察結果】 図や文章で塩の様子を記録しておこう。



課題1 [

]

(1) 穴から塩がこぼれていく様子をよく観察して、課題について考察してみよう。

<p>【個人による考察】</p>	<p>【グループによる考察】 []班</p>
------------------	------------------------------

※グループの意見をしっかりメモしておこう。

(2) 相手を説得するためにはどのように説明したらよいだろうか。

(3) 他の班の結果や意見を聞いて、さらに考察してみよう。

(4) 結論をまとめてみよう。

結論 :

理由 :

課題2 3つの穴が開いている場合とは台紙の条件を変えて、グループでさらに実験を試みよう

【台紙の条件】

【予想】

【実験結果】

【考察】