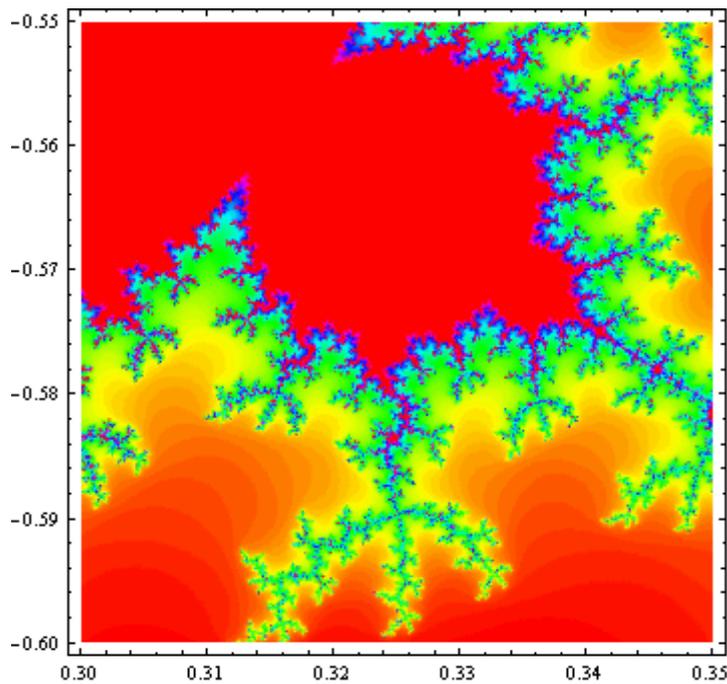


# 数理科学



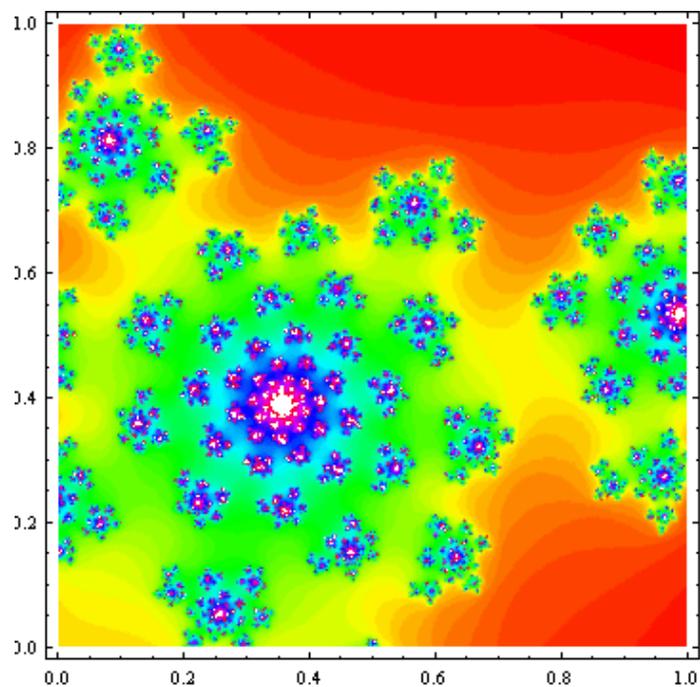
奈良女子大学附属中等教育学校

数学科



## 目次

第 1 章	ゲームと確率	1
第 2 章	生態系の数理とカオス	11
第 3 章	飛行曲線のシミュレーション	33
第 4 章	過去と未来を見通そう	45
第 5 章	音(波)を解析する	89
第 6 章	モデル化とシミュレーション	125
付録	<i>Mathematica</i> の使い方	134





# 第 1 章

## ゲームと確率



## 1 偶数と奇数の賭け

### 1.1 賭け事はお好き？

賭け事には魅力を感じる人は、結構、多いようだ。しかし、賭け事で財産をなした人のことはあまり聞かない。賭け事は儲からないようにできているのだろうか？ あるいは、儲かるとしても、その確率はどのくらいなのだろうか？

ここでは、いくつかの賭け事(ゲーム)について、数理的に考えていこう。

#### [実験 1]

2 人 1 組になって、次のようなルールでゲームをしよう。

- (1) 最初の所持金を 8 万円とする。
- (2) さいころを振って、奇数が出れば 1 万円を得て、偶数が出れば 1 万円を失う。
- (3) 所持金が 10 万円になるか、0 円になればゲームオーバー。

1 人がさいころを振り、もう 1 人が記録をとって、交代しながらこのゲームを何回も繰り返そう。

[予想] ゲームを始める前に、このゲームで 10 万円を得る確率を直観で予想せよ。

[考察 1] 実験 1 の結果から、気づいた点を述べよ。

#### [実験 2]

何度も同じゲームを繰り返すのは、だんだん大変になってくる。そこで、*Mathematica* を利用して、実験 1 のゲームを行ってみよう。

1. *Mathematica* で、0 か 1 の乱数を 10 回発生させるには、次のようにする

```
In[1]:= Table[Random[Integer], {10}]
```

```
Out[1]= {0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1}
```

2. 1 回のゲームを *Mathematica* で構成する

```
In[6]:= okane = 8;  
While [okane < 10 && okane > 0,  
      okane = okane + Random [Integer ] * 2 - 1; Print [okane ]]
```

9

8

7

8

9

10

[問 1] 実験 2 の 2. の命令を解説せよ。

[考察 2] 実験 2 の 2. を繰り返し、その結果をノートに記録して考察せよ。

## [実験 3]

*Mathematica* による実験 2 のゲームの推移を視覚化しよう。

1. 実験の結果をリストにし、リスト自体を表示する

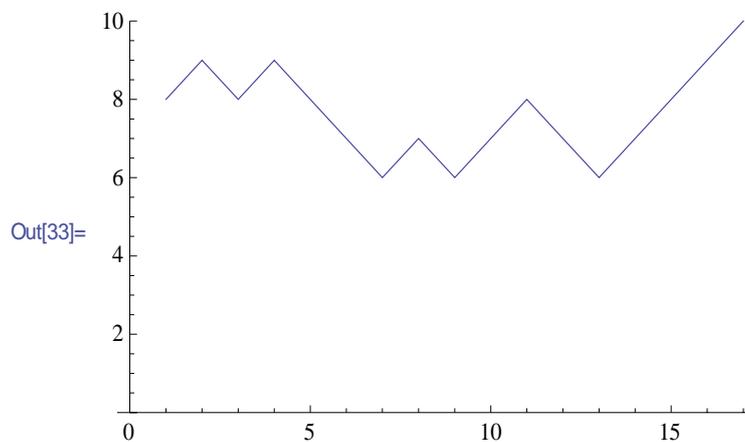
```
In[20]:= okane = 8; kekka = {okane };
While [okane < 10 && okane > 0, okane = okane + Random [Integer ] * 2 - 1;
AppendTo [kekka , okane ]; Print [kekka ]]

{8, 7}
{8, 7, 8}
{8, 7, 8, 7}
{8, 7, 8, 7, 8}
{8, 7, 8, 7, 8, 9}
{8, 7, 8, 7, 8, 9, 8}
{8, 7, 8, 7, 8, 9, 8, 9}
{8, 7, 8, 7, 8, 9, 8, 9, 10}
```

2. 実験の結果をリストにし、リストをグラフとして視覚化する

```
In[30]:= okane = 8; kekka = {okane };
While [okane < 10 && okane > 0, okane = okane + Random [Integer ] * 2 - 1;
AppendTo [kekka , okane ]]
Print [kekka ]
ListLinePlot [kekka , PlotRange -> {0, 10}]

{8, 9, 8, 9, 8, 7, 6, 7, 6, 7, 8, 7, 6, 7, 8, 9, 10}
```



[問 2] 実験 3 の命令を解説せよ。

[考察 3] 実験 3 の 2. を繰り返し、その結果を考察せよ。

## 1.2 関数を作る

- 人間が行うゲーム(賭け事)を, *Mathematica* に真似をさせて実験を繰り返した。このような操作を, シミュレーションという
- シミュレーションは, 様々な自然現象や社会現象を解析していくうえで, 重要な方法である
- 実験 2, 実験 3 は, 実験を行うたびに長い命令をコピーしなければならないし, 最初の所持金を変えるには, 「okane = 8」の部分を変えなければならなかった。
- このようなときのために, *Mathematica* は自分で関数を作ることができる

## [実験 4]

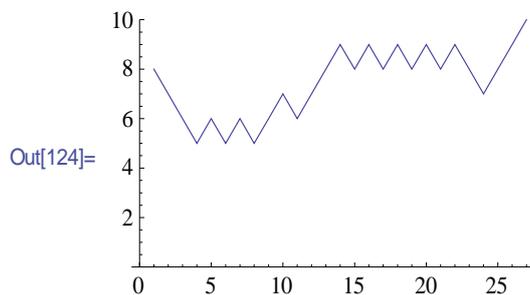
実験 1 のゲームをシミュレーションする関数を作成しよう。

## 1. 関数を作成する

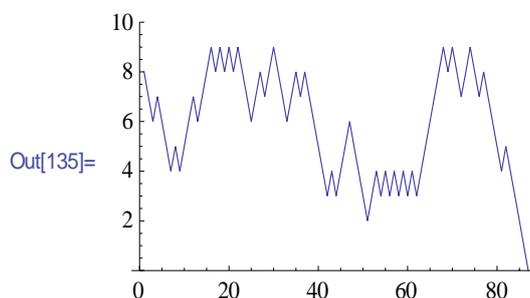
```
In[115]:= evenodd [okane_] := Module [{lst, x},
  x = okane ; lst = {x};
  While [x < 10 && x > 0, x = x + Random [Integer] * 2 - 1;
  AppendTo [lst, x]];
  ListLinePlot [lst, PlotRange -> {0, 10}]]
```

## 2. 関数で実験を行う

```
In[124]:= evenodd [8]
```



```
In[135]:= evenodd [8]
```



[問 3] 実験 4 の関数を解説せよ。

[考察 4] 関数 `evenodd` の値を変えて実験を繰り返し, その結果を考察せよ。

- ゲームのシミュレーションを繰り返しているが、何か法則性は見つかったらうか？
- 視覚化(グラフ)だけではよくわからないときは、やはり数値計算も行ってみよう

## [実験 5]

実験 1 のゲームで、10 万円を得て勝つ確率を計算する関数を作成しよう。

## 1. 関数を作成する

```
In[30]:= kake[okane_, kai_Integer] := Module[{x, kachi},
  kachi = 0;
  Do[x = okane;
  While[x < 10 && x > 0, x = x + Random[Integer]*2 - 1;]
  If[x == 10, kachi = kachi + 1],
  {kai}];
  Print[kachi, "勝 確率は", N[kachi / kai]]]
```

## 2. 関数で実験を行う

```
In[31]:= kake[8, 1000]
      828勝 確率は0.828

In[32]:= kake[8, 1000]
      811勝 確率は0.811

In[33]:= kake[8, 1000]
      783勝 確率は0.783
```

[問 4] 実験 5 の関数 **kake** を解読せよ。

[考察 5] 関数 **kake** の変数の値を変えて実験を繰り返し、その結果を考察せよ。そして、最初の所持金が  $n$  円であり、 $A$  円になったときにゲームをやめるとすると、 $A$  円を得る確率はいくらになると予想できるか。

[問 5] 考察 5 の予想が正しいことを、*Mathematica* で簡単に調べる方法を考えよ。

## 2 理論的な考察

### 2.1 漸化式

■ *Mathematica* による実験で、次の予想が成り立ちそうだ

実験 1 のゲームを、最初の所持金を  $n$  万円で始めて、所持金が  $A$  万円または  $0$  円になったときにゲームを終了するとき、所持金が  $A$  万円になる(勝つ)確率は  $\frac{n}{A}$  である。

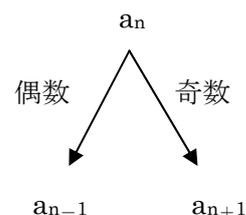
■ *Mathematica* によれば、確実に成り立ちそうであるが、数学的にはまだ推測であり、証明しない限り定理ではない

■そこで、理論的・数学的に考えて、上の予想が正しいことを示す

■実験 1 のゲームのように、次々と状態が変化していく様子、つまり 1 回目、2 回目、 $\dots$ 、 $k$  回目、 $\dots$ の状態を考える必要があるときは、漸化式が便利である

[問 6] 実験 1 のゲームにおいて、所持金が  $n$  万円のときから  $A$  万円になって勝つ確率を  $a_n$  とおく。

- (1)  $a_0$ ,  $a_A$  の値を求めよ。
- (2) 右の図を参考にして、 $a_n$  を  $a_{n-1}$ ,  $a_{n+1}$  で表せ。
- (3)  $b_n = a_n - a_{n-1}$  とおくと、 $b_{n+1}$ ,  $b_n$  の関係を求めよ。
- (4) 数列  $\{b_n\}$  の一般項を求めよ。
- (5) 数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。



■問 6 により、実験 1 のゲームに関する次の定理が成り立つ。

**[定理 1]**

所持金  $n$  万円から始めて、さいころを振ってその目が奇数であれば 1 万円を得て、偶数であれば 1 万円を失うゲームを行う。目標額が  $A$  万円であるとき、 $A$  万円を得る確率は  $\frac{n}{A}$  である。

[問 7] 実験 1 のゲームにおける期待値を求めよ。

■問 7 により、散々苦勞してゲーム(賭け)を頑張っても、平均的には最初の所持金と変わらないことが示された！

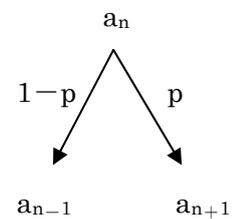
## (発展)

実験 1 のゲームは、1 回の試行で 1 万円を得る確率と 1 万円を失う確率が同じであった。しかし、これでは胴元が儲からないので、一般には勝つ確率のほうが負ける確率より低く設定している。そこで、1 回の試行で勝つ確率を  $p$  としたとき、最終的に勝つ確率がいくらになるか考えてみよう。

1 回の試行で 1 万円を得る確率を  $p$  とすると、最初の所持金を  $n$  万円始めて、所持金が  $A$  万円または  $0$  円になったときにゲームを終了するとき、所持金が  $A$  万円になる (勝つ) 確率はいくらになるだろうか？

[問 8] 所持金が  $n$  万円するときから  $A$  万円になって勝つ確率を  $a_n$  とおく。

- (1)  $a_0, a_A$  の値を求めよ。
- (2) 右の図を参考にして、 $a_n$  を  $a_{n-1}, a_{n+1}$  で表せ。
- (3) (2) の漸化式を満たす等比数列を  $\{r^n\}$  とおくと、 $r$  を求めよ。
- (4) (3) を用いて、数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。



[問 9] このゲームにおける期待値を求めよ。

## 2.2 平均の回数

- 実験 1 のゲームで勝つ確率はわかったが、勝つまでに振るさいころの回数はどうなるだろう？
- 何か規則性があるのか、ないのか、まずは *Mathematica* で実験してみよう

## [実験 6]

実験 1 のゲームで、最初の所持金、最終の金額を入力し、勝った回数とその確率、および勝つまでに振ったさいころの平均回数を出力する関数を作成しよう。

1. 関数 `kake` を改良して、`kake2` を作成する

```
kake2[okane_, owari_] :=
Module[{x, kachi, i, wa},
  kachi = 0; wa = 0;
  Do[x = okane; i = 0;
    While[x < owari && x > 0, x = x + Random[Integer]*2 - 1;
      i = i + 1];
    If[x == owari, kachi = kachi + 1; wa = wa + i],
    {10000}];
  Print[" 勝率", N[kachi/10000], ", 勝つまでの回数の平均 N[wa/kachi]]]
```

2. 関数で実験を行う

```
In[91]:= kake2[8, 10]
勝率0.7902, 勝つまでの回数の平均11.9398

In[92]:= kake2[16, 20]
勝率0.7945, 勝つまでの回数の平均47.821
```

[問 10] 実験 6 の関数 `kake2` を解説せよ。

[考察 6] 関数 `kake2` の変数の値を変えて実験を繰り返し、その結果を考察せよ。特に、`kake2[8, 10]` と `kake2[4, 5]` のように、勝つ確率が同じである実験結果を比較して考察せよ。

[問 11] 考察 6 の予想が正しいことを、*Mathematica* で簡単に調べる方法を考えよ。

## 2.3 再び漸化式

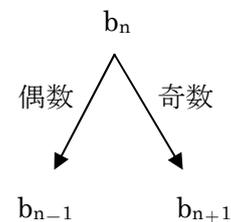
■ *Mathematica* による実験で、次の予想が成り立ちそうだ

実験 1 のゲームを、 $n$  万円で始めて  $A$  万円で終わるときと、 $nk$  万円で始めて  $Ak$  万円で終わるときとでは、さいころを振る回数は  $k^2$  倍になる。

- これもやはり、数学的にはまだ推測であり、証明しない限り定理ではない
- そこで、理論的・数学的に考えて、上の予想が正しいことを示そう
- 実験 1 の確率を考えたときと同様に、次々と状態が変化していく様子を考える必要があるので、やはり漸化式を利用して考えよう

[問 12] 実験 1 のゲームにおいて、所持金が  $n$  万円のときから  $A$  万円になって勝つときのさいころを振る回数を  $b_n$  とおく。

- (1)  $b_0$ ,  $b_A$  の値を求めよ。
- (2) 右の図を参考にして、 $b_n$  を  $b_{n-1}$ ,  $b_{n+1}$  で表せ。
- (3)  $c_n = c_n - c_{n-1}$  とおくとき、 $c_{n+1}$ ,  $c_n$  の関係を求めよ。
- (4) 数列  $\{c_n\}$  の一般項を求めよ。
- (5) 数列  $\{b_n\}$  の一般項を求めよ。



■ 問 12 により、実験 1 のゲームに関する次の定理が成り立つ。

**[定理 2]**

所持金  $n$  万円から始めて、さいころを振ってその目が奇数であれば 1 万円を得て、偶数であれば 1 万円を失うゲームを行う。目標額が  $A$  万円であるとき、 $A$  万円を得るまでに振るさいころの回数は、 $b_n$  である。

[問 13] 定理 2 の結果を利用して、*Mathematica* で実験 1 のゲームのさいころを振る回数の大きくなる様子を調べよ。

※ゲームの設定を変え、オリジナルの課題に挑戦しよう。



第1章は、*Mathematica*の入門編としてはちょっとしたプログラミングがあるので、初心者にかなり厳しい。ここは、「*Mathematica*はこんなものか」と大雑把に挑戦してみるとよい。「すべてを理解しなければいけない」なんて考えると一歩も進まない。「こうしたらどうなるのかな」とやってみることが、理解への近道である。*Mathematica*はときには怒りながらも、あなたの命令を忠実に応えてくれる。

プログラムを見ると、たくさんの英単語が見つかる。大文字で始まるのは、ほとんどが*Mathematica*の関数である。円周率 $\pi$ や自然対数 $\log$ でさえも、PiやLogのように大文字で始まる。これを小文字だけで書くと、スペルミスではないかと注意される。

第1章にあったkakeやkachiは、変数や関数名である。xやaだけでなく、abやa1でも1つの変数として使える。abは、 $a \times b$ ではないので注意が必要だ。掛け算は、 $a * b$ のように\*（アスタリスク）で表わすが、これも省略できる。そのときは\*のかわりにスペースを入れる。だから、abとa bの意味は異なる。

```
In[1]:= Clear[a]
```

```
In[2]:= a * a + 5 ab - 3 a b
```

```
Out[2]= a2 + 5 ab - 3 a b
```

```
In[3]:= a = 1
```

```
Out[3]= 1
```

```
In[4]:= a * a + 5 ab - 3 a b
```

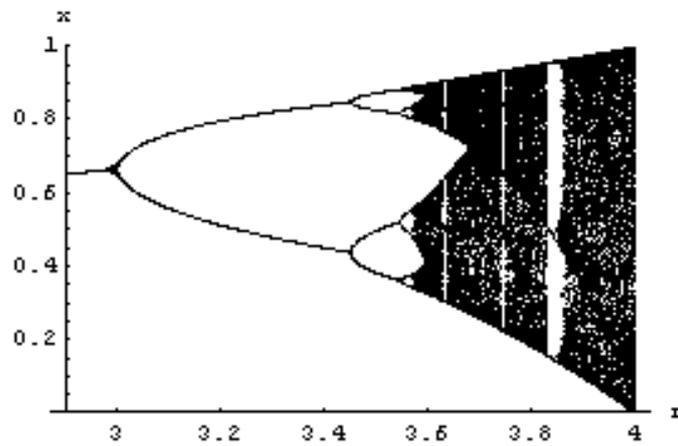
```
Out[4]= 1 + 5 ab - 3 b
```

変数に使う文字列は、後から見たときにも分かりやすい方がよい。お金だからo（オー）なんて使うと、0（ゼロ）と紛らわしいし、どういう役目があるのか分かりにくい。okaneやmoneyなんかがよいだろう。ただし、*Mathematica*の関数と似た単語を使わない方がよい。誤字でないかと指摘される。

わからない命令は先生にきくのもよいし、ヘルプや?を使って*Mathematica*で調べるのもよい。巻末にいくつかサンプルを示しておいた。とにかく挑戦あるのみ。

## 第2章

# 生態系の数理とカオス



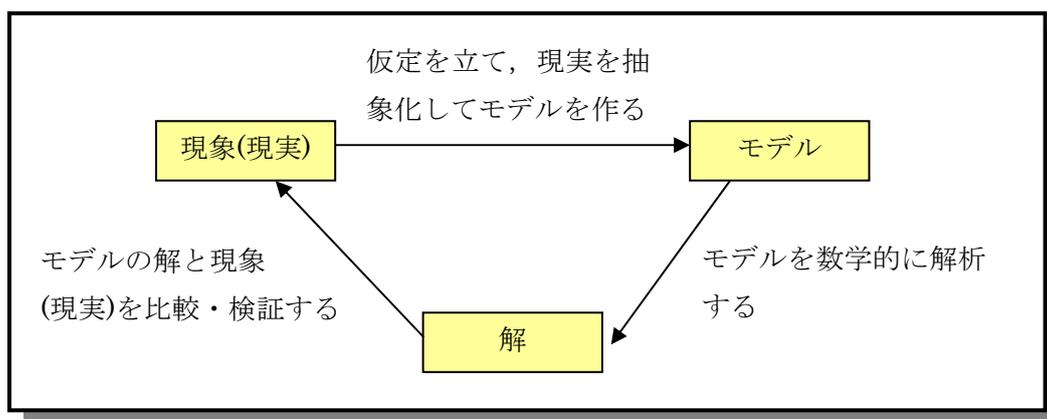
## 1 生態系

### 1.1 モデル化

なぜ生き物の数は、時間とともに変動するのだろうか？ また、その変動の様子も様々であるが、それはどうしてだろうか？

ここでは、上のようなことを、実際に生き物の数を調査するだけではなく、数理的な方法で探っていこう。

- 生物の個体数の変化の様子をより良く理解するために、**数理的手法**を用いる
- 下図のように、**現象(現実)**を抽象化して**モデル**をつくり、そのモデルを数学的に解析して**解**を求め、その解が現象(現実)を表現できているかを検証する



- モデルの解と現実が合わないときは、仮定を変更してモデルを作り直し、改めて解析を行って解を求める
- 以上のサイクルを繰り返しながら、生き物の数の変動の様子を探っていく

### 1.2 一定倍のモデル

まずは、簡単なモデルを考えよう。

- 生物の個体数が増えていくとき、一定時間に一定倍になると仮定してみる

[例 1] 1 個の個体が、一定時間間隔に同期して(一斉に)分裂し、2 個の個体になるモデルを考える。

時刻  $t$  のときの個体数を  $a(t)$  とし、最初の個体数を  $a(0)=1$  とすると、

$$a(1)=2a(0)=2$$

$$a(2)=2a(1)=4$$

$$a(3)=2a(2)=8$$

.....

[問 1] 例 1 のモデルにおいて、 $a(10)$  を求めよ。また、 $a(t)$  と  $a(t+1)$  の関係を求め、 $a(t)$  を  $t$  の式で表せ。

[問2] 例1のモデルの  $a(t)$  の値を、 $0 \leq t \leq 10$  の範囲でグラフとしてプロットしてみよ。

[実験1]

例1のモデルを、*Mathematica* で実験してみよう。

1. 一定時間で2倍になるモデルを、定式化する。

```
In[1]:= a[t_] := 2 a[t - 1]
a[0] = 1;
```

2.  $a(10)$  を計算する。

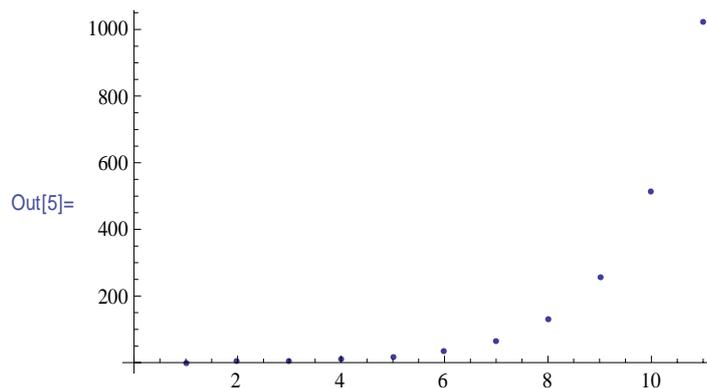
```
In[3]:= a[10]
```

```
Out[3]= 1024
```

3.  $a(0)$  から  $a(10)$  までの値を計算し、それらの値をプロットする。

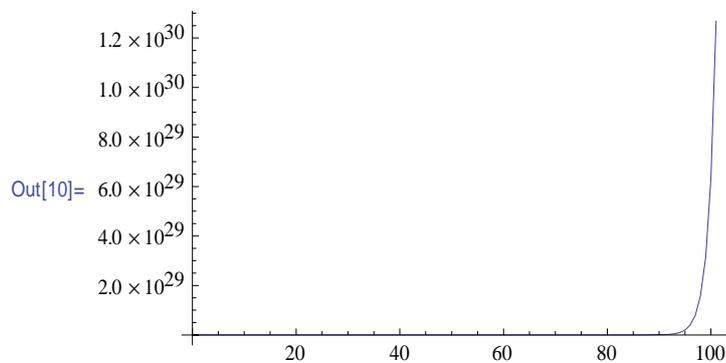
```
In[4]:= d1 = Table[a[t], {t, 0, 10}]
ListPlot[d1, PlotRange -> All]
```

```
Out[4]= {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024}
```



4.  $a(0)$  から  $a(100)$  までの値を計算し、それらの値をプロットして線で結ぶ。

```
In[9]:= d1 = Table[a[t], {t, 0, 100}];
ListLinePlot[d1, PlotRange -> All]
```



[考察1] 実験1の結果から、気づいた点を述べよ。

[問 3] 1 個の個体が、一定時間間隔に同期して分裂し、 $r$  個の個体になるモデルを考える。

このモデルで、時刻  $t$  のときの個体数を  $b(t)$  とし、最初の個体数を  $b(0)=b$  とする。

- (1)  $b(t)$  と  $b(t+1)$  の関係を求め、 $b(t)$  を  $t$  の式で表せ。
- (2)  $r$  の値によって、 $b(t)$  の値がどのように変化するかを予想せよ。
- (3) (2) の予想が正しいかどうかを、*Mathematica* によって確認せよ。

■以上の結果をまとめると、次のようになる。

**[定理 1]**

1 個の個体が、一定時間間隔に同期して(一斉に)分裂し、 $r$  個の個体になるモデルを考える。

時刻  $t$  のときの個体数を  $a(t)$  とし、最初の個体数を  $a(>0)$  とすると、

$$a(t+1) =$$

そして、この生物モデルでの  $r$  の値による個体数の増え方は、次のようになる。

- (i)  $r >$                     のとき、 $a(t)$  は
- (ii)  $r =$                     のとき、 $a(t)$  は
- (iii)  $0 < r <$                 のとき、 $a(t)$  は

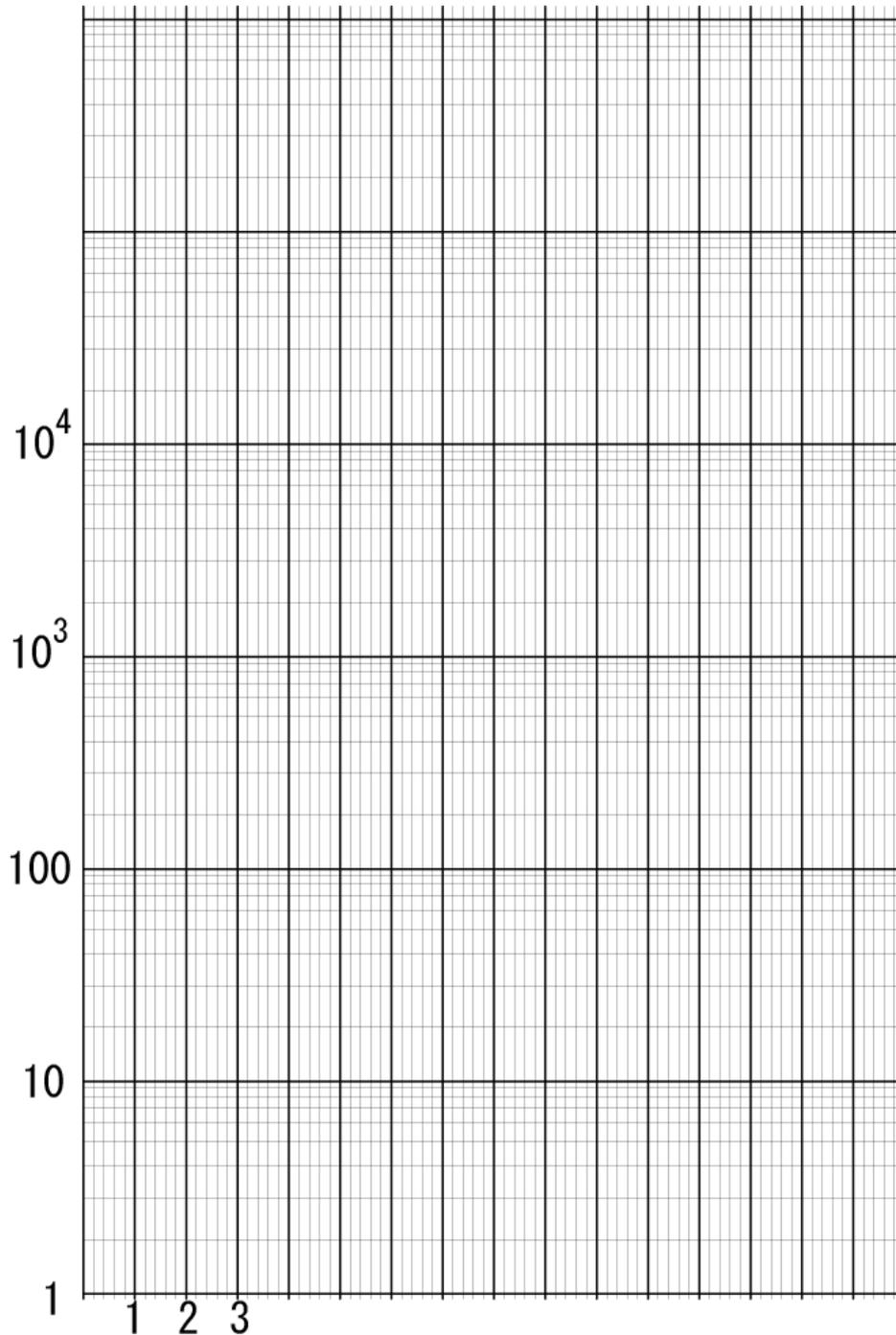
(証明)

(証明終わり)

## 1.3 片対数グラフ

ちょっと個体数増加のモデルとは離れて、便利なグラフの描き方について学ぼう。

- 例 1 や問 3 のような指数関数的増加の場合には、値の増加や減少のスピードが急激で、普通のグラフ用紙にグラフを描くのは難しくなる
- そこで、次のようなグラフ用紙(☆)を利用する



[問 4] 上のグラフ用紙(☆)の目盛りの構造を解析し、横軸、縦軸の目盛りを完成せよ。

[問 5] 例 1 のモデルを表す式  $y=2^t$  のグラフを、グラフ用紙(☆)に描け。そして、そのグラフの形がどのようなになるかを予想せよ。

[問 6] グラフ用紙(☆)に、 $y=2^t$  のグラフを描いたとき、縦軸の目盛り  $y$  の表す本当の値を求めよ。そのことで、問 5 の予想が正しいことを証明せよ。

- (☆)のような、片方の軸の目盛りが対数の値で目盛られているグラフ用紙を、**片対数グラフ用紙**といい、そこに描いたグラフを**片対数グラフ**という
- 指数的变化のように、値の変化が急激過ぎて普通のグラフでは解析しづらいときには、片対数グラフが用いられることが多い

[定理 2]

指数関数  $y=a^t$  の片対数グラフを描くと、直線となる。

(証明)

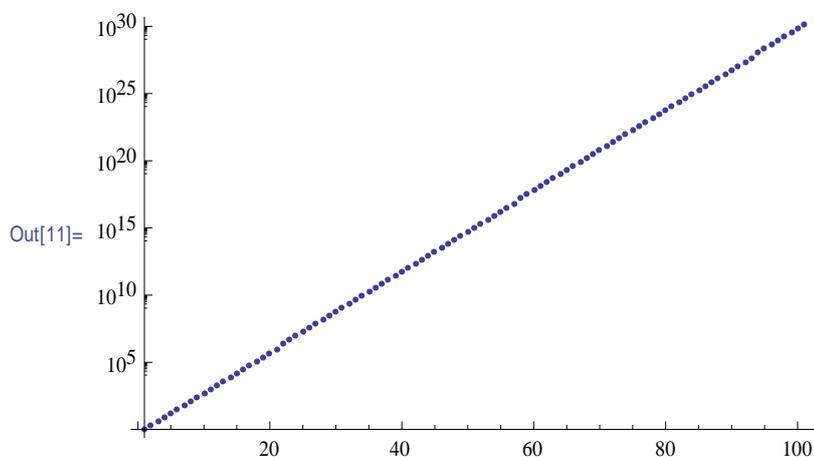
(証明終わり)

[実験 2]

例 1 のモデルの片対数グラフを、*Mathematica* で描いてみよう。

リスト **d1** を片対数グラフとして描く。

```
In[11]:= ListLogPlot[d1, PlotRange -> All]
```



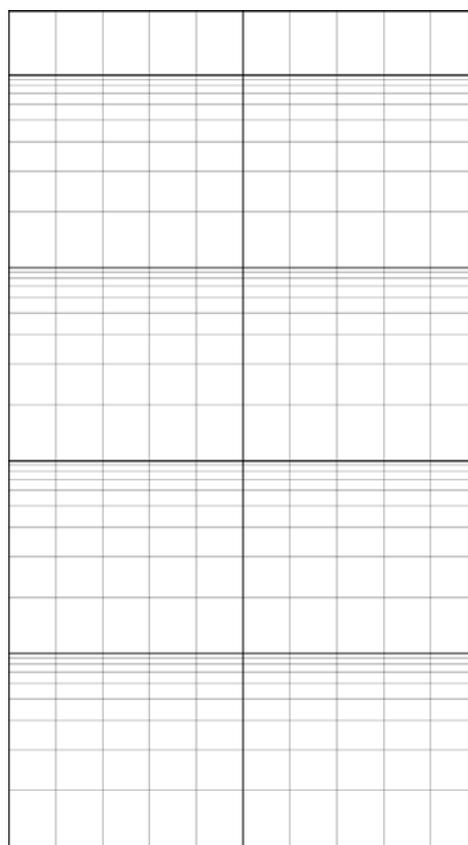
## 1.4 離散時間モデル

- 1.3 で考えたような指数増加モデルは、成長過程にある生物集団をよく説明でき、繁殖や死亡が同期して起こる生物(昆虫や鳥など)のモデルとしてよく用いられる

[問 7] 次の表は、Lack(1954)によるキジの個体数増加のデータである。

年	1937	1938	1939	1940	1941	1942
個体数	8	30	81	282	705	1325

- (1) 横軸に年、縦軸に個体数をとったグラフを、左下のグラフ用紙に描いてみよ。
- (2) 片対数グラフを、右下のグラフ用紙に描いてみよ。
- (3) 2つのグラフから、キジの個体数の増加について考察せよ。
- (4) (3)の考察が妥当であることを、計算で確かめよ。



[考察 2] *Mathematica* で、問 7 のキジのデータを  $d2 = \{8, 30, 81, 282, 705, 1325\}$ ; として、問 7 と同様の作業・考察をせよ。

- 1.3 のモデルの式 :  $a(t+1)=ra(t)$ ,  $a(0)=a$  では、時刻  $t$  のときの個体数を  $a(t)$ , 1 個の個体が一定時間間隔に同期して  $r$  個の個体になると考えたので、 $a(t)$  は 0 以上の整数値でなければならない
- しかし、 $a(t)$  を単位面積あたりの個体密度と考えれば、 $a(t)$  は 0 以上の実数値として考えてよいので、これ以降は個体密度に着目してモデルを考える

### 1.5 指数増加モデルの改良

■ 1.3 で考えたような指数増加モデル

$$a(t+1)=ra(t), \quad a(0)=a \quad \cdots(1.1)$$

を解くと,

$$a(t)=ar^t \quad \cdots(1.2)$$

となった

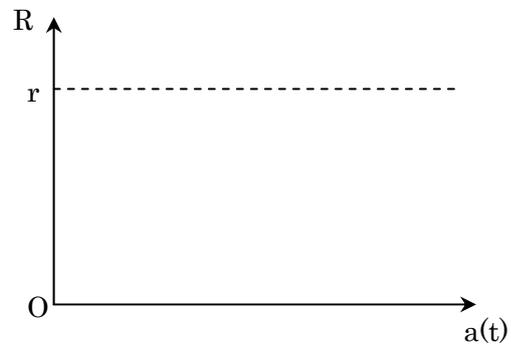
■ この指数増加モデルには、次のような問題点がある

- ・  $r > 1$  のとき、個体密度が発散してしまう、すなわち、 $t \rightarrow \infty$  のとき、 $a(t) \rightarrow \infty$  となるが、これは現実的ではない
- ・ これは、個体の増殖率が一定の  $r$  であるとしたことによる
- ・ 現実には、食料の不足や人口の増加に伴う環境の悪化、エネルギーの供給不足等で、増殖率の  $r$  は一定ではないと思われる

■ そこで、増殖率が個体密度によって変化するモデルを考えるが、モデル化ではできるだけ単純なものから考えるのが普通である

[問 8] 増殖率  $R$  が個体密度  $a(t)$  によって変化する場合、 $R$  と  $a(t)$  の簡単な関係としてはどのようなものが考えられるか。

[問 9] 増殖率  $R$  と個体密度  $a(t)$  との関係を下の図に描き込み、 $R$  を  $a(t)$  の式で表せ。



■ 問 9 で考えたモデルは、個体密度がすごく小さければ増殖率  $R$  はほぼ  $r$  であるが、個体密度が大きくなるにつれて  $R$  は減少し、 $a(t)=K$  のときに  $R=0$  となるモデルである

[問 10] 問 9 で考えた増殖率  $R$  を用いて、個体密度  $a(t)$  と  $a(t+1)$  の関係を表せ。

## 1.6 ロジスティックモデル

## ■1.5 で考えたモデル

$$a(t+1) = r \left( 1 - \frac{a(t)}{K} \right) a(t) \quad \cdots (1.3)$$

は、右辺が**非線型**なので、指数関数モデルのように解くことができないため、別の方法で解析できるように、(1.3)をより扱いやすく変形する

■(\*)の両辺を  $K$  で割ると、

$$\frac{a(t+1)}{K} = r \left( 1 - \frac{a(t)}{K} \right) \frac{a(t)}{K}$$

ここで、 $\frac{a(t)}{K} = x_t$  とおくと、

$$x_{t+1} = r(1 - x_t)x_t \quad \cdots (1.4)$$

■この漸化式(差分方程式)(1.4)を解析し、数列 $\{x_t\}$ の振る舞いがわかれば、それを  $K$  倍することで個体密度  $a(t)$ の振る舞いがわかる

■(1.4)で表されるモデルを、**ロジスティックモデル**という

## [実験 3]

ロジスティックモデル(1.4)を具体的に計算して、 $\{x_t\}$ の振る舞いを調べよう。

$r=2$ ,  $x_0=0.2$  のとき、

$$x_1 = 2(1 - 0.2) \cdot 0.2 = 0.32$$

$$x_2 = 2(1 - 0.32) \cdot 0.32 = 0.4352$$

$$x_3 = 2(1 - 0.4352) \cdot 0.4352 = 0.491602$$

[問 11] *Mathematica* を電卓として利用して、実験 3 の計算の続きを  $x_{10}$  まで行え。

[考察 3] 実験 3 と問 11 の結果から、気づいた点を述べよ。

## [実験 4]

*Mathematica* で、ロジスティックモデル(1.4)を具体的に計算して視覚化し、考察 3 の正しさを確認しよう。

```
In[22]:= x[t_] := r (1 - x[t - 1]) x[t - 1]
         r = 2; x[0] = 0.2;

In[24]:= d3 = Table[x[t], {t, 0, 10}]

Out[24]= {0.2, 0.32, 0.4352, 0.491602, 0.499859, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5}

In[25]:= ListPlot[d3]
```

[問 12]  $x_0=0.1$ ,  $r$  が(1)~(5)の値のとき, 実験 4 を改良した次の実験を *Mathematica* で行え。そして, **ListPlot** の出力結果の概形を描け。

```
In[33]:= r = 0.9; x[0] = 0.1;
         d3 = Table[x[t], {t, 0, 10}]
         ListLinePlot[d3]
```

(1)  $r=0.9$

(2)  $r=1.5$

(3)  $r=2.8$

(4)  $r=3.3$

(5)  $r=3.9$

[考察 4] 実験 4 と問 12 の結果から, 気づいた点を述べよ。

## 1.7 ロジスティックモデルのさらなる解析

■実験 4 と問 13 の結果は、 $t$  を 0 から 10 まで変化させたものであったが、もっと時間を延ばす、すなわち(1.4)をさらに繰り返すとどうなるだろう？

■*Mathematica* の関数 **Table** は、実験 4 の形で 50 回、100 回繰り返すと、すごく時間がかかるので、新たな関数を利用することを考えよう

■さらに、より解析しやすくするために、関数を漸化式を利用して表現する

$$x_{t+1} = r(1-x_t)x_t \cdots (1.4)$$

を考えると、2 次関数

$$f(x) = r(1-x)x \cdots (1.5)$$

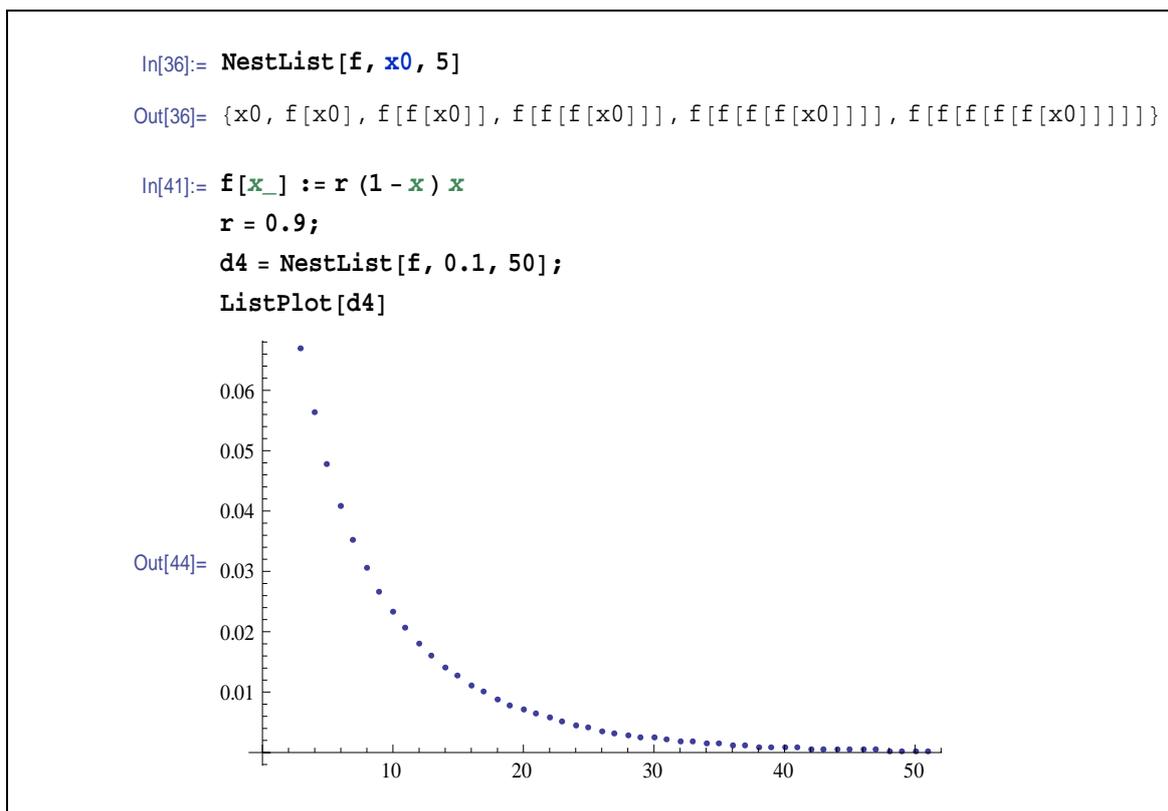
を用いると、(☆)は

$$x_{t+1} = f(x_t) \cdots (1.6)$$

と表される

## [実験 5]

*Mathematica* で、ロジスティックモデルの表現(1.6)を用いて計算しよう。



[問 13] 実験 5 の命令を解読せよ。

[問 14]  $x_0=0.1$  のとき,  $r$  の値を次の(1)~(4)の値に変えて, *Mathematica* で実験 5 を繰り返し, 出力結果の概形を描け。

(1)  $r=1.5$

(2)  $r=2.8$

(3)  $r=3.3$

(4)  $r=3.9$

[考察 5] 実験 5 と問 14 の結果から, 気づいた点を述べよ。

[考察 6]  $r$  の値や初期値  $x_0$ , **NestList** の回数を変えながら *Mathematica* で実験 5 を繰り返し, その結果を考察せよ。ただし,  $0 < r < 4$  とする。その理由も考えよ。

2 モデルの視覚化

2.1 ロジスティックモデルの視覚化

■ロジスティックモデルを、2 次関数

$$f(x)=r(1-x)x \cdots(1.5)$$

を用いて、

$$x_{t+1}=f(x_t) \cdots(1.6)$$

と表した

■ロジスティックモデルによる個体密度の増減の様子を、さらにわかりやすく表すことを考える

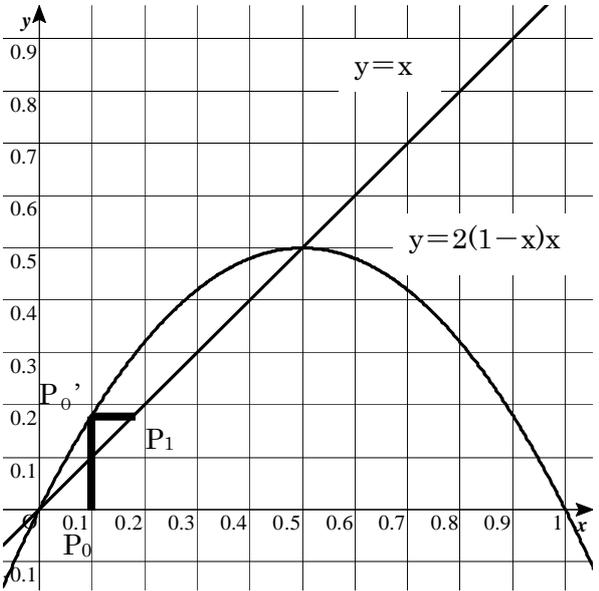
[実験 6]

$r=2, x_0=0.1$  のときを考える。  
 $f(x)=2(1-x)x$   
 より、  
 $y=f(x), y=x$   
 の 2 つのグラフを描く(右図)。

[1]  $P_0(x_0, 0)$  から  $x$  軸に垂直な直線を延ばし、 $y=f(x)$  との交点を  $P_0'$  とする。  
 $P_0'(x_0, f(x_0))=(x_0, x_1)$

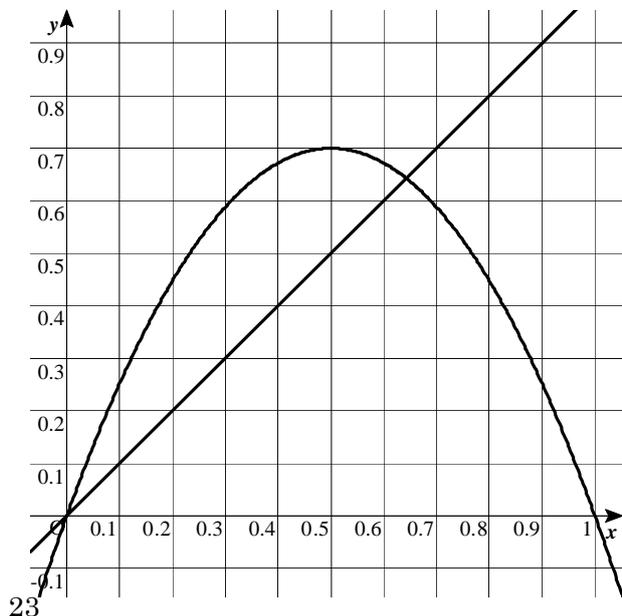
[2]  $P_0'$  から  $x$  軸に平行な直線を延ばし、 $y=x$  との交点を  $P_1$  とする。  
 $P_1(x_1, x_1)$

[3]  $P_1$  を出発点として、[1], [2] を繰り返す。



[問 15] 実験 6 の意味を解説し、説明せよ。また、実験 6 を続けることでどのようなことがわかるか述べよ。

[考察 7]  $r=2.8, x_0=0.1$  のとき、右図において実験 6 を実行し、その結果について考察せよ。



## 2.2 ロジスティックモデルの視覚化

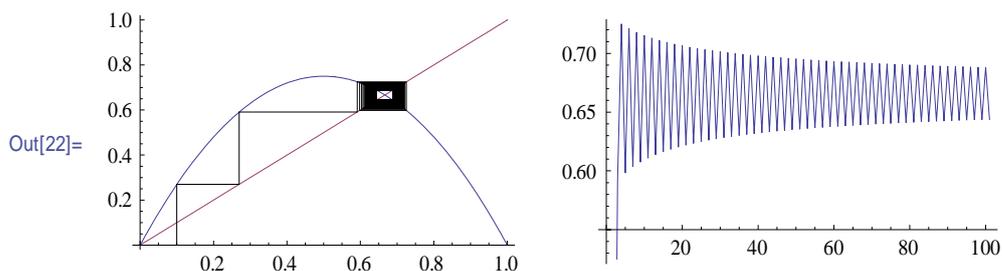
- ロジスティックモデルを視覚化することで、個体密度の増減の様子がよくわかるが、手で行うと精密さに欠ける上に、増殖率  $r$  や初期値  $x_0$  の値によってどのように様子が変わるかの考察ができない
- そこで、*Mathematica* で関数をつくって実験しよう

## [実験 7]

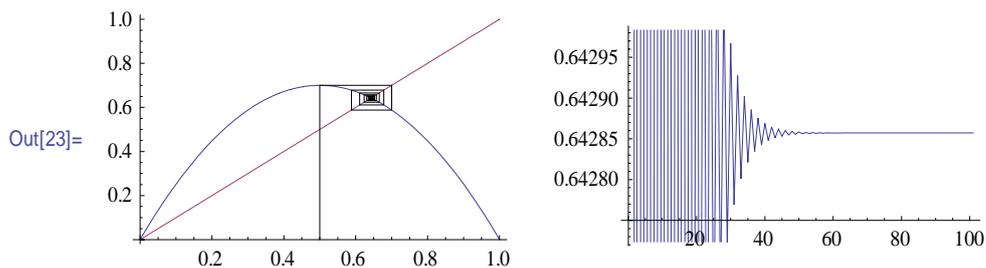
*Mathematica* で、ロジスティックモデルの増減の様子を視覚化しよう。

```
In[21]:= gr[r_, x0_] := Module[{data, tmax},
  f[x_] := r (1 - x) x;
  data = {{x0, 0}}; tmax = 100;
  Do[{AppendTo[data, {Nest[f, x0, t], Nest[f, x0, t + 1]}],
    AppendTo[data, {Nest[f, x0, t + 1], Nest[f, x0, t + 1]}]}, {t, 0, tmax}];
  g1 = Plot[{f[x], x}, {x, 0, 1}, Epilog -> {Line[data]}];
  g2 = ListLinePlot[Table[Nest[f, x0, t], {t, 0, tmax}]];
  Show[GraphicsArray[{g1, g2}]]]
```

```
In[22]:= gr[3, 0.1]
```



```
In[23]:= gr[2.8, 0.5]
```

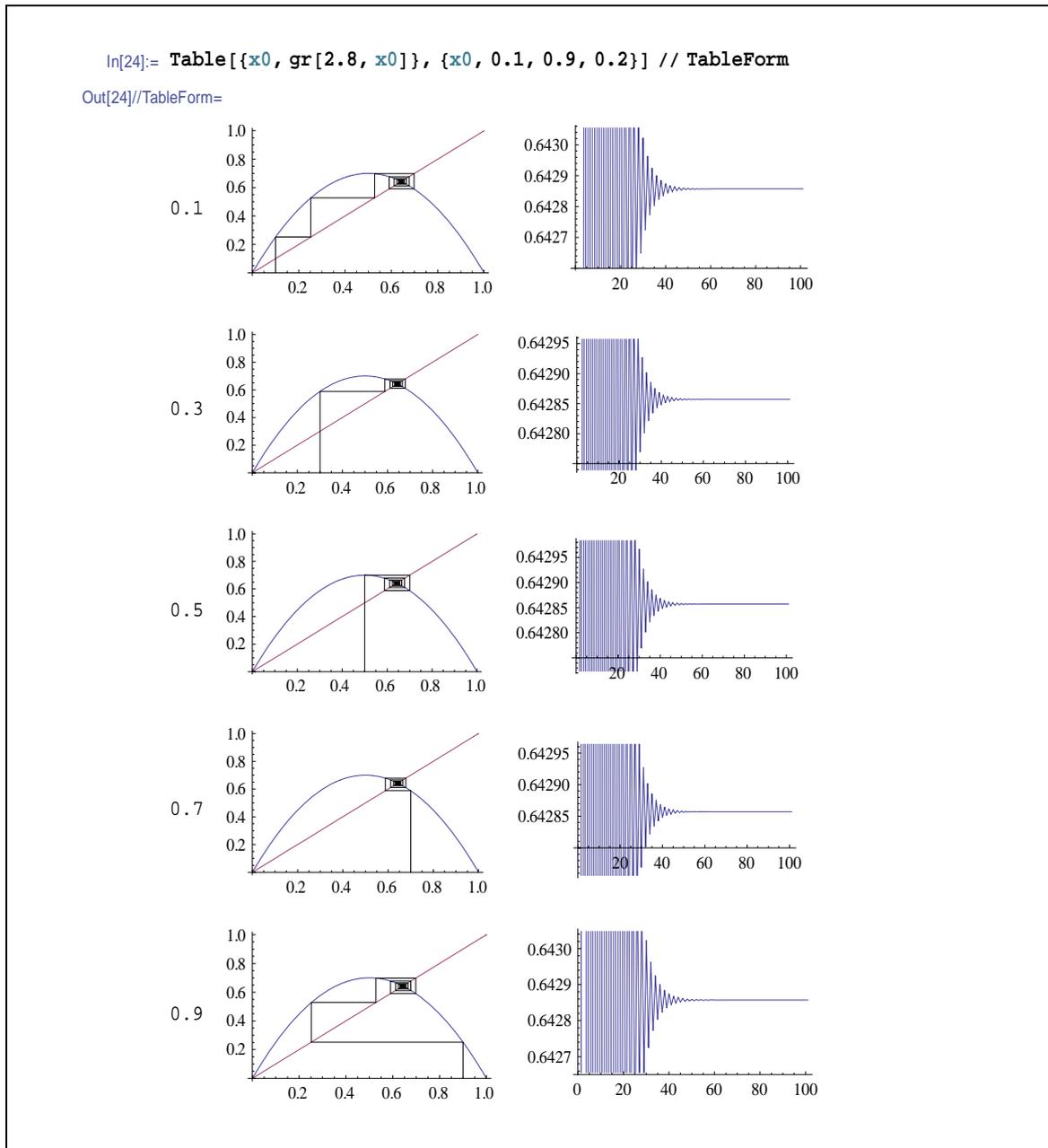


[問 16]  $x_0=0.1$  のとき、 $r$  の値を次の(1)~(4)の値に変えて、実験 7 を繰り返せ

- (1)  $r=0.9$       (2)  $r=1.5$       (3)  $r=3.3$       (4)  $r=3.9$

## [実験 8]

*Mathematica* で、初期値を自動的に変化させて実験しよう。



[問 17]  $r$  の値や初期値  $x_0$ ,  $k$  の値を変えながら実験 8 を繰り返せ。ただし,  $0 < r < 4$  とする。

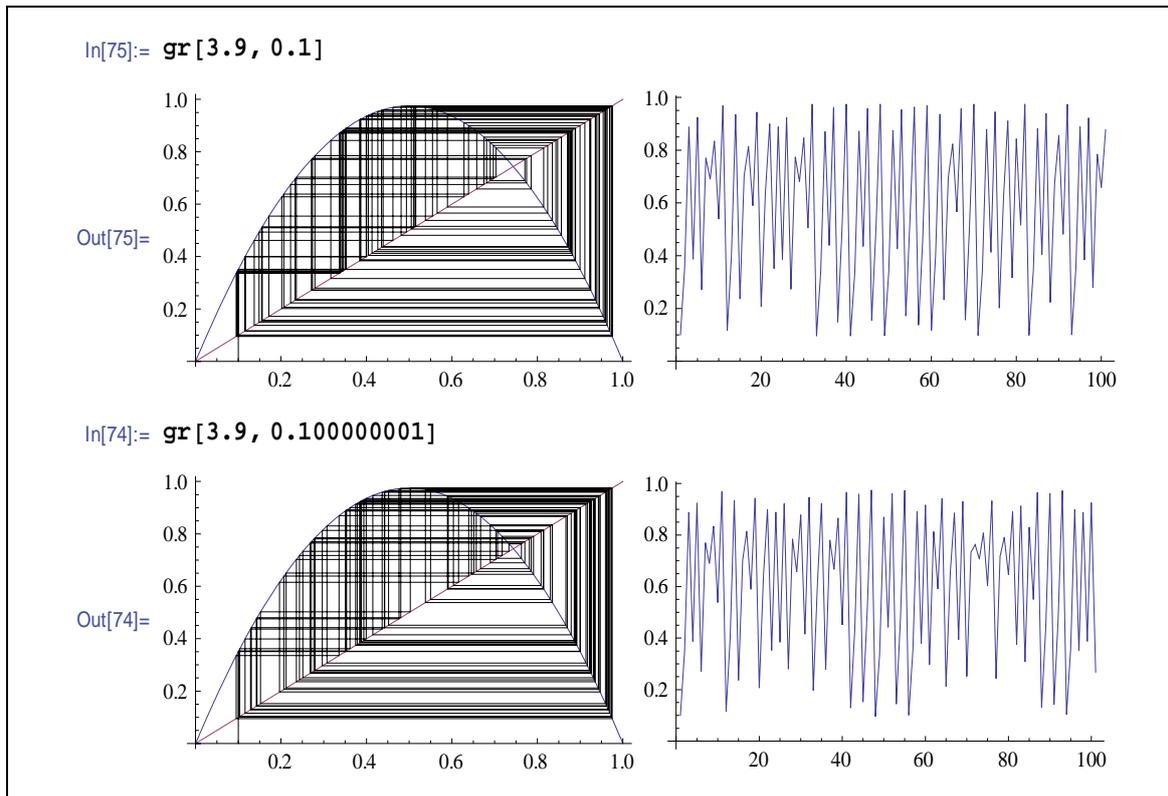
[考察 8] 実験 8 と問 17 の結果から, 気づいた点を述べよ。

### 2.3 初期値の小さな差

- ロジスティックモデルにおいて、増殖率  $r$  が同じであるとき、初期値が少し違っても、同じような振る舞いをしていた
- では、初期値をほんの少しだけ違えたとき、個体密度の増減はどのようなになるだろう？

[実験 9]

*Mathematica* で、初期値  $x_0$  の値を非常に小さな値だけ変化させて実験しよう。



[考察 9] 実験 9 結果から気づいた点を述べよ。

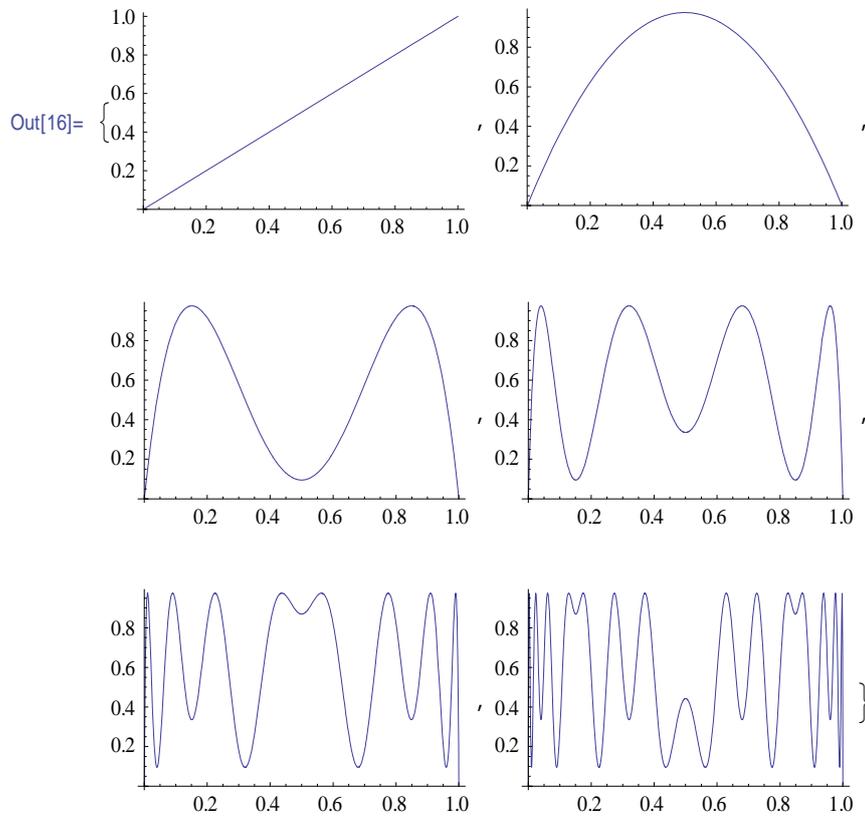
[問 18] いろいろな  $r$  の値に対して、初期値  $x_0$  の値を非常に小さな値だけ変化させ、実験 9 を繰り返せ。ただし、 $0 < r < 4$  とする。

[問 19] 次頁のグラフを解説・実験し、考察 9 や問 18 から得られた結果と一致することを確認せよ。

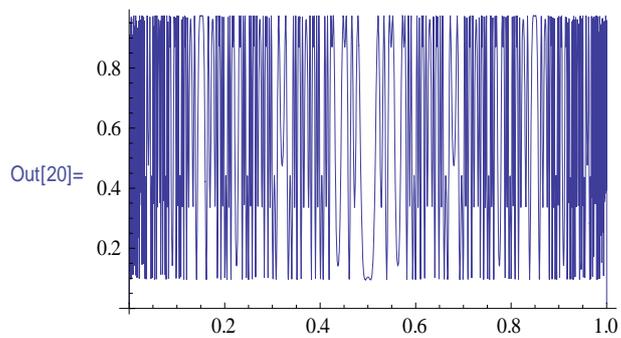
```
In[1]:= f[x_] := r x (1 - x)
```

```
In[15]:= r = 3.9;
```

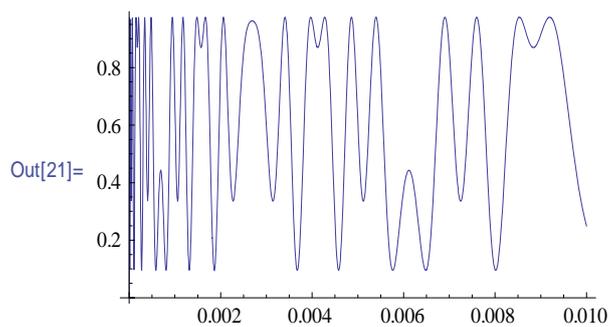
```
Table[Plot[Nest[f, x, n], {x, 0, 1}], {n, 0, 5}]
```



```
In[20]:= Plot[Nest[f, x, 10], {x, 0, 1}]
```



```
In[21]:= Plot[Nest[f, x, 10], {x, 0, 0.01}]
```



## 3 カオス

3.1 ロジスティックモデルの  $r$  の依存性

- これまでの実験や考察によって、ロジスティックモデルの増殖率  $r$  の値によって、個体密度の変化の様子が非常に違ってくることがわかった
- 実は、数理生態学者 R.May の研究によって、次のことがわかっている

## [定理 3]

ロジスティックモデル

$$x_{t+1} = r(1-x_t)x_t \cdots (1.4)$$

において、 $t \rightarrow \infty$  のときの  $\{x_t\}$  の振る舞いは、 $r$  の値によって次のようになる。

(1)  $0 < r \leq 1$  のとき

区間  $[0, 1]$  のどの初期値から出発しても、 $\{x_t\}$  は単調に  $0$  に収束する。

(2)  $1 < r \leq 3$  のとき

区間  $(0, 1)$  のどの初期値から出発しても、 $\{x_t\}$  は不動点  $1 - \frac{1}{r}$  に収束する。

(3)  $3 < r \leq 1 + \sqrt{6}$  ( $\doteq 3.44949$ ) のとき

区間  $(0, 1)$  のどの初期値から出発しても、ある  $t$  から先は周期 2 の軌道になる。

(4)  $1 + \sqrt{6} < r < r_\infty$  のとき ( $r_\infty = 3.569945672 \cdots$  ファイゲンバウム数)

初期値の取り方に関係なく、 $r$  の増加につれてある  $t$  から先は周期 4, 8, 16,  $\cdots$ ,  $2^n$ ,  $\cdots$  の周期軌道が現れる。

(5)  $r_\infty < r < 4$  のとき

初期値の取り方に依存して、あらゆる周期の軌道が現れる。初期値のほんの少しの変動で、軌道が大幅に変化する。

- (1.4)において、

$$x_{t+1} = x_t$$

となる  $x_t$  を **不動点** という。

- $x_{t+p} = x_t$

となる最小の  $p$  のことを **周期** という。

[問 20] ロジスティックモデル(1.4)の不動点を求めよ。

[問 21] 定理 3 が成り立つことを、*Mathematica* で実験することで確かめよ。

### 3.2 カオス

- 初期値  $x_0$  を決めて、ロジスティックモデル

$$x_{t+1} = r(1 - x_t)x_t \cdots (1.4)$$

を次々と適用していけば、確率のように偶然ではなく、決定論的に次々と値は決まる

- ニュートン以来の世界観では、初期値が与えられて物事が決定論的に決まるのであれば、将来は完璧に予想できるとされてきた
- しかし、いままで見てきたように、(1.4) によって決定論的に決まるにもかかわらず、 $r$  の値によっては将来の予想がまったくつかない場合がある
- このような現象をカオスという
- 非常に簡単な規則から、予測のつかない複雑な運動が現われるのである
- もう少し数学的にいうと、

決定論的な非線型法則から生じる、有界で非周期的な不安定運動がカオスとなる

- 1960年代から70年代にかけて、世界各地で数学者、物理学者、生物学者がお互いの関係を知らずに

$$x_{t+1} = f(x_t) \cdots (1.6)$$

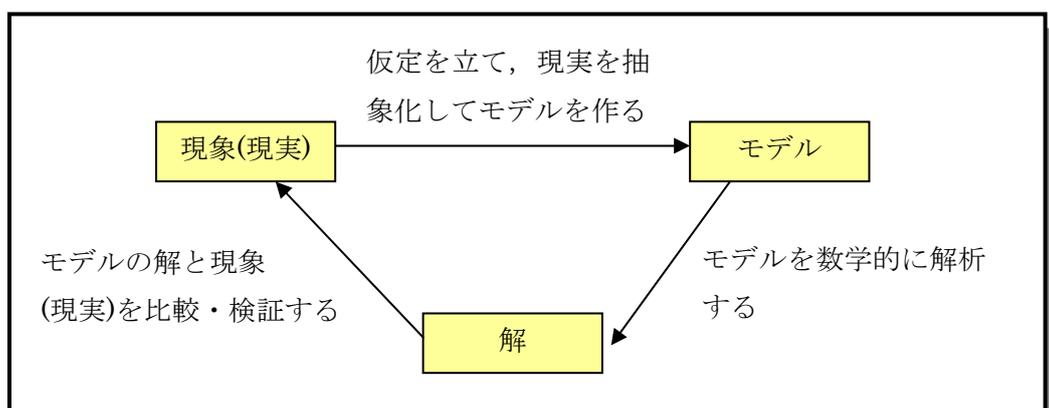
の形の方程式を研究していた

- メイが方程式(1.6)に初めてコンピュータを用いて以来、それぞれの研究に共通したイメージを持つことができたのである
- そして、*Mathematica* を利用すれば、高校生でもカオスを体験できるようになったのである

[Report1] カオスの他の例を探し、レポートを作成せよ。

### 3.3 他のモデル

- ロジスティックモデルで生態系の個体密度の増減を考察する中で、カオスという興味ある寄り道をしてきた
- ロジスティックモデルにも現実と食い違う点があるので、下図に基づいてモデルの再構築を行うべきであるが、それは興味のある人のレポートに任せよう



## 4 カオスとフラクタル(発展)

この節は、May の発見した定理 3 を、*Mathematica* で視覚化して鑑賞する。カオスにより興味を持った人は以下を見て、実験して、楽しみなさい。

## 4.1 カオスの視覚化

■定理 3 によれば、関数

$$f(x) = r(1-x)x \quad \cdots (1.5)$$

をネストさせると、 $r$  の値によって吸い込み不動点や湧き出し不動点、様々な周期の軌道が現れる

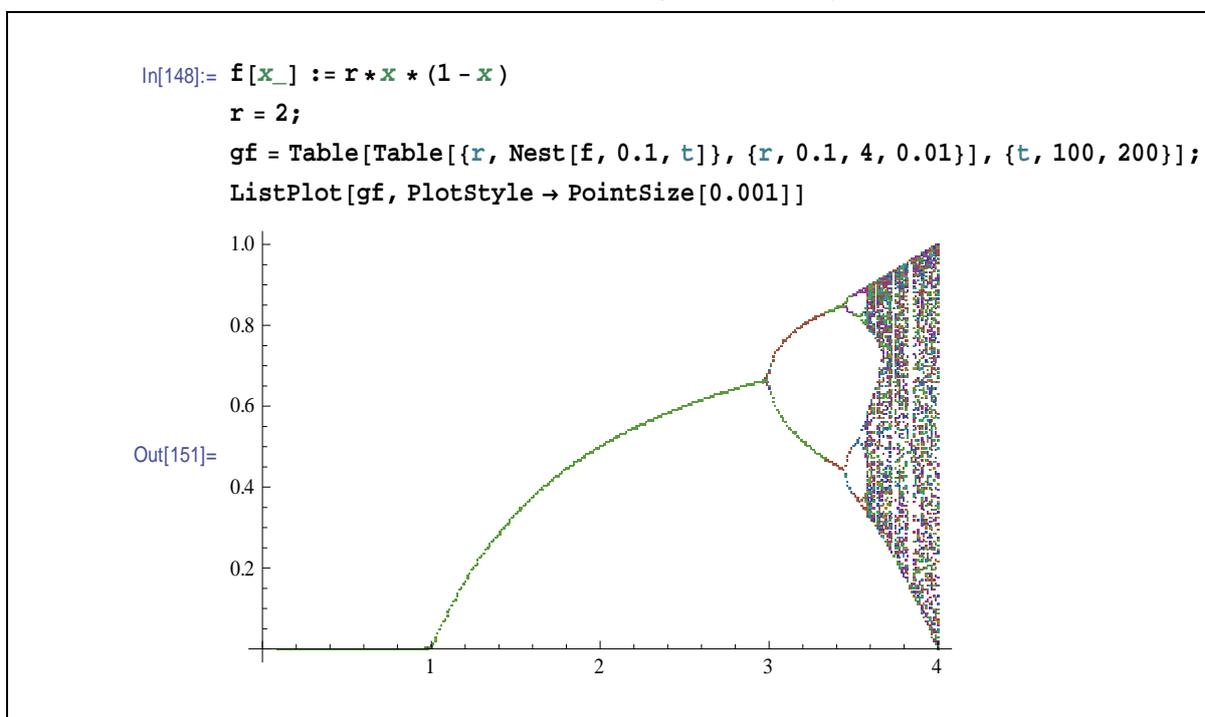
■その周期軌道が、 $r$  の値によってどのように変化するかをグラフ化してみよう(これは有名なグラフである)

■アイデアは、ある  $r$  の値のときに、初期値 0.5 から  $f$  を 150 回ネストさせ、各回で近づいていく値を求める(初期値が他の値でも、本質的には同じである)

■ただし、最後の方の値だけが必要なので、120 回から 150 回までの値だけを求め、それらすべての値を横軸  $r$  の上にプロットし、この操作を、 $r$  の値が  $r_0$  から  $r_1$  までの間で繰り返す

## [実験 10]

以上の考えを *Mathematica* の関数で実現し、実験しよう。



[問 22] 実験 10 の出力図を解説せよ。

[問 23]  $r$  の範囲が次のとき実験 10 を行い、出力される図を鑑賞せよ。

- (1)  $2.9 \leq r \leq 4$       (2)  $3.5 \leq r \leq 3.9$       (3)  $3.83 \leq r \leq 3.86$

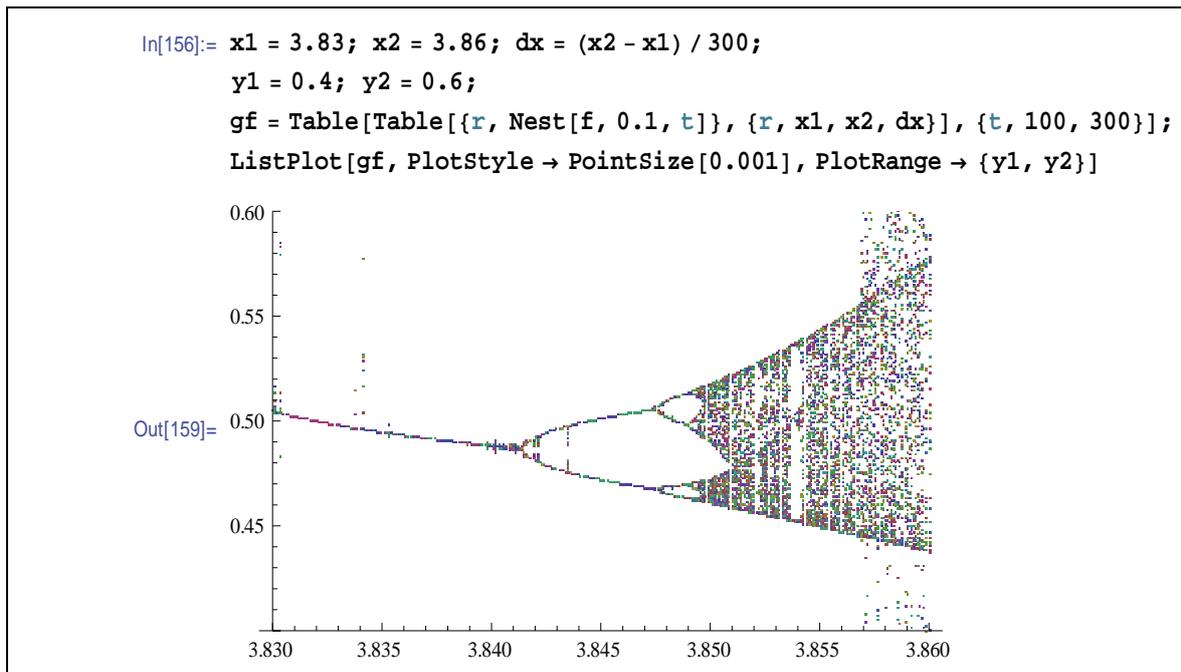
[考察 10] 問 23 の結果からわかること、予想されることを述べよ。

## 4.2 フラクタル

■考察 10 を、*Mathematica* で確認してみよう

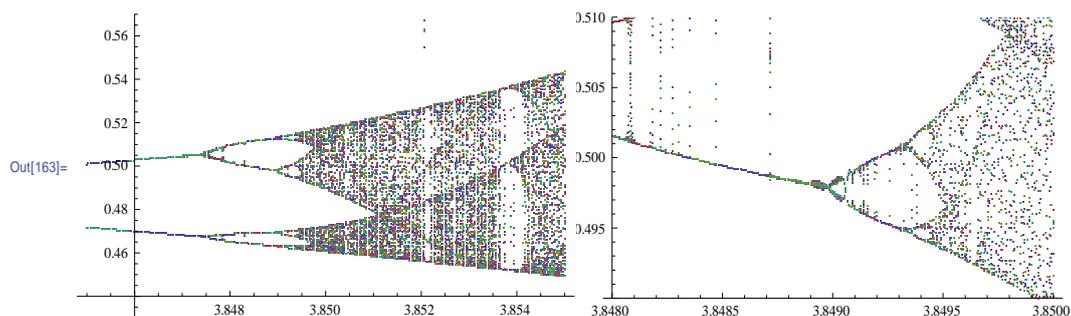
[実験 11]

任意の範囲で拡大できるように実験 10 を改良しよう。



[問 24] 定数  $x_1, x_2, y_1, y_2$  を変えて、自分の興味ある部分を拡大して鑑賞せよ。

- 実験 10 の図と、その図の一部を拡大して見た実験 11 の図とは、そっくりである
- このような、図自身の中にその図と相似な図が含まれているもの、すなわち自己相似性を持っている図形を**フラクタル**という
- コンピュータの発展で研究が進んだカオスとフラクタルだが、カオスの図を拡大していくとフラクタルが現れるという不思議な関係が、*Mathematica* を利用して見る事ができた



## ◇◆Topics◆◇

表紙にある小さな絵は、マンデルブロー集合という有名なフラクタルである。

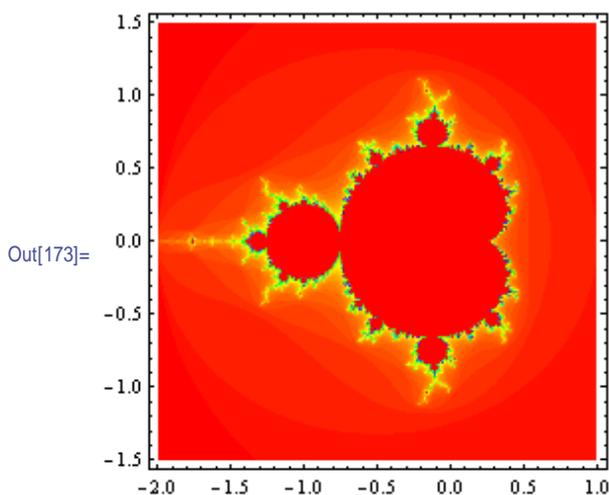
*Mathematica* でも簡単に描くことができるので、興味のある人は挑戦してみよう。

```
In[168]:= speed[c_] := Module[{z, k},  
    z = k = 0.;  
    While[Abs[z] < 2 && k < 100, z = z^2 + c; k++];  
    Return[k]]
```

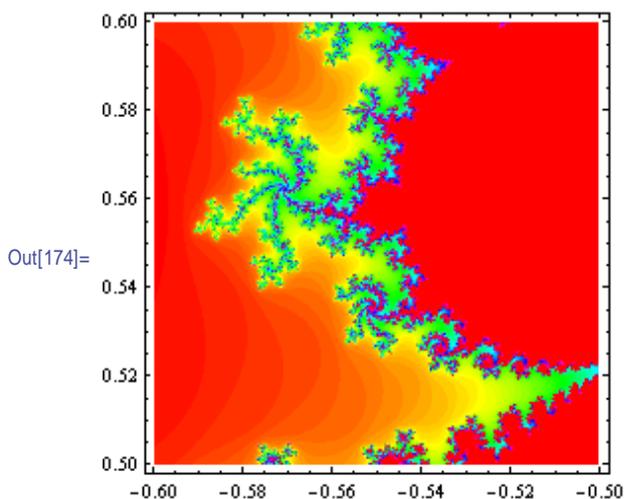
```
In[169]:= speed[0.31 + 0.1 I]
```

```
Out[169]= 100.
```

```
In[173]:= DensityPlot[speed[x + y I], {x, -2, 1}, {y, -1.5, 1.5}, ColorFunction -> Hue,  
    PlotPoints -> 200]
```



```
In[174]:= DensityPlot[speed[x + y I], {x, -0.6, -0.5}, {y, 0.5, 0.6}, ColorFunction -> Hue,  
    PlotPoints -> 200]
```



## 第3章

# 飛行曲線のシミュレーション



## 1 微分法

## 1.1 連続的

生態系を考えたとき、一定時間に同期して一定倍になるのモデルを考えた。このようなモデルを、数学的には**離散的**という。離散的なモデルを考えるときに利用される数学的な知識として、**数列・漸化式・差分方程式**を考えてきた。

それに対して、現実の世界の出来事には、変化していくある瞬間をとらえて考えることで、うまくモデル化できることもある。このようなモデルを、**連続的**という。

ここでは、**微分法**を利用して、連続的なモデルの構築とその解析を行おう。

## 1.2 微分の意味

■まず、定義を確認しておこう

## [定義 1]

関数  $f(x)$  に対して、極限值(瞬間変化率)

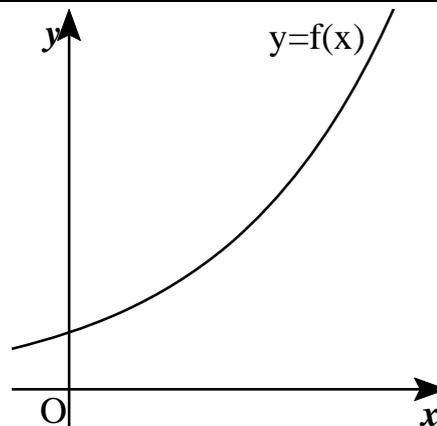
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

が存在するとき、この値を  $f'(a)$  と表し、 $x=a$  における  $f(x)$  の**微分係数**という。

また、このとき  $f(x)$  は  $x=a$  で**微分可能**であるという。

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \dots (*)$$

[問 1] 定義 1 の微分係数の定義式(\*)の図形的な意味を、右図を用いて説明せよ。



■微分係数の現実的な意味について考えよう

[例 1] 数直線上を動いている点 P の、時刻  $t$  のときの位置を  $x(t)$  と表すとき、

平均変化率： $\frac{x(a + \Delta t) - x(a)}{\Delta t}$  は、 $\Delta t$  の間の**平均速度**である

微分係数： $x'(a) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(a + \Delta t) - x(a)}{\Delta t}$  は、 $t=a$  における**(瞬間の)速度**である

## [定義 2]

関数  $f(x)$  の定義域において、極限值

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

が存在するとき、これを  $f'(x)$  と表し、 $f(x)$  の導関数という。また、このとき  $f(x)$  は微分可能であるという。

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

[例 2] 数直線上の動点  $P$  の、時刻  $t$  のときの位置を  $x(t)$  と表すとき、 $x(t)$  の導関数

$$x'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

は点  $P$  の速度であり、これを  $\frac{dx}{dt}$  と表す。

$x'(t) = v(t)$  とおくと、 $v(t)$  の導関数

$$v'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

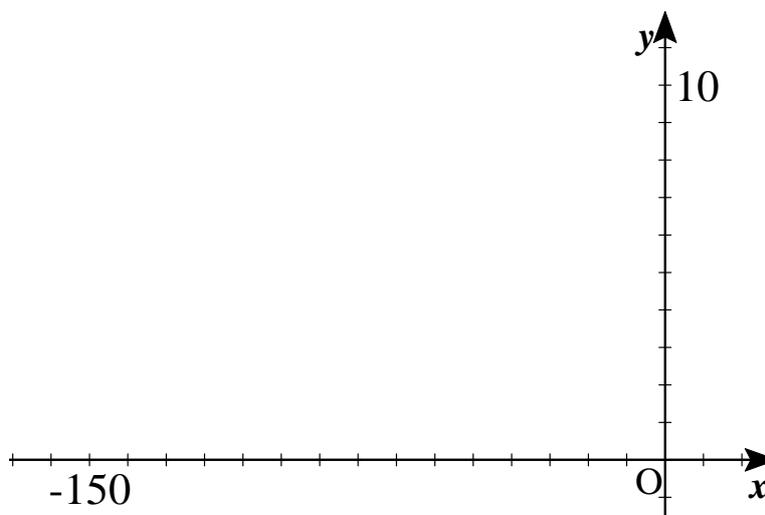
は点  $P$  の加速度であり、これを  $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$  と表す。

## 2 飛行機の着陸

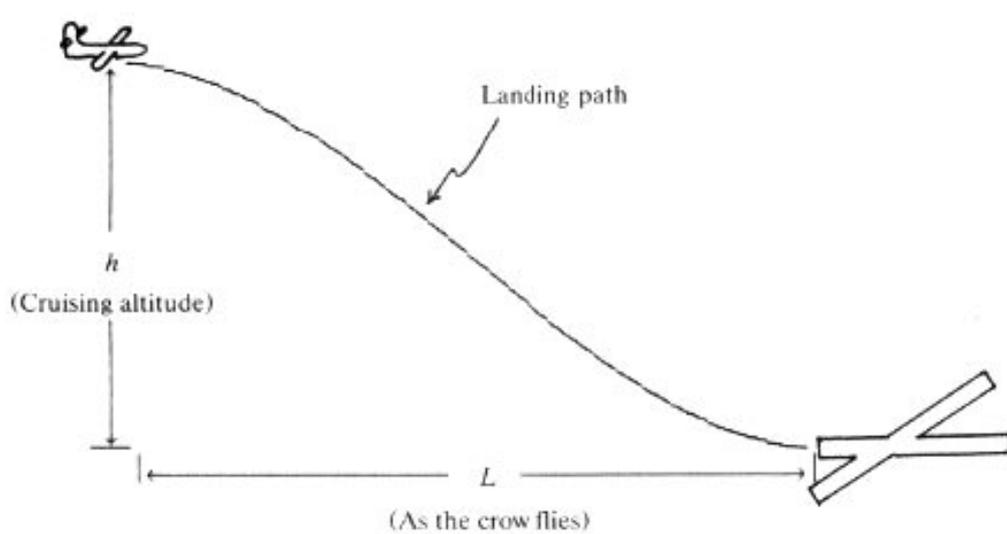
## 2.1 モデル化の第1歩

- これ以降は、飛行機が降下を始めてから着陸するまでの様子を考えよう
- まず、飛行機の着陸のときの飛行状態はどのようなものだろう？

[問 2] 下のグラフ用紙は、原点が高度 0 の飛行場の着陸地点、横軸が着陸地点からの水平距離、縦軸が飛行場からの高度を表す。飛行場から 150km、高度 9km の地点から下降を始める飛行機は、どのような曲線を描いて着陸するかを予想して、グラフ用紙に描き込め。



■実際の降下中の飛行機の一般的な着陸曲線は、下図のようになる



***How Not to Land at Lake Tahoe! Richard Barshinger***

(*The American Mathematical Monthly*, May 1992, Volume 99, Number 5, pp. 453–455.)

■飛行機の着陸曲線を得るために、次の仮定をおく

- [1] 飛行機は、飛行場から水平距離で  $-L(\text{km})$  の地点で降下を始める
- [2] 飛行機は、高度  $h(\text{km})$  の地点で降下を始める(飛行場の高度は  $0$  とする)
- [3] 降下中の飛行機の水平方向の速度は一定で  $v(\text{km}/\text{時})$  とする
- [4] 降下中の飛行機の垂直方向の加速度の絶対値は、ある正数  $k$  を超えないとする

- 仮定[3]は非現実的であるようだが、簡単にするために、まずはこの仮定を進める
- 仮定[4]は、 $k$  の値を小さくすることで、極端な減速・加速を避けることができ、乗り心地をよくすることができる
- この仮定の下で着陸曲線  $y(x)$  を決定するのだが、できるだけ簡単な曲線で決定したいので、整関数を考えよう

[考察1] 定数関数や1次関数が、着陸曲線をモデル化するのに適していない理由を述べよ。

[問3] 着陸曲線  $y(x)$  が、 $x=-L$  と  $x=0$  で満たしていなければならない条件を言葉で述べ、それを微分を使った式で表せ。

[考察2] 2次関数が、着陸曲線を記述するのに適していない理由を述べよ。

## 2.2 モデルの決定とその解

■問3, 考察1,2で, 整関数のうち2次関数までは着陸曲線の表現には適していないことがわかった

■そこで, 飛行曲線  $y(x)$  を3次曲線でモデル化するために,

$$y(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

とおく

■先においた仮定を,  $y(x)$  の条件として表すと, 次のようになる

(1)  $y(0) =$

(2)  $y'(0) =$

(3)  $y(-L) =$

(4)  $y'(-L) =$

[問4] 条件(1)~(4)を利用して, 3次関数  $y(x)$  を  $L, h$  を用いて表せ。

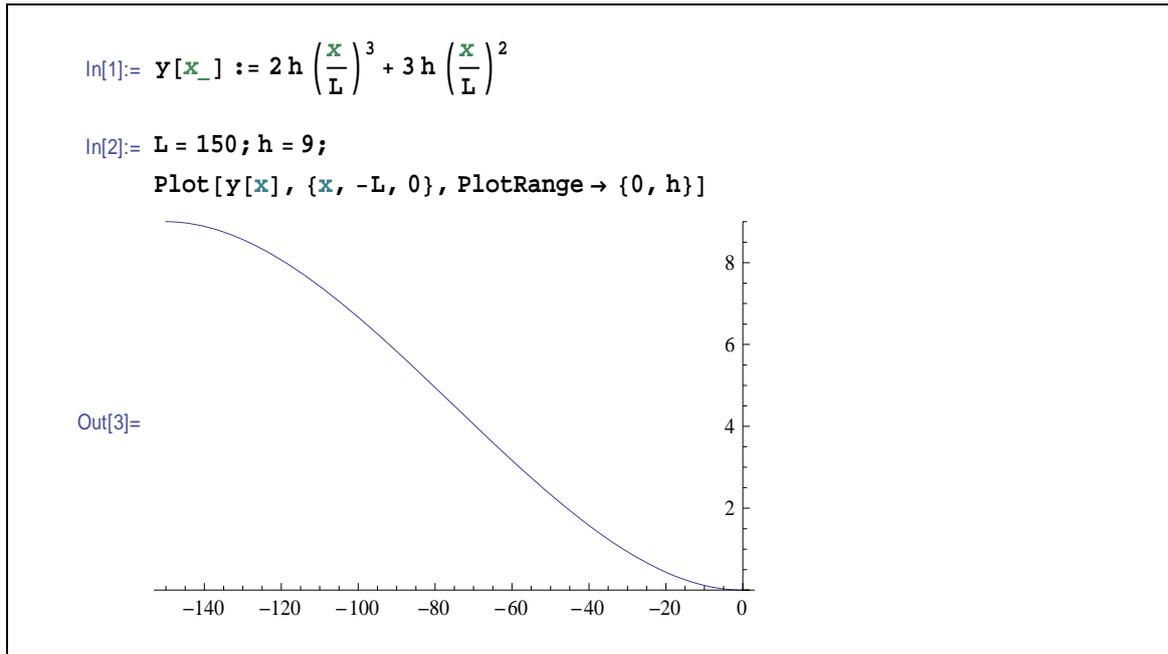
■問4で求めた着陸曲線は、下のようになった

$$y(x) = 2h\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 3h\left(\frac{x}{L}\right)^2 \cdots (2.1)$$

■(2.1)が着陸曲線に近いかどうかを、*Mathematica*で検証してみよう

[実験1]

モデルの3次曲線(2.1)において、L, hに具体的な値を与えて、*Mathematica*で描いてみよう。



[問5] 実験1において、L, hの値を適当に変えて実験を続けよ。

[考察3] 実験1および問5の結果から、着陸曲線のモデル(2.1)について考察せよ。

[考察4] ここまでの着陸曲線のモデルの議論において、足りない部分について述べよ。

- 着陸曲線(2.1)は、高さを飛行場からの水平距離  $x$  の関数として表されていて、速度に関しては何も現れてこない
- そこで時間を  $t$  として、最初の仮定[3]の水平速度が一定  $v(\text{km/時})$ であることを利用して考察を進めよう

[問 6] 仮定[3]の水平速度が一定  $v(\text{km/時})$ であることを、数学的に表せ。

- まず、合成関数の微分法を確認しておこう

**[定理 1]**

微分可能な関数  $y=f(x)$ ,  $x=g(t)$ を考える。合成関数  $y=f(g(t))$ の導関数は、

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

(証明)

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$\Delta t \rightarrow 0$  のとき、 $\Delta x \rightarrow 0$  であるから、

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

(証明終わり)

[問 7] (1) 垂直方向の速度  $v_y = \frac{dy}{dt}$  を求めよ。

(2) 垂直方向の加速度  $\alpha_y = \frac{dv_y}{dt}$  を求めよ。

■いま考えているモデルでの垂直方向の速度  $v_y$  と加速度  $\alpha_y$  は、次のようになった

$$v_y = \frac{6vh}{L} \left\{ \left( \frac{x}{L} \right)^2 + \frac{x}{L} \right\}, \quad \alpha_y = \frac{6v^2h}{L^2} \left( \frac{2x}{L} + 1 \right)$$

[問 8] 垂直方向の加速度  $\alpha_y$  のグラフを描き、閉区間  $[-L, 0]$  における最大値と最小値を求めよ。そして、 $|\alpha_y| \leq \frac{6v^2h}{L^2}$  であることを示せ。

■問 8 の結果から、仮定[4]における正数  $k$  は、 $\frac{6v^2h}{L^2} \leq k$  であることが必要となる

■さて、いま考えているモデルでこの条件、つまり降下の始めと着陸のときに、胃がひっくり返るような加速・減速は避けるという条件は満たしているだろうか？ そのためには、少なくとも、重力加速度(自由落下のときの加速度)  $9.8\text{m/s}^2$  よりはずっと小さくなくては困る

[実験 2]

いま考えているモデルの垂直方向の加速度  $\alpha_y$  の最大値を、 $L$ ,  $h$ ,  $v$  に具体的な値を与えて *Mathematica* で計算してみよう。

```
In[4]:= Clear[L, h]

In[5]:=  $\alpha_{\max} = \frac{6 v^2 h}{L^2}$ 

Out[5]=  $\frac{6 h v^2}{L^2}$ 

In[6]:= L = 150. * 1000; h = 9. * 1000; v = 560. * 1000 / 60 / 60;

In[7]:=  $\alpha_{\max}$ 

Out[7]= 0.0580741
```

※通常の条件下では平均的に、着陸地点より 150km、高度 9km の地点から降下を始めるようである。そして、このモデルでは水平方向の速度を 560km/時としている。

[考察 5] 実験 2 の命令および結果を解釈せよ。さらに、 $L$ ,  $h$ ,  $v$  の値を変えながら実験 2 を行い、垂直方向の加速度  $\alpha_y$  のようすを考察せよ。

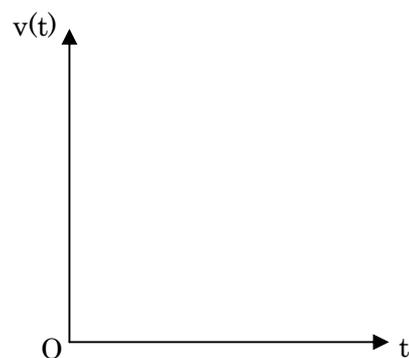
## 2.3 モデルの改良とその解

- これまでは、降下中の飛行機の水平方向の速度は一定であると仮定してモデル化を行ったが、現実にはパイロットは、着陸地点に近づくと速度を落とさなければならない
- そこで、水平方向の飛行機の速度  $v(t)$  は線型的(1次関数的)に変化すると仮定する(モデル化するときの基本は、単純さである)
- ただし、飛行曲線は前と同じく 3次曲線であると仮定する。すなわち、着陸地点から  $x$  のときの高度を  $y(x)$  とすると、

$$y(x) = 2h\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 3h\left(\frac{x}{L}\right)^2 \cdots (2.1)$$

- 着陸するときの最初の水平速度を  $v_0$ 、着陸の瞬間の水平速度を  $v_1$  とし、水平方向の飛行機の速度  $v(t)$  は線型的(1次関数的)に変化するとき、着陸開始から着陸までにかかる時間を  $T$  とする  $\cdots (2.2)$

[問 9] 上記の条件(2.2)を満たすような、水平方向の飛行機の速度  $v(t)$  を表す 1 次関数の概形を描き、 $v(t)$  を表す式を求めよ。



[考察 6] 問 9 で求めた水平方向の速度  $v(t)$  から、水平方向の加速度  $a(t)$  を求めよ。また、加速度  $a(t)$  の特徴を述べよ。

- 仮定(2.2)から得られた水平方向の速度

$$v(t) = v_0 - \frac{v_0 - v_1}{T}t \cdots (2.3)$$

は、時間  $t$  とともに刻々と変化する

[問 10] このように、速度が一定ではないときに、時間  $t$  のときの飛行場からの水平方向の位置を表す関数  $x(t)$  は、どのようにして求めればよいか。

■右図のように、区間  $0 \leq \tau \leq t$  を  $n$  等分し、

$$\frac{t}{n} = \Delta \tau, \quad k \Delta \tau = \tau_k$$

$$(k=0, 1, 2, \dots, n-1)$$

とおき、 $\tau_k \leq \tau \leq \tau_{k+1}$  の間の位置の変化を考える

■この間に速度  $v(\tau)$  は変化しているが、 $\Delta \tau$  は微小なので一定速度  $v(\tau_k)$  で進んだと考えると、その間の位置の変化は、

$$v(\tau_k) \Delta \tau$$

であり、図形的には図 1 の微小長方形の面積を表している

■このような微小長方形を  $k=0, 1, 2, \dots, n-1$  について考えると、それらすべての和

$$\sum_{k=0}^{n-1} v(\tau_k) \Delta \tau$$

は、位置の変化の近似値を表し、図形的には図 2 の階段状の面積を表す

■ここで、 $n$  を限りなく大きくする ( $n \rightarrow \infty$ ) と、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} v(\tau_k) \Delta \tau$$

は限りなく位置の変化量に近づき、図形的には図 3 の斜線部の面積を表す

[問 11] 図 3 に斜線を描きいれよ。

■すなわち、区間  $0 \leq \tau \leq t$  での位置の変化量は、

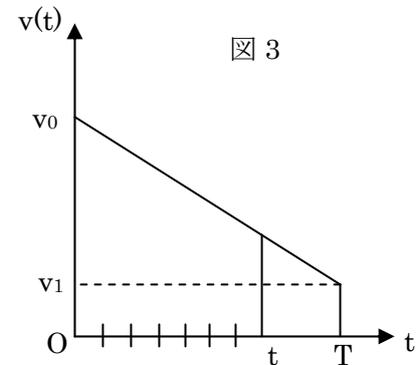
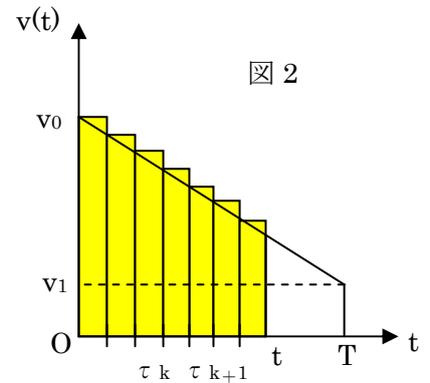
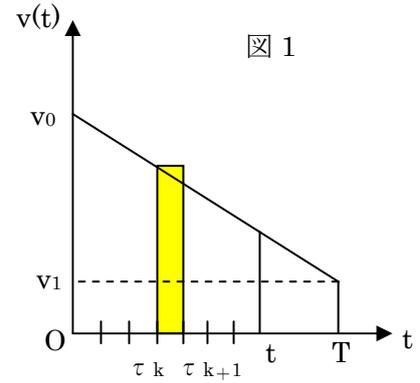
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} v(\tau_k) \Delta \tau = \int_0^t v(\tau) d\tau$$

となる

■飛行機は、着陸体制に入る時点で  $x(0)$  の位置にいたので、時刻  $t$  のときの飛行機の位置は、

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t v(\tau) d\tau \\ &= -L + \int_0^t \left( v_0 - \frac{v_0 - v_1}{T} \tau \right) d\tau \end{aligned}$$

[問 12] 上の計算の続きを行い、 $x(t)$  を求めよ。



■問 12 の結果から,

$$x(t) = -L + v_0 t + \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0 - v_1}{T} t^2 \quad \dots(2.3)$$

となることがわかった

[問 13] (1)  $x(T)$  の値を求めよ。

(2)  $T$  を  $v_0, v_1, L$  の式で表せ。

(3)  $x(t)$  を  $v_0, v_1, L, t$  の式で表せ。

■着陸地点から  $x$  km のときの高度  $y(x)$  km は,

$$y(x) = 2h \left( \frac{x}{L} \right)^3 + 3h \left( \frac{x}{L} \right)^2 \quad \dots(2.1)$$

であったが, いま  $x$  が時刻  $t$  の関数として

$$x(t) = -L + v_0 t + \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0 - v_1}{T} t^2 \quad \dots(2.3)$$

と表せたので, (2.1) も合成関数を考えることで時刻  $t$  の関数として,

$$z(t) = y(x(t)) = 2h \cdot \frac{\left( -L + v_0 t - \frac{v_0^2 - v_1^2}{4L} t^2 \right)^3}{L^3} + 3h \cdot \frac{\left( -L + v_0 t - \frac{v_0^2 - v_1^2}{4L} t^2 \right)^2}{L^2} \quad \dots(2.4)$$

と表せる

■これで, 飛行曲線および垂直方向の加速度を時刻  $t$  の関数として考えることができるが, 関数  $z(t)$  はとても複雑で,  $z(t)$  のグラフを手で描く, あるいは加速度を手計算するのは苦しいので, *Mathematica* の出番だ

[実験 3]

関数  $x(t), y(x), z(t)$  を定義し,  $v_0, v_1, L, h$  に具体的な値を与えて *Mathematica* で飛行曲線  $z(t)$  を描き, 加速度  $z''(t)$  を計算してみよう。

```
In[8]:= Clear[L, h, x, v0, v1]
```

```
In[9]:= x[t_] := -L + v0 t - (v0^2 - v1^2)/(4 L) t^2
```

```
In[10]:= y[x_] := 2 h (x/L)^3 + 3 h (x/L)^2
```

```
In[11]:= z[t_] := y[x[t]]
```

```
In[12]:= z[t]
```

```
Out[12]= (3 h (-L + t v0 - (v0^2 - v1^2)/(4 L) t^2)^2)/L^2 + (2 h (-L + t v0 - (v0^2 - v1^2)/(4 L) t^2)^3)/L^3
```

In[13]:=  $z''[t]$

$$\text{Out[13]} = \frac{6 h \left( v_0 - \frac{t (v_0^2 - v_1^2)}{2L} \right)^2}{L^2} - \frac{3 h (v_0^2 - v_1^2) \left( -L + t v_0 - \frac{t^2 (v_0^2 - v_1^2)}{4L} \right)}{L^3} +$$

$$\frac{12 h \left( v_0 - \frac{t (v_0^2 - v_1^2)}{2L} \right)^2 \left( -L + t v_0 - \frac{t^2 (v_0^2 - v_1^2)}{4L} \right)}{L^3} -$$

$$\frac{3 h (v_0^2 - v_1^2) \left( -L + t v_0 - \frac{t^2 (v_0^2 - v_1^2)}{4L} \right)^2}{L^4}$$

In[14]:=  $L = 150.; h = 9; v_0 = 560.; v_1 = 240.;$

In[15]:=  $z[t]$

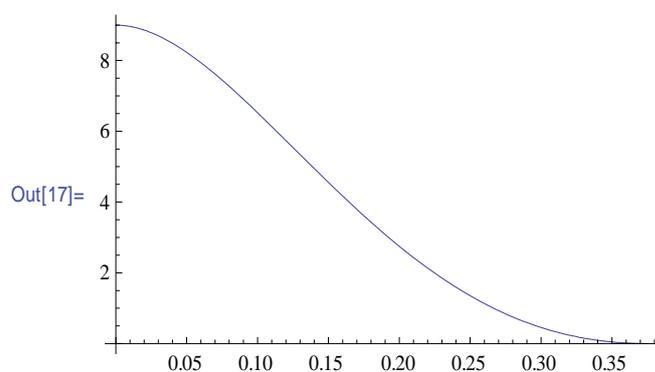
$$\text{Out[15]} = 0.0012 \left( -150. + 560. t - 426.667 t^2 \right)^2 +$$

$$5.33333 \times 10^{-6} \left( -150. + 560. t - 426.667 t^2 \right)^3$$

In[16]:= **Expand [%]**

$$\text{Out[16]} = 9. + 0. t - 376.32 t^2 + 1510.06 t^3 - 2359.3 t^4 + 1631.12 t^5 - 414.252 t^6$$

In[17]:= **Plot**  $\left[ z[t], \{t, 0, \frac{2L}{v_0 + v_1}\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All} \right]$



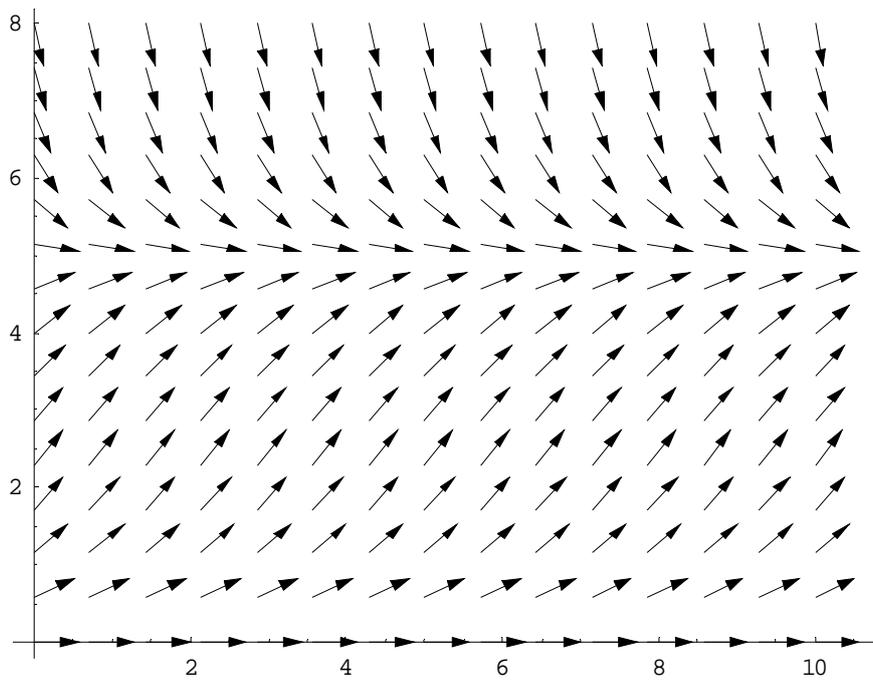
[問 14] 実験 3 の命令および結果を解読せよ。さらに、 $v_0$ ,  $v_1$ ,  $L$ ,  $h$  の値を変えながら実験 3 を行え。

[問 15]  $L=150$ ,  $h=9$ ,  $v_0=560$ ,  $v_1=240$  とする。

- (1) 加速度  $z''(t)$  を求め、そのグラフを描け。
- (2) 得られたグラフを選択して、[Ctrl] キーを押しながらカーソルを動かして、Window の左下の座標を読むことで、加速度の最大値、最小値を求めよ。
- (3) 加速度  $z''(t)$  の様子から、着陸の快適さについて考察せよ。

## 第 4 章

### 過去と未来を見通そう



## 1 微分方程式

## 1.1 マルサスの人口増加のモデル化

第2章で、生物の個体数の増減を考えた。その際、生物は一定時間間隔に同期して分裂して増えると仮定した。つまり、時間を離散的に考えて、漸化式(差分方程式)で増減の様子を記述してモデル化し、解析したのである。

しかし、世の中では時間に関して連続的に考えなければならないものがある。例えば、個体数が増減する場合に、世代が重なって滑らかに変化するとみなせる場合などである。

ここでは、そのような連続的な変化を考えていこう。

■イギリスの経済学者マルサス(1766~1834)は、著書『人口論』において、人口増加を次のようにモデル化した

■時刻  $t$  における人口を  $y=y(t)$  とすると、微小時間  $\Delta t$  における出生数と死亡数は、ともに人口の大きさと微小時間に比例するだろう、すなわち、 $\alpha$ 、 $\beta$  を定数として、

$$\text{出生数} = \alpha y \Delta t$$

$$\text{死亡数} = \beta y \Delta t$$

と表せる

■よって、微小時間  $\Delta t$  における人口増加  $\Delta y$  は、

$$\Delta y = \alpha y \Delta t - \beta y \Delta t = (\alpha - \beta)y \Delta t$$

ここで、

$$\alpha - \beta = \gamma$$

とおくと、

$$\Delta y = \gamma y \Delta t \quad (\gamma \text{ は定数})$$

すなわち、

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \gamma y$$

ここで、 $\Delta t \rightarrow 0$  とすると、微分の定義より、

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}$$

であるから、

$$\frac{dy}{dt} = \gamma y \quad \cdots(1.1)$$

を得る

■(1.1)はマルサスの人口増加のモデル化を表した方程式であり、連続的な時間で考えている

■一般に、方程式(1.1)のように未知の関数  $y$  とその導関数  $\frac{dy}{dt}$  を含む方程式を、**微分方程式**

という

## 1.2 微分方程式の意味

## ■微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = \gamma y \quad \cdots(1.1)$$

の左辺  $\frac{dy}{dt}$  は、人口  $y$  の変化率であり、ある瞬間の人口の変化の様子を表している

■第2章でも学習したように、変化率  $\frac{dy}{dt}$  は図形的には、曲線  $y=y(t)$  の接線の傾きを表している

■(1.1)において、 $\gamma=0.5$  とすると、

$$\frac{dy}{dt} = 0.5y \quad \cdots(1.2)$$

$$y=1 \text{ のとき, } \frac{dy}{dt} = 0.5$$

$$y=2 \text{ のとき, } \frac{dy}{dt} = 1$$

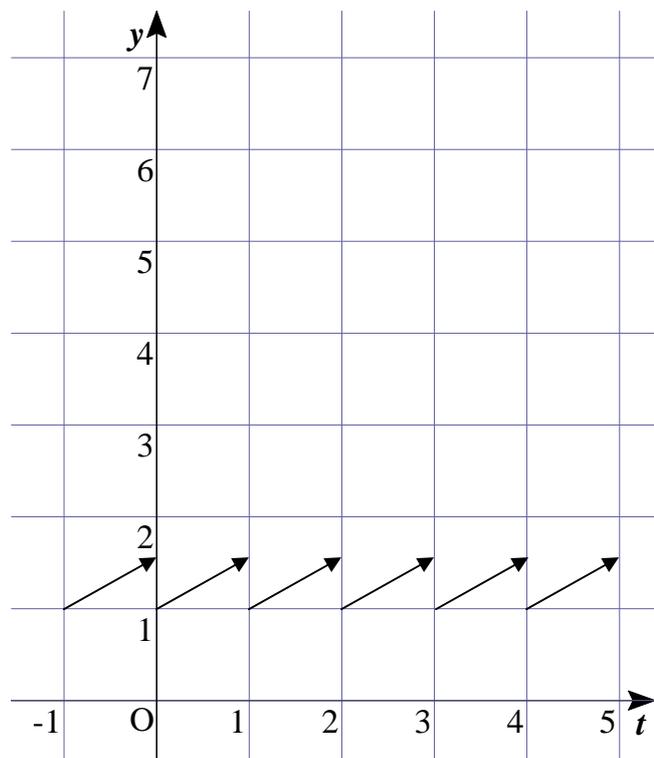
$$y=3 \text{ のとき, } \frac{dy}{dt} =$$

$$y=4 \text{ のとき, } \frac{dy}{dt} =$$

$$y=5 \text{ のとき, } \frac{dy}{dt} =$$

[問1] 上記の  $\frac{dy}{dt}$  の値をもとに、 $y=1$  のときの例にならってベクトル  $\left(1, \frac{dy}{dt}\right)$  を右のグラフ用紙に描き込め。

[問2] 右図のベクトル  $\left(1, \frac{dy}{dt}\right)$  をじつと眺めると、どのような曲線が見えてくるか。



■  $\frac{dy}{dt}$  は瞬間の変化の様子を表していて、図形的には接線の傾きを表すので、ベクトル

$\left(1, \frac{dy}{dt}\right)$  を短い矢印で図示したものは、その瞬間、瞬間の変化の向きを表している

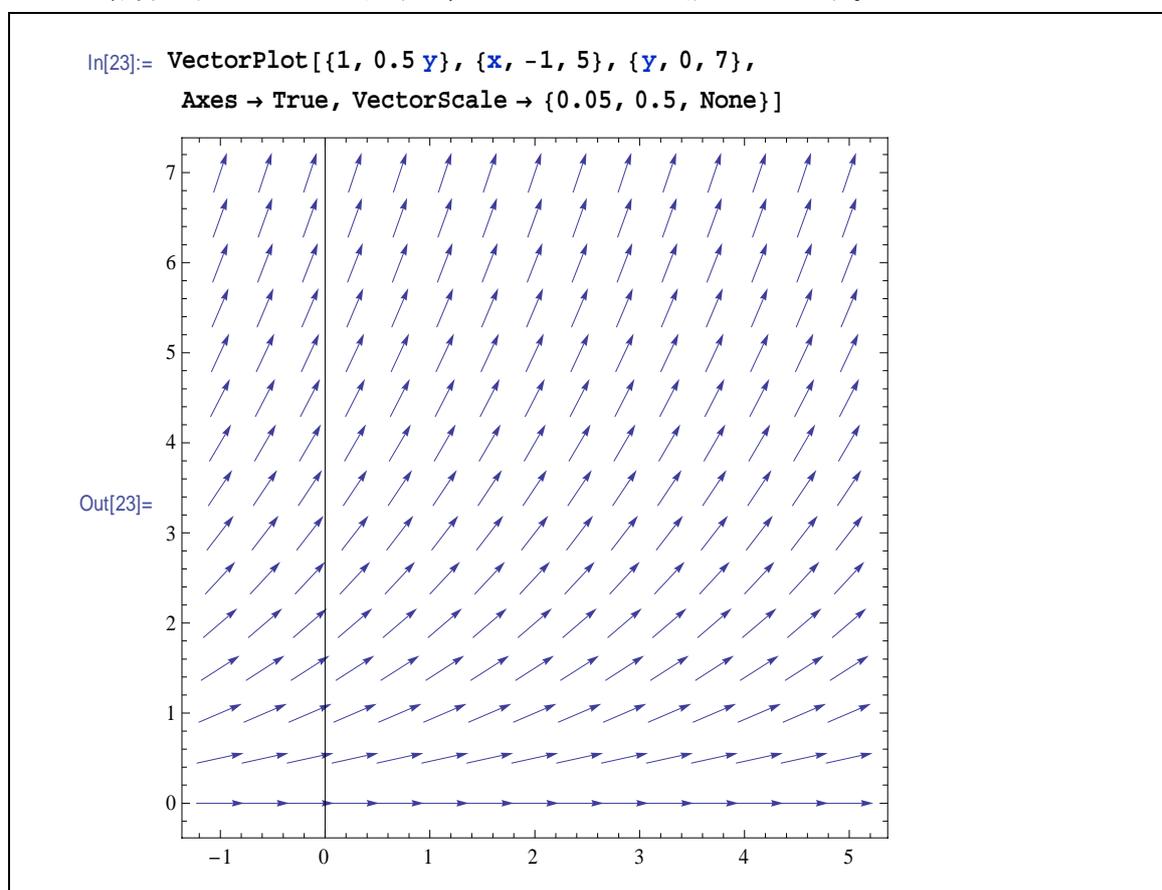
■ このように、 $\frac{dy}{dt}$  の変化の様子を短い線分で表したものを、微分方程式(1.1)の方向場と

いう

■ 方向場のベクトルを流れとして捉えてずーっとつないでいくと、ベクトルを接線として持つ曲線群が浮かび上がってくるが、この曲線を微分方程式(1.1)の解曲線という

[実験 1]

微分方程式(1.2)の方向場を、*Mathematica* で描いてみよう。



[問 3] 実験 1 の方向場に、微分方程式  $\frac{dy}{dt} = 0.5y$  …(1.2) の解曲線を描き込め。

■方向場を見ればわかるように、微分方程式(1.2)の解曲線は何本もある

■しかし、例えば、

$$t=0 \text{ のとき, } y=1.5 \quad \cdots(1.3)$$

という条件を満たす解曲線は、ただ 1 本に決まる

■この条件(1.3)のことを、**初期条件**という

[問 4] 微分方程式  $\frac{dy}{dt} = \gamma y \quad \cdots(1.1)$  について、

- (1)  $\gamma$  の値をいろいろと変えて、実験 1 と同様にして *Mathematica* で方向場を描け。
- (2) (1)の方向場を見て、微分方程式(1.1)の解曲線を表す関数を予想せよ。

■微分方程式の解曲線を表す関数を、微分方程式の**解**という

■微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = \gamma y \quad \cdots(1.1)$$

の意味するところをまとめる

■(1.1)の左辺は変化率なので、微分方程式(1.1)は

**局所的な(瞬間の)情報を与える**

ものである

■その**局所的な情報を図示したものが、方向場**である

■次に、方向場のベクトルをつないでいくと、解曲線という曲線群が見えてくる

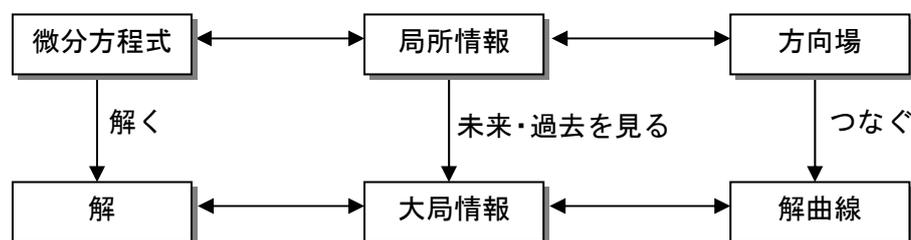
■つまり、

**局所的な情報である方向場を足し合わせると**

**大局的な情報である曲線群が得られる**

ことがわかる

■この**解曲線をたどると、過去や未来が見えてくる**のである



## 2 ランチェスターの 2 次法則

### 2.1 戦闘のモデル化

- 微分方程式の別の例として、X 軍と Y 軍の近代的戦闘のモデル化を考えよう(戦闘を考えるのはわかりやすいからであり、戦争が好きだからではない、念のために)
- 昔の戦闘は局地戦であり、剣と剣、弓矢と盾などの武器を使っての一騎打ちで行われた
- 一騎打ちでは、武器の性能や兵士の資質が同じである場合には、兵士の数を敵より一人でも多くするほうが勝利を得ることはほとんど明らかだろう
- しかし、近代戦では武器の主力が火器(小銃、マシンガン、大砲など)になったので、戦闘は集団的・確率的になった
- すなわち、近代戦では特定の兵士が狙われるのではなく、まったくランダムに各兵士が狙われると考える
- 次の具体例でモデル化を行おう
  - [1] 最初の兵士の数は X 軍 30 万人, Y 軍 10 万人
  - [2] 銃の性能は、Y 軍のほうが X 軍のものより 3 倍良い
  - [3] 集団的・確率的な近代戦が行われる

[考察 1] X 軍, Y 軍のどちらが勝利するかを予想し, その根拠を述べよ。

- 時刻  $t$  における X 軍, Y 軍の生存者数をそれぞれ  $x$  人,  $y$  人, 微小時間  $\Delta t$  における X 軍, Y 軍の戦死者数をそれぞれ  $\Delta x$  人,  $\Delta y$  人とする, 仮定の [3] より, Y 軍の戦死者数は X 軍の生存者数と微小時間に比例すると考えられるので,  $k$  を定数として,

$$\Delta y = -kx \Delta t \quad \cdots (2.1)$$

となる。

[問 5] (1) モデル [2] に注意して, X 軍の戦死者数  $\Delta x$  を (2.1) と同様の式で表せ。

(2)  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  を  $x, y$  の式で表せ。

(3)  $\Delta t \rightarrow 0$  のとき,  $\Delta x \rightarrow 0$  であることから, このモデルの微分方程式を求めよ。

## 2.2 ランチェスターの 2 次法則

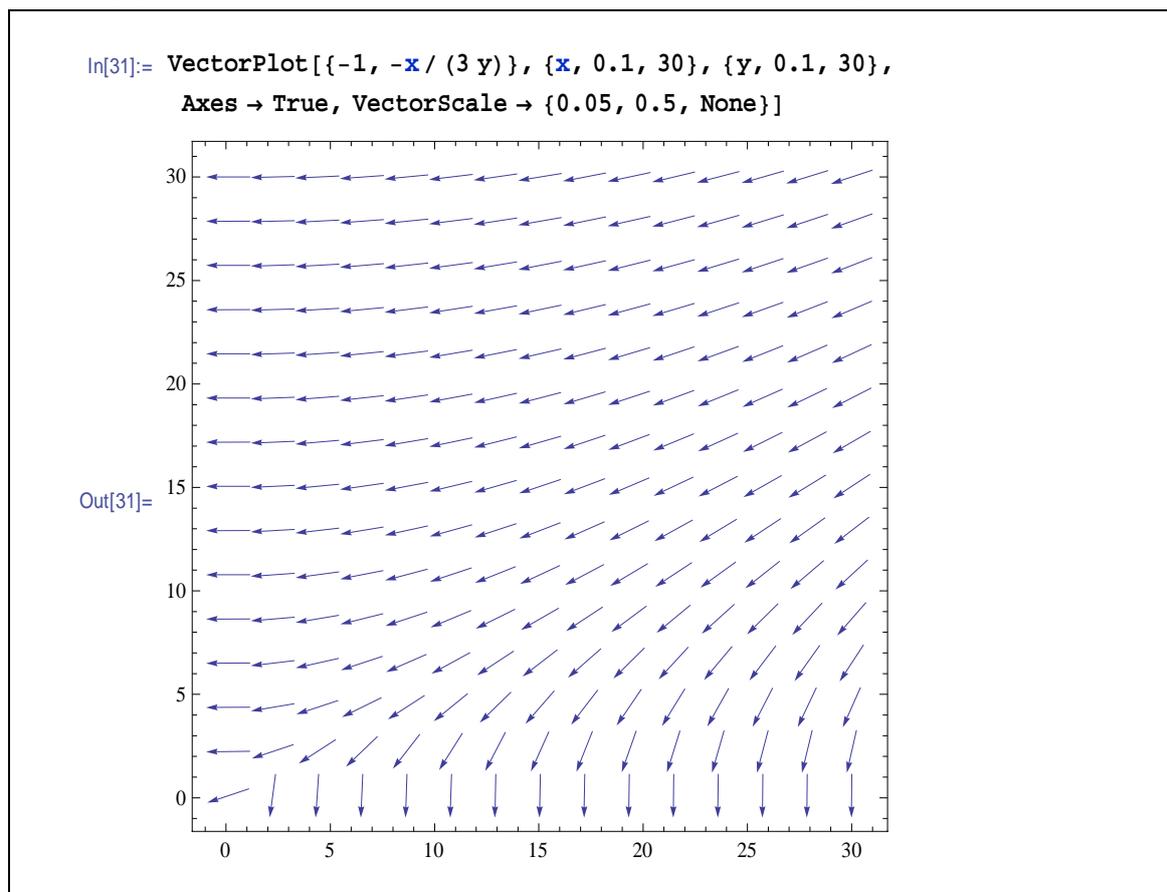
■2.1 で考えたモデル化の微分方程式は、次のようになった

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{3y} \dots (2.2)$$

■X 軍と Y 軍の戦いの結果がどのようなになるかは、1.2 における実験 1 と同様に、微分方程式(2.2)の方向場を考えればわかるだろう

## [実験 2]

微分方程式(2.2)の方向場を、*Mathematica* で描いてみよう。



[問 6] 実験 2 を解説せよ。

[問 7] (1) 実験 2 の方向場の中で、初期条件  $t=0$  のとき  $x=30$ ,  $y=10$  を満たす方向場を見つけよ。

- (2) (1)の方向場をたどることにより、どちらが勝利をおさめたかを述べ、そのときに生存している兵士の人数を求めよ。
- (3) (2)の結果から、自分の予想とどのような違いがあったかを考察せよ。

[考察 2] 微分方程式(2.2)で表されるモデルにおいて、初期条件によって勝敗の結果がどのように変わるかを、実験 2 の方向場を利用して考察せよ。

[問 8] (1) 微分方程式(2.2)を得たときのモデル化の仮定

[2] 銃の性能は、Y 軍のほうが X 軍のものより 3 倍良い  
を変更することで新たなモデル化を行い、微分方程式を求めよ。

(2) (1)で得られた微分方程式の方向場を考えて、勝敗の結果について考察せよ。

■以上のようなモデルを考えたのは、イギリスの航空工学のエンジニアであったランチェスター(1868~1946)である

■これまでの例から、近似的に

$$\text{戦闘力} = \text{武器の性能} \times (\text{兵士の人数})^2$$

と考えられ、これはランチェスターの 2 次法則とよばれる

■ランチェスターの 2 次法則は、現代のオペレーションズ・リサーチ(OR)のはじまりとして高く評価されていて、競合する 2 つの企業のマーケティング戦略にも利用されている

### 2.3 補足

■ランチェスターの 2 次法則の一般的な形は、次のようになる

$$\Delta y = -\alpha x \Delta t, \quad \Delta x = -\beta y \Delta t$$

より, 
$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = -\alpha x, \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} = -\beta y$$

$\Delta t \rightarrow 0$  として,

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha x, \quad \frac{dx}{dt} = -\beta y \cdots (2.3)$$

この(2.3)を微分方程式系という

■ランチェスターの 2 次法則の教えるところは、兵士の数の優位が何にもまして勝敗に決定的な影響力を持つということである

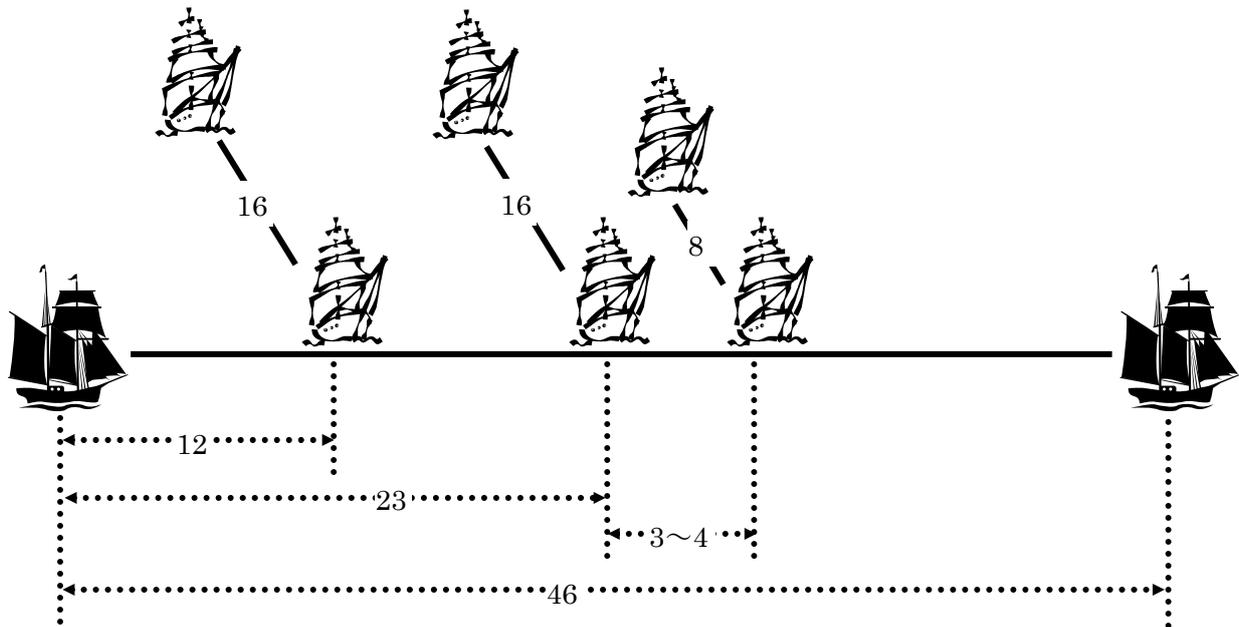
■では、いつも人数が多い方、強い方が必ず勝つということかという、そうではない

■ランチェスターの 2 次法則結果を逆に使えば、弱い方や人数の少ない方にも勝つ見込みがある、つまり、局地戦に持ち込むことや一点集中が、戦略として有効となる

[例] イギリスのネルソン提督の、トラファルガー海戦(1805 年)における作戦メモ

イギリス軍 : 40 隻

フランス・スペイン連合軍 : 46 隻



仮に、両軍の海戦技術が等しいとする。

戦闘力は戦艦数の 2 乗に比例するから、両軍の戦闘力の比は、

となり、イギリス海軍は連合軍の実質的には約          倍の戦力で戦えると考えてよい。

実際には、イギリス軍 27 隻と連合軍 33 隻とが戦って、ネルソン提督の考えた上記の戦略どおりに戦い、イギリス軍が勝利をおさめたのである。

■ランチェスターの 2 次法則とは関係ないけれど、次の課題を考えてみよう

[課題] 100 発 100 中の大砲 1 門を持つ X 軍と、100 発 1 中の大砲 100 門を持つ Y 軍が、お互いに相手の大砲を狙って同時に何回も砲弾を発射する。結果がどのようなかを予想し、その予想が正しいかどうかを確率を利用して考察せよ。

## 3 微分方程式を解く

## 3.1 積分で解く

■微分方程式  $\frac{dy}{dt} = 0.5y \cdots (1.2)$  の解を数学的にきちんと求めるために、まずは置換積分の公式を確認しよう

[定理 1]

$y = \int f(x)dx$  において、 $x = g(t)$  のとき、

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

左辺と右辺を入れ替えて書き直すと、 $\int f(x) \frac{dx}{dt} dt = \int f(x)dx$

(証明)

合成関数の微分法より、

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = f(x)g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

よって、 $y = \int f(g(t))g'(t)dt$

すなわち、 $\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$

(証明終わり)

■微分方程式(1.2)において、 $y \neq 0$  のとき、両辺を  $y$  で割って、

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}$$

両辺を  $t$  で積分すると、 $\int \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dt} dt = \frac{1}{2} \int dt$

すなわち、 $\int \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2} \int dt$

よって、

$$\log|y| = \frac{1}{2}t + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$|y| = e^{\frac{1}{2}t+C} = e^C e^{\frac{1}{2}t}$$

よって、 $y = \pm e^C e^{\frac{1}{2}t}$

$\pm e^C = A$  とおくと、

$$y = A e^{\frac{1}{2}t} \quad (A \text{ は任意定数で、} A \neq 0)$$

ここで、 $y=0$  は明らかに微分方程式(1.2)を満たすが、これは  $A=0$  として得られる。

よって、微分方程式(1.2)を満たす関数は、

$$y = A e^{\frac{1}{2}t} \quad (A \text{ は任意定数}) \cdots (3.1)$$

■このように、微分方程式は両辺を積分することで解けることがある

■(3.1)のような、任意定数を含んだ微分方程式を満たす関数を、一般解という

■一般解は、先の図形的視点では解曲線群である

■例えば、

$$t=0 \text{ のとき, } y=2$$

という初期条件が与えられたときは、(3.1)に条件を代入して、

$$2=A \cdot e^0$$

よって、  $A=2$

$$\text{ゆえに, } y=2e^{\frac{1}{2}t} \cdots(3.2)$$

■(3.2)のような、初期条件で任意定数がある値に決定された解を、特殊解という

■特殊解を求めることは、図形的視点では解曲線が1つ定まることである

[問9] 微分方程式  $\frac{dy}{dt} = \gamma y \cdots(1.1)$ について、

(1) 微分方程式(1.1)の一般解を求めよ。

(2)  $t=0$  のとき、 $y=1$  を満たす(1.1)の特殊解を求めよ。

■いままで考えてきた微分方程式は、

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \cdots(3.3)$$

という形をしていて、これを変数分離形の微分方程式という

■変数分離形の微分方程式は積分で解くことができ、一般的にまとめると次のようになる

[変数分離形微分方程式の解法]

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \cdots(3.3)$$

より、 $h(y) \neq 0$  のとき、両辺を  $h(y)$  で割って、

$$\frac{1}{h(y)} \frac{dy}{dx} = g(x) \cdots(3.4)$$

両辺を  $x$  で積分すると、

$$\int \frac{1}{h(y)} \frac{dy}{dx} dx = \int g(x) dx$$

置換積分法より、

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

あとは両辺の積分計算を行えばよい。

(が、積分計算の結果をよく知っている関数で表せないことのほうが多い)

(3.4)以降は、次のように書いてもよい。

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(x) dx$$

両辺を積分して、

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

■2.2 で考えた，ランチェスターの 2 次法則の微分方程式などを解いてみよう

[問 10] 微分方程式  $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{3y}$  …(2.2)について，

- (1) 微分方程式(2.2)の一般解を求めよ。
- (2)  $x=30$  のとき， $y=10$  を満たす(2.2)の特殊解を求めよ。
- (3) (2)の特殊解が表す解曲線を，*Mathematica* で描け。
- (4) 初期条件(一般解の任意定数)をいろいろ変えながら，*Mathematica* で(2.2)の解曲線を描き，戦闘の様子を考察せよ。

[Report2] イギリスの天才数学者・物理学者のニュートン(1642～1747)は，自然落下する

物体の  $t$  秒後の落下距離  $y$  m は，空気抵抗を無視したとき，微分方程式  $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$  …(3.4)

( $g$  は重力加速度： $9.8\text{m/s}^2$ )で表されることを発見した。

- (1) 微分方程式(3.4)を解いて， $y$  を  $t$  で表せ。
- (2) 野球のピッチャーとバッターの間の距離は，約 18m である。いま時速 144km で水平方向に投げられた松坂のボールは，ホームベース上では何 m 落下しているか。

### 3.2 *Mathematica* で解く

■*Mathematica* は，微分方程式を解くこともできる

[実験 3]

微分方程式(1.2)を，*Mathematica* で解いてみよう。

```
In[35]:= DSolve[f' [x] == 0.5 f [x], f [x], x]
Out[35]= {{f [x] -> e0.5x C [1]}}
```

```
In[36]:= DSolve[{f' [x] == 0.5 f [x], f [1] == 2}, f [x], x]
Out[36]= {{f [x] -> 1.21306 e0.5x}}
```

[問 11] 実験 3 を解読せよ。

[問 12] いままで現れた微分方程式を *Mathematica* で解き，自分で解いて得た解と比較検証せよ。

(注意) *Mathematica* で数学的に厳密に解けないときは，数値解を求める関数 **NDSolve** を利用する。

## 4 モデルの検証

## 4.1 マルサス・モデルの検証

■微分方程式  $\frac{dy}{dt} = \gamma y$  …(1.1)の解は,

$$y(t) = Ae^{\gamma t} \quad (A \text{ は任意定数}) \quad \dots(4.1)$$

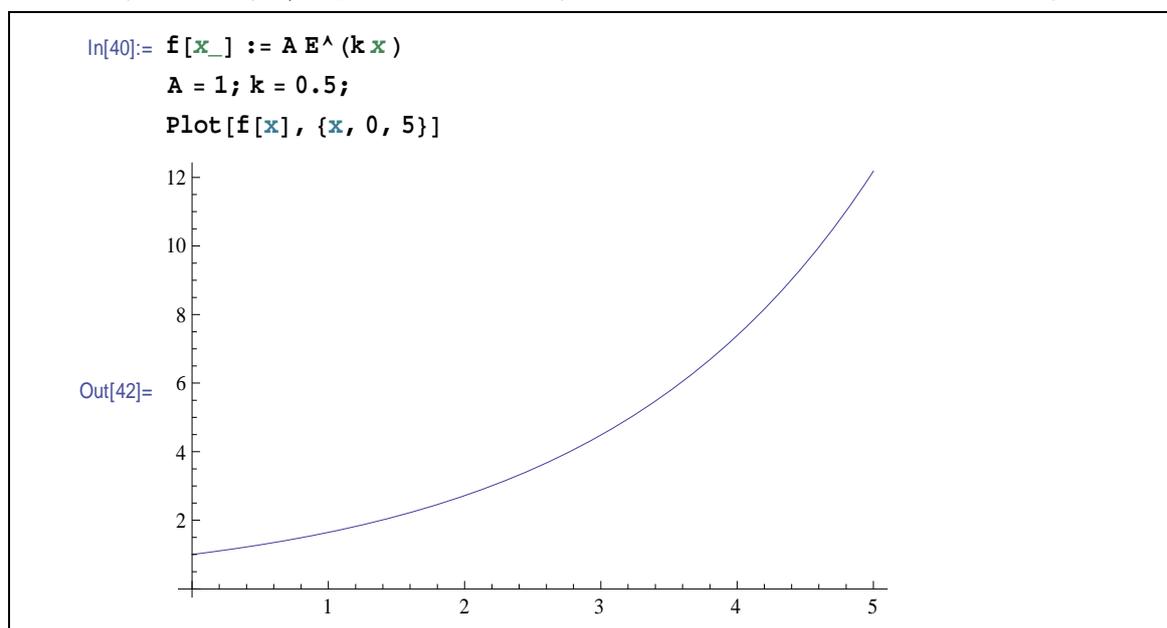
であった

■解(4.1)は指数関数であり, 人口増加を考える場合は  $A > 0$  である

[考察 3] 上記の理由を述べよ。

## [実験 4]

解(4.1)の  $A$ ,  $\gamma$  の値を具体的に与え, *Mathematica* でグラフを描いてみよ。



[問 13] 解(4.1)の  $A$ ,  $\gamma$  の値を変化させ, 実験 4 を続けよ。

[問 14] 実験 4, 問 13 の実験結果を, 以下にまとめよ。

マルサスの人口増加論をモデル化した微分方程式  $\frac{dy}{dt} = \gamma y$  …(1.1)の解は,

$$y(t) =$$

である。そして, モデルでの  $\gamma$  の値による人口の増え方は, 次のようになる。

(i)  $\gamma >$  のとき,  $y(t)$ は

(ii)  $\gamma =$  のとき,  $y(t)$ は

(iii)  $\gamma <$  のとき,  $y(t)$ は

## 第4章

### ■マルサスの人口モデル

$$y(t) = Ae^{\gamma t} \quad \dots(4.1)$$

が、現実にあっているかどうかをチェックしよう

[問 15] 右の表は、アメリカの 1790 年から 10 年ごとの人口統計である。

年	アメリカの人口
1790	$3.9 \times 10^6$
1800	$5.3 \times 10^6$
1810	$7.2 \times 10^6$

- (1) 時刻  $t=0$  を 1790 年だとして、モデル(4.1)の  $A$  の値を決定せよ。
- (2) 10 年間を単位として計算するので、 $t=1$  を 1800 年として  $\gamma$  を決定せよ。
- (3) (1), (2) で求めた  $A$ ,  $\gamma$  の値で定められたモデル式を(4.2)とすると、この(4.2)を用いた 1810 年の予測値を求めよ。
- (4) (3) で求めた予測値と実際の人口と比較して考察せよ。

### ■問 18 より、マルサスのモデルは、

$$y(t) = 3.9 \times 10^6 e^{0.307t} \quad \dots(4.2)$$

となった

[考察 4] モデル(4.2)を用いて *Mathematica* で 1820 年～1930 年のアメリカの人口をの予測値を求め、下の表に記入せよ。そして、実際の人口と比較して考察せよ。

年	アメリカの人口	予測値
1790	$3.9 \times 10^6$	$3.9 \times 10^6$
1800	$5.3 \times 10^6$	$5.3 \times 10^6$
1810	$7.2 \times 10^6$	$7.2 \times 10^6$
1820	$9.6 \times 10^6$	$\times 10^6$
1830	$12.9 \times 10^6$	$\times 10^6$
1840	$17.1 \times 10^6$	$\times 10^6$
1850	$23.2 \times 10^6$	$\times 10^6$
1860	$31.4 \times 10^6$	$\times 10^6$
1870	$38.6 \times 10^6$	$\times 10^6$
1880	$50.2 \times 10^6$	$\times 10^6$
1890	$62.9 \times 10^6$	$\times 10^6$
1900	$76.0 \times 10^6$	$\times 10^6$
1910	$92.0 \times 10^6$	$\times 10^6$
1920	$106.5 \times 10^6$	$\times 10^6$
1930	$123.2 \times 10^6$	$\times 10^6$

## [実験 5]

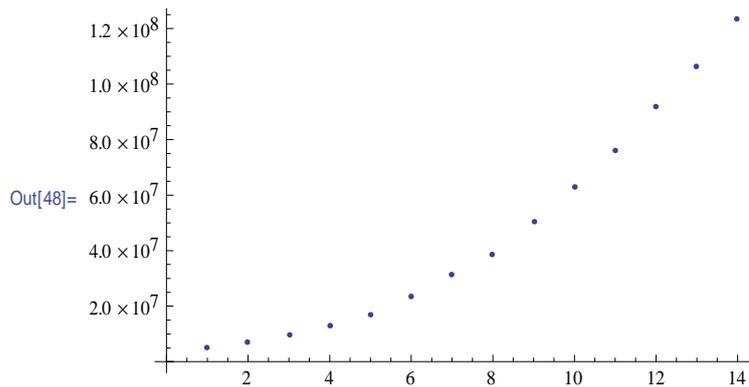
現実とモデル(4.2)による予測を, *Mathematica* で視覚化しよう。

```
In[43]:= data = {5.3, 7.2, 9.6, 12.9, 17.1, 23.2, 31.4, 38.6, 50.2, 62.9, 76.0,
                92.0, 106.5, 123.2} * 10^6
```

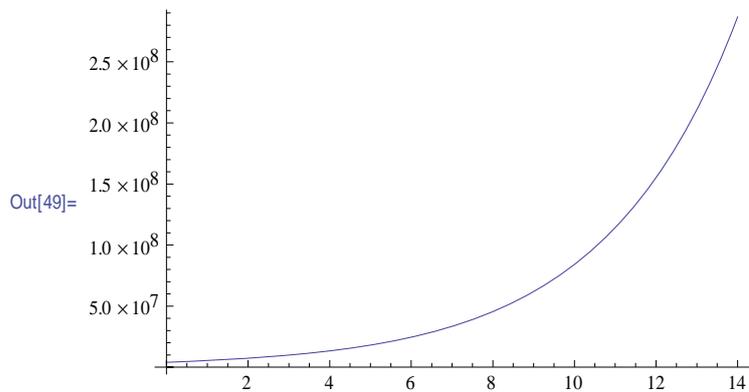
```
Out[43]= {5.3 × 106, 7.2 × 106, 9.6 × 106, 1.29 × 107, 1.71 × 107, 2.32 × 107, 3.14 × 107,
          3.86 × 107, 5.02 × 107, 6.29 × 107, 7.6 × 107, 9.2 × 107, 1.065 × 108, 1.232 × 108}
```

```
In[47]:= y[t_] := 3.9 * (10^6) * E^(0.307 t)
```

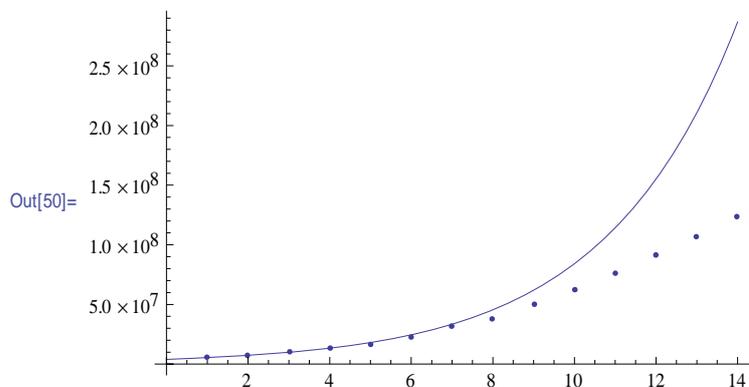
```
In[48]:= g1 = ListPlot[data]
```



```
In[49]:= g2 = Plot[y[t], {t, 0, 14}]
```



```
In[50]:= Show[g1, g2]
```



[考察 5] 実験 5 の命令を解説せよ。そして, その実験結果を考察せよ。

■以上より，マルサスの人口増加モデル

$$\frac{dy}{dt} = \gamma y \quad \cdots(1.1)$$

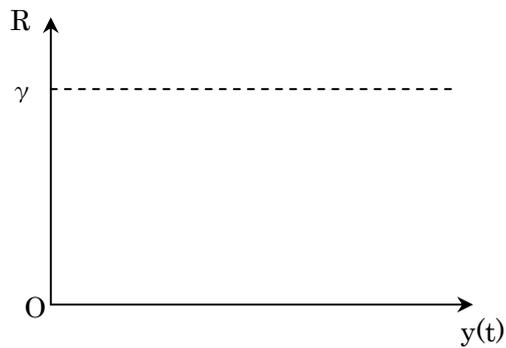
には，次のような問題点があることがわかった

- ・  $\gamma > 0$  のとき，人口が発散してしまう，すなわち， $t \rightarrow \infty$  のとき， $y(t) \rightarrow \infty$  となるが，現実的ではない
- ・ これは，人口の増加率が一定の  $\gamma$  であるとしたことによる
- ・ 現実には，食料の不足や人口の増加に伴う環境の悪化，エネルギーの供給不足等で，増加率の  $\gamma$  は一定ではないと思われる

■そこで，増加率が人口によって変化するモデルを考える必要があるが，モデル化ではできるだけ単純な変化から考えるのが普通である

[問 16] 増加率  $R$  が人口  $y(t)$  によって変化する場合， $R$  と  $y(t)$  の簡単な関係としてはどのようなものが考えられるか。

[問 17] 増加率  $R$  と人口  $y(t)$  との関係を下の図に描き込み， $R$  を  $y(t)$  の式で表せ。



■問 17 で考えたモデルは，人口が小さければ増加率  $R$  はほぼ  $\gamma$  であるが，人口が大きくなるにつれて  $R$  は減少し， $y(t)=K$  のときに  $R=0$  となるモデルである

[問 18] 問 17 で考えた増加率  $R$  を用いて，人口の変化のモデルを微分方程式で表せ。

## 4.2 ヴェルハーストのモデル

■ 4.1 で考えた、マルサス・モデルの改良形であるモデル

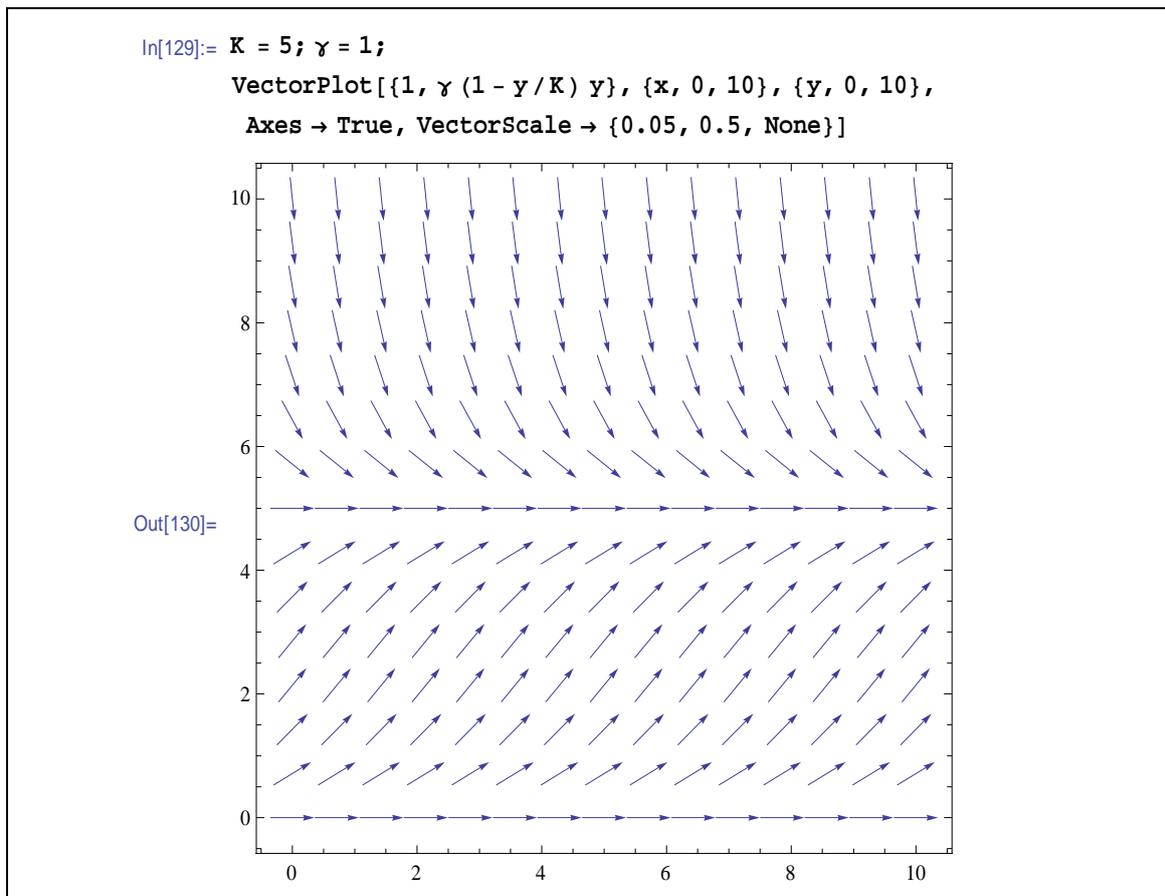
$$\frac{dy}{dt} = \gamma \left(1 - \frac{y}{K}\right) y \quad \cdots (4.3)$$

は、1837 年にオランダの数理生物学者ヴェルハーストが考えたものである

■ ヴェルハーストのモデル(4.3)の微分方程式による増え方をつかむために、(4.3)の方向場を調べよう

## [実験 6]

$\gamma = 1$ ,  $K = 5$  のとき、モデル(4.3)の方向場を *Mathematica* で描こう。



[考察 6]  $\gamma$ ,  $K$  の値をいろいろ変えながら実験 5 を行い、その結果を考察せよ。

■簡単のために、モデル(4.3)で  $\gamma = 1$ ,  $K = 1$  とした微分方程式を解こう

$$\frac{dy}{dt} = (1-y)y \quad \cdots(4.4)$$

$y=0$ ,  $1$  は明らかに(4.4)を満たすので、 $y \neq 0, 1$  とする。

$$(4.4) \text{の両辺を}(1-y)y \text{ で割って, } \frac{1}{(1-y)y} \cdot \frac{dy}{dt} = 1$$

$$\text{両辺を } t \text{ で積分して, } \int \frac{1}{(1-y)y} \cdot \frac{dy}{dt} dt = \int dt$$

$$\text{よって, } \int \frac{1}{(1-y)y} dy = \int dt$$

ここで,

$$\int \frac{1}{(1-y)y} dy = \int \left( \frac{1}{1-y} + \frac{1}{y} \right) dy = -\log|1-y| + \log y = \log \left| \frac{y}{1-y} \right|$$

$$\text{よって, } \log \left| \frac{y}{1-y} \right| = t + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$\left| \frac{y}{1-y} \right| = e^{t+C}$$

$\pm e^C = A$  とおくと,

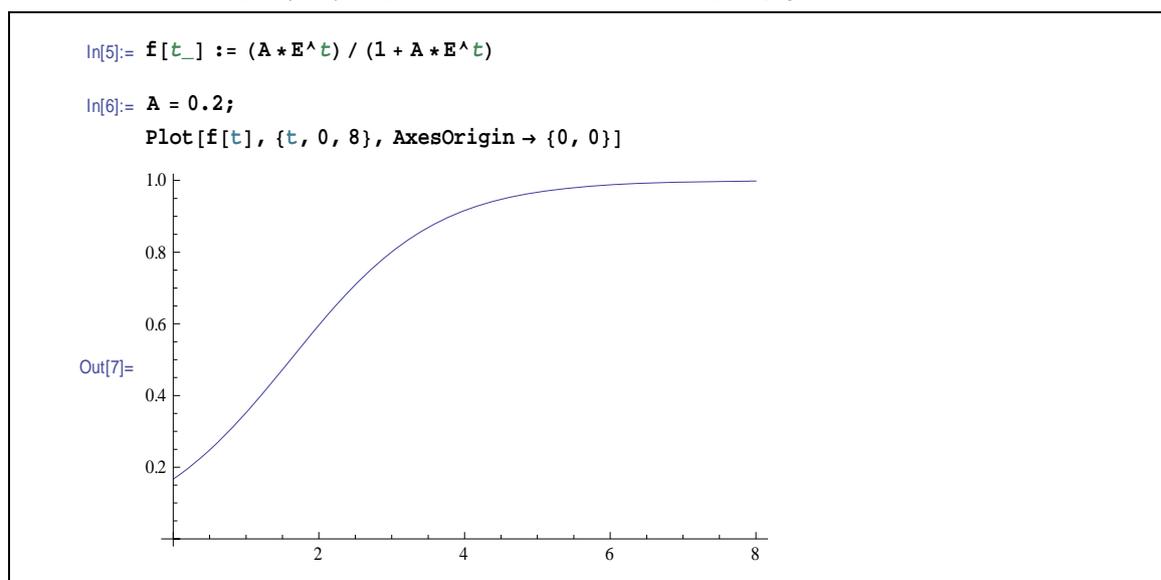
$$y = A(1-y)e^t \quad (A \text{ は } 0 \text{ でない任意定数})$$

$$(1 + Ae^t)y = Ae^t$$

$$\text{よって, } y = \frac{Ae^t}{1 + Ae^t} \quad \cdots(4.5) \quad (A \text{ は } 0 \text{ でない任意定数})$$

#### [実験 7]

$A = 0.2$  のとき、解曲線(4.5)を *Mathematica* で描こう。



[考察 7]  $A$  の値をいろいろ変えながら実験 7 を行い、解曲線(4.5)の性質を述べよ。

■微分方程式(4.3)を

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\gamma}{K}(K - y)y \quad \cdots(4.6)$$

と変形する

[問 19] 微分方程式(4.6)を，初期条件  $y(0)=P$  のもとで解け。

[考察 8] 微分方程式(4.6)の解曲線を， $P$ ， $K$ ， $\gamma$  の値を変えて *Mathematica* で描き，その性質を考察せよ。

### 4.3 ロジスティックカーブ

■ヴェルハースト・モデル

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\gamma}{K}(K - y)y \quad \cdots(4.6)$$

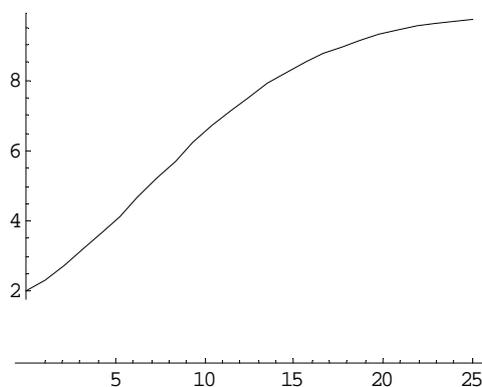
の解は、初期条件が  $y(0)=P$  のとき、

$$y(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P} - 1\right)e^{-\gamma t}} \quad \cdots(4.7)$$

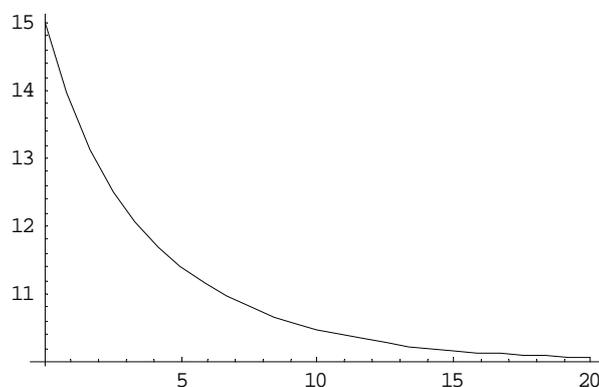
であった

■ヴェルハーストとは別に、アメリカの生物学者であるパールも、微分方程式(4.6)で表される法則を発見し、1920年には解曲線(4.7)をロジスティックカーブと名づけている

■ $P=2, K=10, \gamma=0.2$  のとき、ロジスティックカーブ(4.7)は次のようになる



■ $P=15, K=10, \gamma=0.2$  のとき、ロジスティックカーブ(4.7)は次のようになる



[問 20] ロジスティックカーブ(4.7)について、次の性質を証明せよ。

- (1)  $t \rightarrow \infty$  のとき、 $y(t) \rightarrow K$
- (2)  $P < K$  のとき、 $\frac{dy}{dt} > 0$  ;  $P > K$  のとき、 $\frac{dy}{dt} < 0$
- (3)  $y(t) \rightarrow K$  のとき、 $\frac{dy}{dt} \rightarrow 0$

## 4.4 ヴェルハースト・モデルの検証

■ ヴェルハースト・モデルが、アメリカの人口増加をどれくらいうまくモデル化しているのかを、マルサス・モデルのときと同じ問 12 のデータをもとに検証しよう

■ まず、初期条件とパラメータを決定しなければならないが、(4.6)の解

$$y(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P} - 1\right) e^{-\gamma t}} \quad \dots(4.7)$$

が複雑な式なので、*Mathematica* を利用しよう

## [実験 8]

$P = 3.9 \times 10^6$ ,  $K = 197 \times 10^6$  としたとき、 $\gamma$  の値と  $y(t)$  の式を決定しよう。

※この  $P$ ,  $K$  の値は、ヴェルハーストが用いたものである。

```
In[131]:= Clear[y, K, P, γ]

In[132]:= y[t_] := K / (1 + (K / P - 1) E^(-γ t))
y[t]

Out[133]= 
$$\frac{K}{1 + e^{-t\gamma} \left(-1 + \frac{K}{P}\right)}$$


In[134]:= P = 3.9 * 10^6; K = 197. * 10^6;
y[t]

Out[135]= 
$$\frac{1.97 \times 10^8}{1 + 49.5128 e^{-t\gamma}}$$


In[136]:= Solve[y[1] == 5.3 * 10^6, γ]
Solve::ifun: 逆関数を使用して求められない解がある可能性があります。
詳細情報は Reduce を使ってください。
>>

Out[136]= {{γ -> 0.314007}}
```

```
In[137]:= y[t]

Out[137]= 
$$\frac{1.97 \times 10^8}{1 + 49.5128 e^{-t\gamma}}$$

```

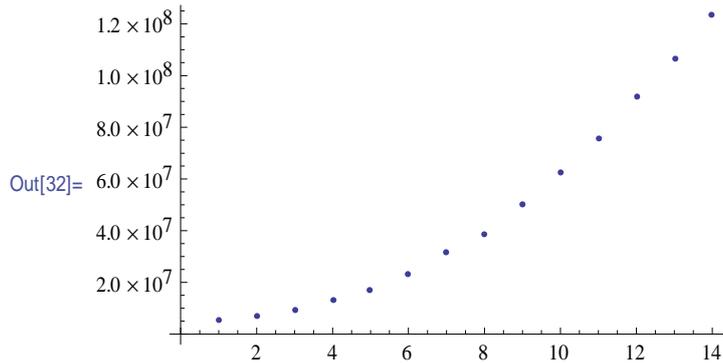
[問 21] 実験 8 を解説せよ。

## [実験 9]

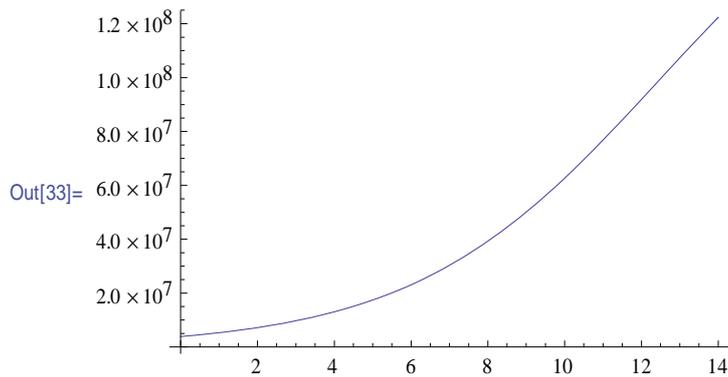
実験 8 で決定した式を利用して、ヴェルハースト・モデルの人口予測の精度を検証せよ。

```
In[29]:=  $\gamma = 0.314007$ ;  $P = 3.9 * 10^6$ ;  $K = 197. * 10^6$ ;
 $y[t\_]$  :=  $K / (1 + (K / P - 1) E^{(-\gamma t)})$ 
data = {5.3, 7.2, 9.6, 12.9, 17.1, 23.2, 31.4, 38.6, 50.2,
        62.9, 76.0, 92.0, 106.5, 123.2} *  $10^6$ ;
```

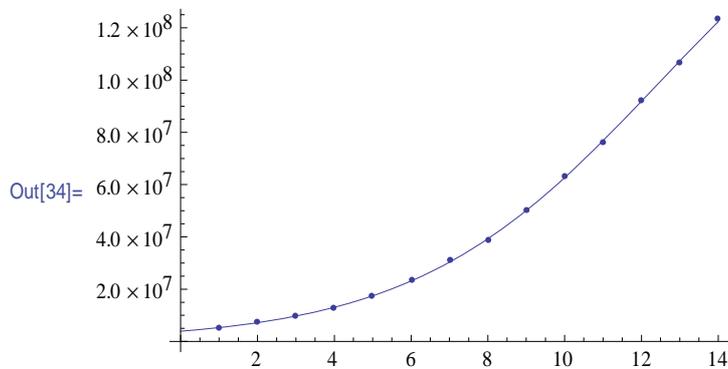
```
In[32]:= g1 = ListPlot[data]
```



```
In[33]:= g2 = Plot[y[t], {t, 0, 14}]
```



```
In[34]:= Show[{g1, g2}]
```



(発展) 最小二乗法によるパラメータの決定について

■ヴェルハーストのモデルの解

$$y(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P} - 1\right)e^{-\gamma t}} \quad \dots(1)$$

において、ヴェルハーストはパラメータを

$$P = 3.9 \times 10^6, \quad K = 197 \times 10^6$$

とした

■このような、ロジスティックカーブ(には限らない)のパラメータを決定する方法の1つとして、以下に述べるような**最小二乗法**がある

■例えば、右図のような  $n$  個のデータがあるとき、これらが本来は直線上にのっているものとして、その直線の方程式を

$$y = ax + b \quad \dots(2)$$

とする

■最小二乗法では、最もふさわしい直線は、各点と直線との差を  $d_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) としたとき、

$$s = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \dots + d_n^2 = \sum_{k=1}^n d_k^2$$

$$= \sum_{k=1}^n (y_k - ax_k - b)^2 \quad \dots(3)$$

が最小となる直線であると考え

■ $x_k, y_k$  の値は分かっているのだから、(3)は  $a, b$  に関する関数となるから、(3)を  $a, b$  について偏微分する

$$\frac{\partial s}{\partial a} = -2 \sum_{k=1}^n x_k (y_k - ax_k - b)$$

$$\frac{\partial s}{\partial b} = -2 \sum_{k=1}^n (y_k - ax_k - b)$$

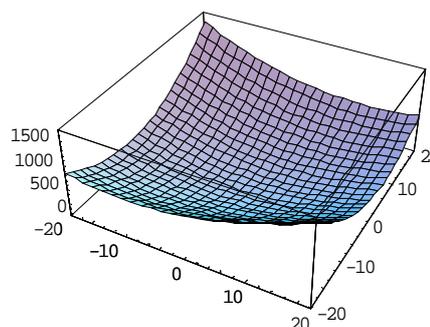
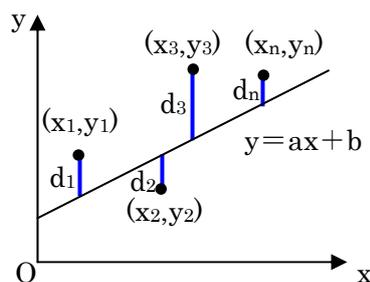
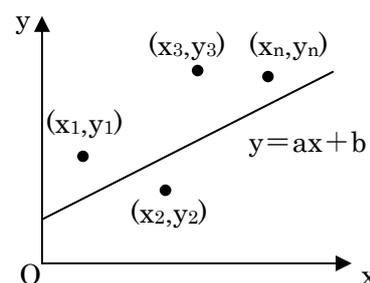
※ $a$  について偏微分するとは、変数  $b$  を定数とみなし

て変数  $a$  で微分することであり、 $b$  についての偏微分も同様である

※ $\partial$  は、「ラウンド」「ディー」「デル」などと読む

■(3)の値が最小となる  $a, b$  は、連立方程式  $\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial s}{\partial b} = 0 \end{cases}$  を解くと得られる

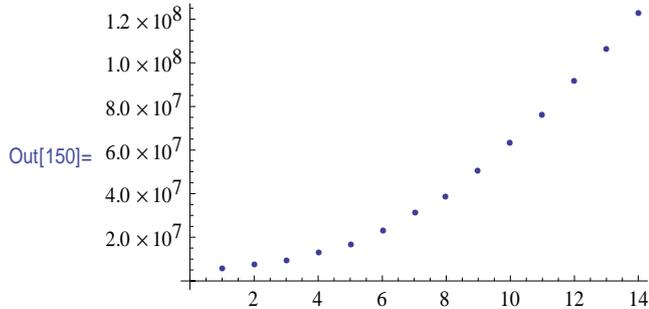
■直線の例で説明した最小二乗法を、*Mathematica* を利用してロジスティックカーブ(1)に適用して、パラメータ  $P, K, \gamma$  を決定しよう



## [実験 10]

```
In[147]:= Clear[y, K, P, γ]
          y[t_] := K / (1 + (K / P - 1) E^(-γ t))
          data = {5.3, 7.2, 9.6, 12.9, 17.1, 23.2, 31.4, 38.6, 50.2,
                  62.9, 76.0, 92.0, 106.5, 123.2} * 10^6;
```

```
In[150]:= g1 = ListPlot[data]
```



```
In[151]:= para = FindFit[data, y[t], {K, P, γ}, t]
```

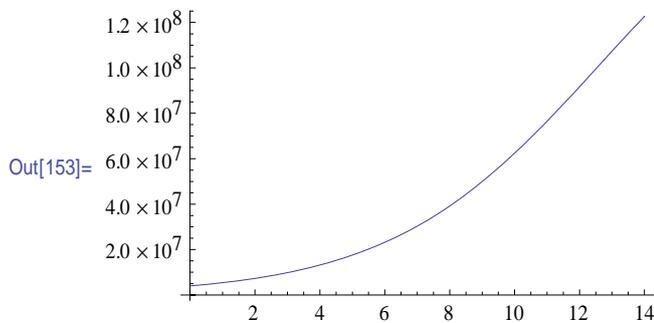
```
Out[151]= {K → 2.02437 × 10^8, P → 4.00274 × 10^6, γ → 0.309581}
```

```
In[152]:= y[t] /. para
```

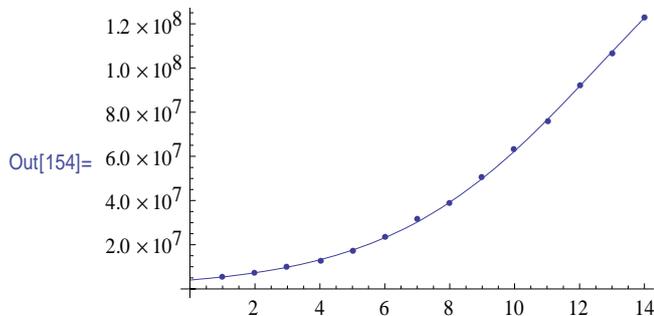
```
Out[152]= 
$$\frac{2.02437 \times 10^8}{1 + 49.5746 e^{-0.309581 t}}$$

```

```
In[153]:= g2 = Plot[%, {t, 0, 14}]
```



```
In[154]:= Show[{g1, g2}]
```



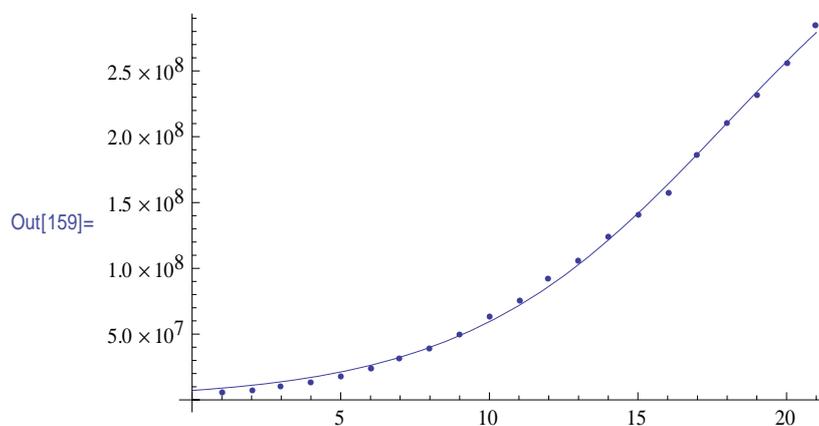
```
In[155]:= data2 =
  Join[data, {140., 157.8, 186.2, 210.1, 230.9, 255.5, 284.2} *
    10^6]
```

```
Out[155]= {5.3×106, 7.2×106, 9.6×106, 1.29×107, 1.71×107, 2.32×107,
  3.14×107, 3.86×107, 5.02×107, 6.29×107, 7.6×107,
  9.2×107, 1.065×108, 1.232×108, 1.4×108, 1.578×108,
  1.862×108, 2.101×108, 2.309×108, 2.555×108, 2.842×108}
```

```
In[156]:= para2 = FindFit[data2, y[t], {K, P, γ}, t]
```

```
Out[156]= {K → 4.21117×108, P → 7.0974×106, γ → 0.225856}
```

```
In[157]:= g3 = ListPlot[data2];
  g4 = Plot[y[t] /. para2, {t, 0, 21}];
  Show[{g3, g4}]
```



- 最小二乗法は、ドイツの天才数学者であるガウス(1777~1855)によって考えられたが、ガウスは数学者であると同時に天文学者、物理学者でもあった
- ガウスの研究は非常に広範囲に及び、近代数学のほとんどの分野に影響を与えている、歴史上で最高の数学者の一人である
- 人類の歴史上における偉大な数学者を 3 人選ぶとすると、誰が選んでもガウスはほぼ確実にはいつてくる
- ガウスの有名な言葉

「数学は科学の女王であり、数論は数学の女王である」



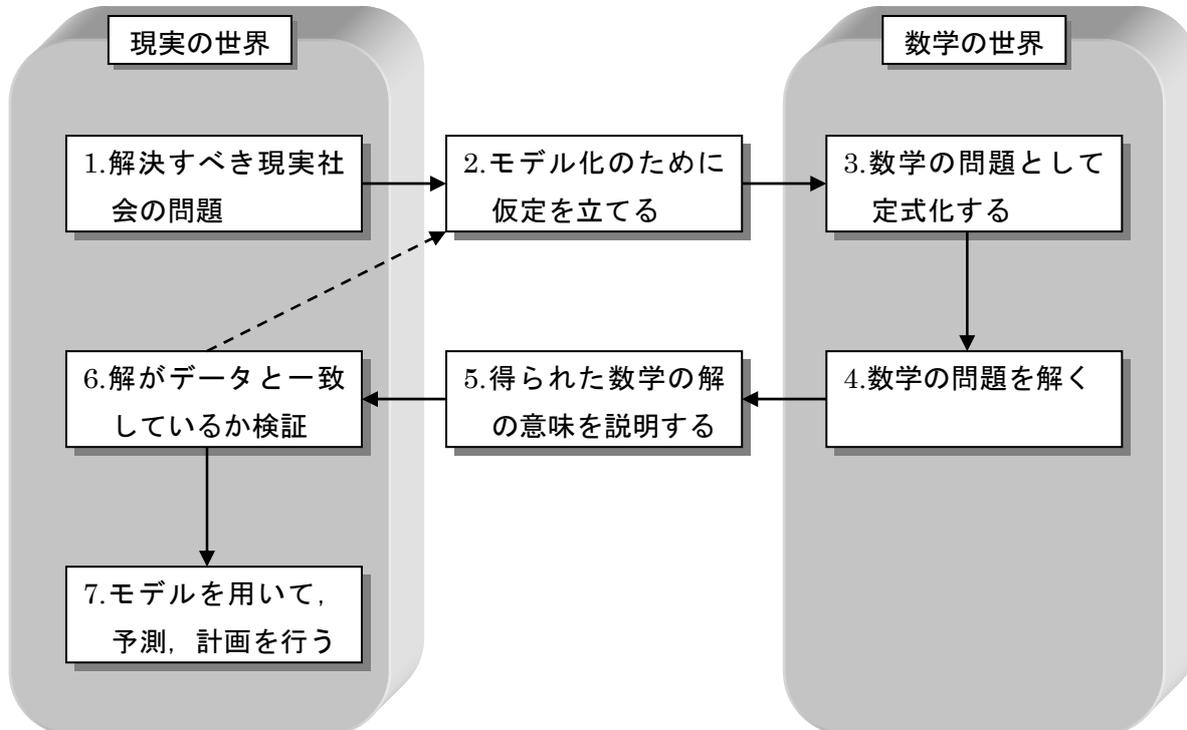
### 4.5 数学モデルの作成

■ 4.4 で見たように、ヴェルハースト・モデルはアメリカの人口増加を 100 年以上にわたって正確に予測している

■ このヴェルハースト・モデルにいきつくまでの経緯を振り返ってみよう

1. 人口の増加を予測する必要が出てきた
2. マルサスは、人口の増加率は人口  $y(t)$  に比例すると仮定
3. 微分方程式  $\frac{dy}{dt} = \gamma y \cdots (1.1)$  と定式化
4. (1.1) を解いて、解  $y(t) = Ae^{\gamma t}$  を得る
5.  $\gamma > 0$  なら、人口  $y(t)$  は指数関数的に増加する
6. アメリカの人口データと比較すると、年を経るごとに急激に現実と合わなくなる
- 2'. ヴェルハーストは、食料や環境等の影響で、人口の増加率は一定ではないと仮定
- 3'. 微分方程式  $\frac{dy}{dt} = \gamma \left(1 - \frac{y}{K}\right) y \cdots (4.3)$  と定式化
- 4'. (4.3) を解いて、解  $y(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P} - 1\right) e^{-\gamma t}}$  を得る
- 5'. 人口は無限に発散しない
- 6'. 100 年以上のデータをほぼ正確に予測できた

■ このような数学モデルの作成過程を一般的にまとめると、次のようになる



[Report3] アメリカの 1930 年以降の人口データを探し、ヴェルハースト・モデルの妥当性を検証せよ。

## (発展) ヴェルハーストのモデルとロジスティックモデルの関係

■ ヴェルハーストのモデル  $\frac{dy}{dt} = \gamma \left(1 - \frac{y}{K}\right) y \cdots \textcircled{1}$  について、

$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}$  より、 $\Delta t$  が十分小さいとき、 $\frac{dy}{dt} = \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}$  とおける。

よって、 $\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \gamma \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right) y(t)$

ここで、 $y(t+\Delta t) = y_{n+1}$ 、 $y(t) = y_n$  とおくと、 $\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = \gamma \left(1 - \frac{y_n}{K}\right) y_n \cdots \textcircled{2}$

$y_{n+1} - y_n = \gamma \Delta t \left(1 - \frac{y_n}{K}\right) y_n$  より、 $y_{n+1} = y_n \left\{1 + \gamma \Delta t \left(1 - \frac{y_n}{K}\right)\right\}$

両辺に  $\frac{\gamma \Delta t}{1 + \gamma \Delta t}$  をかけると、

$$\begin{aligned} \frac{\gamma \Delta t y_{n+1}}{1 + \gamma \Delta t} &= \frac{\gamma \Delta t y_n}{1 + \gamma \Delta t} \left\{1 + \gamma \Delta t \left(1 - \frac{y_n}{K}\right)\right\} \\ &= \frac{\gamma \Delta t y_n}{1 + \gamma \Delta t} \left(1 + \gamma \Delta t - \frac{\gamma \Delta t y_n}{K}\right) \\ &= \frac{\gamma \Delta t y_n}{1 + \gamma \Delta t} (1 + \gamma \Delta t) \left\{1 - \frac{\gamma \Delta t y_n}{K(1 + \gamma \Delta t)}\right\} \end{aligned}$$

ここで、 $a(t) = \frac{\gamma \Delta t y_n}{1 + \gamma \Delta t}$ 、 $r = 1 + \gamma \Delta t$  とおくと、 $a(t+1) = r \left(1 - \frac{a(t)}{K}\right) a(t) \cdots \textcircled{3}$

となり、ロジスティックモデルと一致する。

■ ①は変数  $t$  を連続的に変化させたもので、③は変数  $t$  を一定時間間隔で（離散的に）変化させたものである。

■ ①を微分方程式というのに対して、②を差分方程式という。

■ ロジスティックモデルは  $r$  の値によって、 $a(t)$  がカオス的な振る舞いをするときがあった。しかし、ヴェルハーストのモデルでは  $\gamma$  の値を変えてもカオスは発生しない。

### 5 インフルエンザの流行

#### 5.1 インフルエンザ感染の実験

毎年インフルエンザが流行するが、その患者数はどのように増えていくのだろうか？  
ここでは、モデル化、シミュレーションと段階を踏んで、インフルエンザの流行について考えていこう。

[問 22] インフルエンザ感染は、教室内でどのように感染するだろうか。モデル化してみよう。みんなが考えたモデルについて、議論し、良いモデルを作ろう。

■まず、インフルエンザのうつり方を次のようにモデル化する

- [1] ランダムに 1 人がインフルエンザに罹る(このときを 0 日目とする)
- [2] インフルエンザに罹った人は、その次の日から毎日 1 人に、ランダムにインフルエンザをうつす
- [3] 一度インフルエンザに罹ると、二度とインフルエンザには罹らない

#### [実験 11]

上記の仮定の下で、インフルエンザ感染のシミュレーションを行おう。

1. 擬似乱数発生アルゴリズムを再設定する。

```
In[26]:= SeedRandom []
```

2.  $1 \leq n \leq 17$  の整数の乱数を発生させる。

```
In[24]:= RandomInteger[{1, 17}]
```

```
Out[24]= 14
```

3. 14 番の人がインフルエンザに罹った！(0 日目) 14 番の人がうつす相手を選ぶ。

```
In[21]:= RandomInteger[{1, 17}]
```

```
Out[21]= 6
```

4. 6 番の人がインフルエンザに罹った！(1 日目) 14 番の人と 6 番の人が、乱数でうつす相手を選ぶ。

```
In[29]:= RandomInteger[{1, 17}]
```

```
Out[29]= 2
```

```
In[31]:= RandomInteger[{1, 17}]
```

```
Out[31]= 17
```

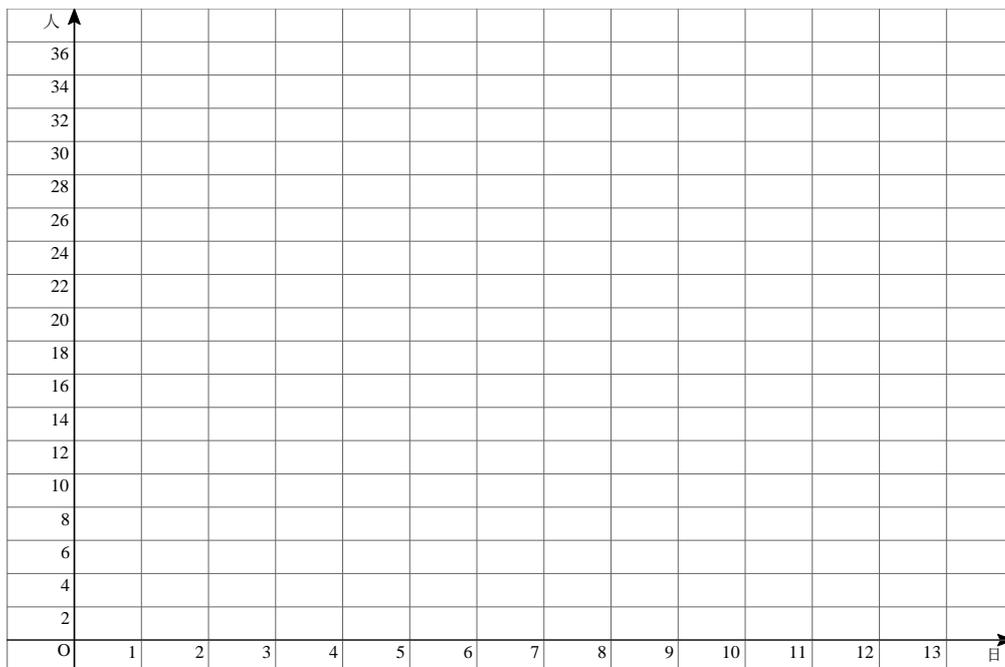
5. 次は、14 番、6 番、2 番、17 番の人がうつす相手を乱数で選ぶ。
6. 感染者は、以上を繰り返す。

## 第4章

■インフルエンザに罹った人の欄に○をつける。

No.	名前	日数														
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1																
2																
3																
4																
5																
6																
7																
8																
9																
10																
11																
12																
13																
14																
15																
16																
17																
18																
19																
20																
新たな患者数																
感染者計																

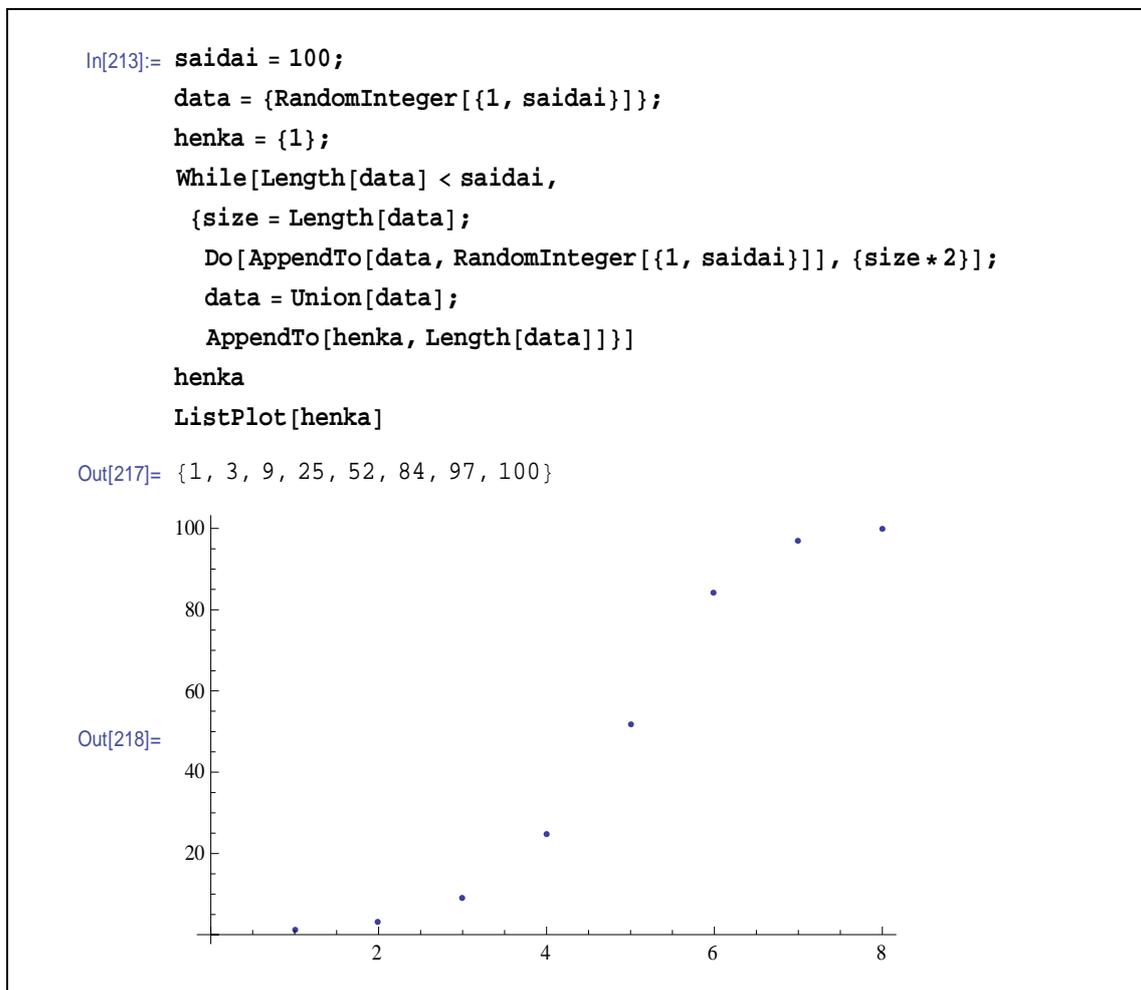
[問 23] 上の表をもとに、下のグラフに患者数の合計数をプロットせよ。



[考察 9] 上のグラフを見て、インフルエンザの患者数の増え方について考察せよ。

## [実験 12]

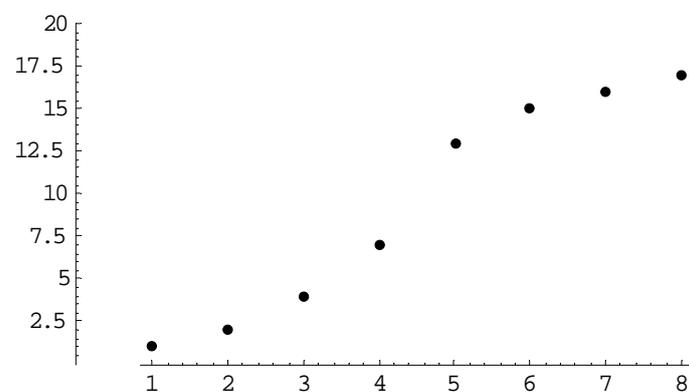
実験 11 を *Mathematica* でシミュレーションしよう。下記は、100 人の集団で、1 人の患者が 2 人にうつす場合である。



[問 24] シミュレーションの結果と、考察 9 の考察を比較せよ。

## 5.2 インフルエンザ感染のモデル化

■ 実験 10 のインフルエンザ感染者のシミュレーションの結果の例は、下図のようであった



■これを見て、何かを思い出した人はいるだろうか？ そう、ロジスティックカーブに似ていると感じた人は鋭い

■果たして、この曲線はロジスティックカーブなのかどうか、インフルエンザ感染の状況をモデル化して、数学的に解いて考えてみよう

$y(t)$  : 時間  $t$  のときのインフルエンザ患者数

$K$  : (教室内などの)人数

とおく。

■本来は  $y$  は正の整数であるが、解析しやすいように  $y$  は時間  $t$  に関して連続かつ微分可能であると仮定すると、 $\frac{dy}{dt}$  はインフルエンザ感染者の増加速度を表す。

■インフルエンザ流行の最初のころは、患者数の増加速度はほとんど  $y$  に比例すると考えてよいだろう。

[問 25] 上記のことを説明せよ。

■しかし、感染者の数かなり増えてきた段階では、患者数の増加速度は感染していない人の数  $K-y$  にも影響される

[問 26] 上記のことを説明せよ。

■以上より、1 人の患者が出てから任意の時点で、患者数の増加速度は  $y$  にも  $K-y$  にも依存するので、患者数の増加速度は  $y(K-y)$  に比例すると考えられる

[問 27] 上記のことから、 $y$  の微分方程式をつくれ。

■インフルエンザの患者数の増加の様子は、微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y(K-y) \quad \cdots(5.1) \quad (\lambda \text{ は正の比例定数})$$

でモデル化できた

[問 28] 微分方程式(5.1)と、ヴェルハースト・モデル(4.6)が本質的に同じであることを確認せよ。

■ 4.2 で、(5.1)のようなタイプの微分方程式は解いたが、ここでは違う解法で(大学っぽく)解いてみよう

■  $y=y(t)$ に関する

$$\frac{dy}{dt} + yp(t) = q(t) \cdots \textcircled{1}$$

の形をした微分方程式を、**線型 1 階微分方程式**という

■ 線型 1 階微分方程式は、以下のようにして解くことができる

まず、 $e^{\int p(t)dt}$  を(\*)の**積分因数**という。

この積分因数を、(\*)の両辺にかけると、

$$\frac{dy}{dt} e^{\int p(t)dt} + yp(t)e^{\int p(t)dt} = q(t)e^{\int p(t)dt}$$

ここで、 $\left(\int p(t)dt\right)' = p(t)$  であることに注意すると、上の式を書き換えて、

$$y'e^{\int p(t)dt} + y\left(e^{\int p(t)dt}\right)' = q(t)e^{\int p(t)dt}$$

よって、 $\left(ye^{\int p(t)dt}\right)' = q(t)e^{\int p(t)dt}$

ゆえに、両辺を  $t$  で積分して、

$$ye^{\int p(t)dt} = \int q(t)e^{\int p(t)dt} dt + C$$

よって、 $y = e^{-\int p(t)dt} \int q(t)e^{\int p(t)dt} dt + Ce^{-\int p(t)dt} \cdots \textcircled{2}$

この②が、線型 1 階微分方程式①の解である。

■ 次に、インフルエンザ流行のモデル化の微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y(K - y) \cdots (5.1)$$

を線型 1 階微分方程式の形に変形できないか考えると、(5.1)の両辺を  $y^2$  で割って、

$$\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dt} - \frac{\lambda K}{y} = -\lambda \cdots \textcircled{4}$$

ここで、 $\frac{1}{y} = x$  とおき、両辺を  $t$  で微分すると、

$$-\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdots \textcircled{5}$$

であるから、⑤を④に代入して、

$$\frac{dx}{dt} + \lambda Kx = \lambda \cdots \textcircled{6}$$

■ ⑥は、 $x=x(t)$ に関する線型 1 階微分方程式であるから、積分因数を利用して解こう

①における  $p(t)$  は、⑥では  $\lambda K$  より、積分因数は、

$$e^{\int p(t) dt} = e^{\int \lambda K dt} = e^{\lambda K t}$$

よって、⑥の両辺に  $e^{\lambda K t}$  をかけて、

$$\frac{dx}{dt} e^{\lambda K t} + x \lambda K e^{\lambda K t} = \lambda e^{\lambda K t}$$

$$(x e^{\lambda K t})' = \lambda e^{\lambda K t}$$

ゆえに、両辺を  $t$  で積分して、

$$x e^{\lambda K t} = \int \lambda e^{\lambda K t} dt$$

$$x e^{\lambda K t} = \frac{e^{\lambda K t}}{K} + C$$

よって、 $x = \frac{1}{K} + C e^{-\lambda K t} = \frac{1 + K C e^{-\lambda K t}}{K}$

ゆえに、 $y = \frac{K}{1 + K C e^{-\lambda K t}}$  ( $C$  は積分定数)  $\cdots(5.2)$

初期条件を  $t=0$  のとき、 $y(0)=P$  とすると、

$$P = \frac{K}{1 + K C}$$

$$K C = \frac{K}{P} - 1$$

よって、 $y(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P} - 1\right) e^{-\lambda K t}}$   $\cdots(5.3)$

### [実験 13]

実験 11 のデータを使って、解(5.3)のグラフ(解曲線)を描こう。

```
In[424]:= henka
Out[424]= {1, 2, 4, 7, 12, 16, 18, 20}

In[433]:= Clear[t, K, P, r]
          Y[t_] := K / (1 + (K / P - 1) E^(- r K t))
          Y[t]

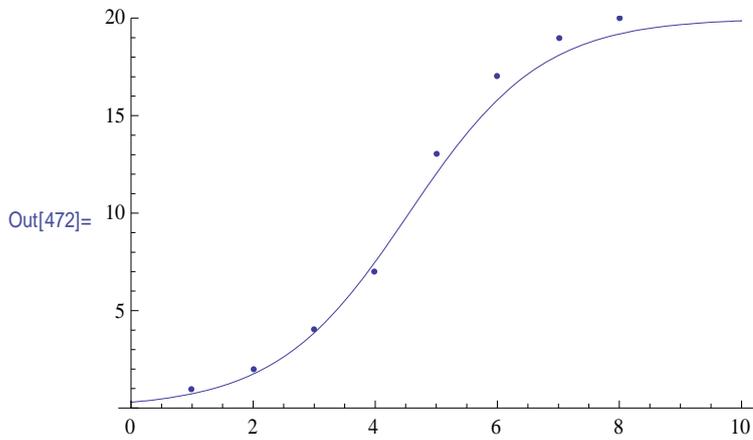
Out[435]= 
$$\frac{K}{1 + e^{-K r t} \left(-1 + \frac{K}{P}\right)}$$

```

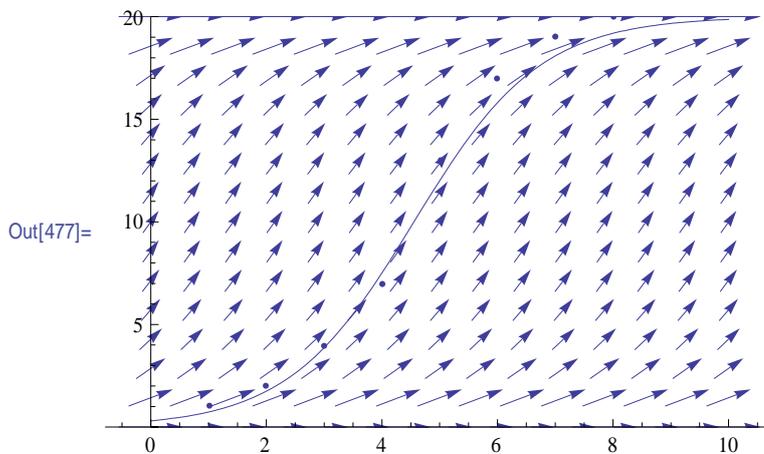
```
In[469]:= P = 0.3; K = 20;
          para = FindFit[henka, y[t], {r}, t]
```

```
Out[470]= {r -> 0.04594}
```

```
In[471]:= g2 = Plot[y[t] /. para, {t, 0, 10}];
          Show[{g1, g2}]
```



```
In[476]:= g3 = VectorPlot[{1, 0.04 (20 - y) y}, {x, 0, 10}, {y, 0, 20},
                          VectorScale -> {0.05, 0.5, None}];
          Show[{g1, g2, g3}]
```



[問 29]  $y(0)=P$  は、何を表わしているか。

- 微分方程式(5.1)の解曲線(5.3)は、ロジスティックカーブであることがわかった
- 一見、違うように思われる人口増加問題とインフルエンザの患者数の問題には、共通のモデル化の原理があるようだ

[問 30] 微分方程式(5.1)を、4.2 での解き方(高等学校での解き方)で解け。

### 5.3 インフルエンザ感染のモデル化の検証

■5.2 で行ったモデル化は、果たして現実をうまく表現しているのだろうか？

■2005 年～2006 年の大阪府のインフルエンザ患者数データ(右下表)で、検証してみよう

#### [実験 14]

実験 8, 実験 9 と同様に、下の表のデータを利用して解(5.3)のパラメータを決定して、モデル化を検証する。

月日	11/27-	12/4-	12/11-	12/18-	1/1-	1/15-	1/22-	1/29-	2/5-	2/12-	2/19-	2/26-	3/5-	3/12-	3/19-
患者総数	90	333	911	1,450	1,484	3,809	10,444	16,760	20,353	22,136	23,208	23,536	24,012	24,171	24,171

```

In[25]:= Clear[y, K, P, γ]
          y[t_] := K / (1 + (K / P - 1) * E^(-γ K t))

In[27]:= P = 90.; K = 24200.;
          y[t]

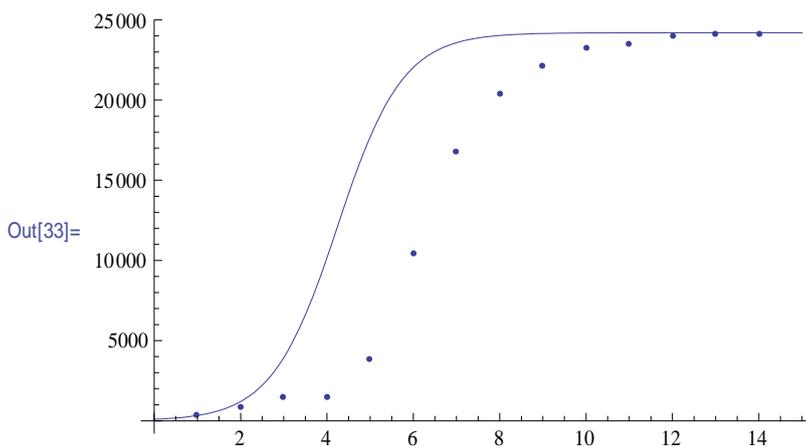
Out[28]= 
$$\frac{24200.}{1 + 267.889 e^{-24200. t \gamma}}$$


In[29]:= para = Solve[y[1] == 333, γ]

Out[29]= {{γ → 0.0000544819}}

In[30]:= data = {333, 911, 1450, 1484, 3809, 10444, 16760, 20353, 22136,
                  23208, 23536, 24012, 24171, 24171};

In[31]:= g1 = ListPlot[data];
          g2 = Plot[y[t] /. para, {t, 0, 15}];
          Show[{g1, g2}]
    
```



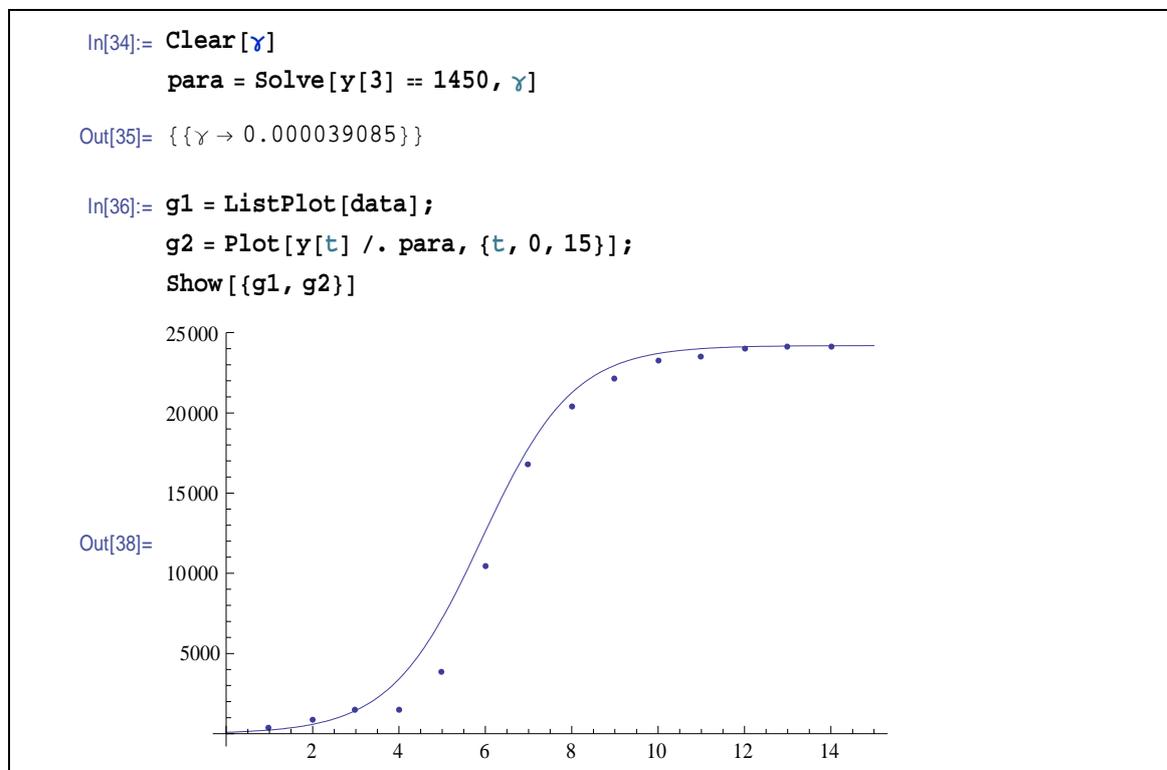
[考察 10] 実験 12 の結果について考察せよ。

- モデル化した微分方程式を解いて得られた解曲線を現実のデータと照らし合わせるとき、パラメータを決定しなければならない
- 実験 12 では、 $\gamma$  の値を決定するのに  $t=1$  のときのデータを利用したが、このことにより現実のデータのプロットである  $g1$  と、解曲線  $g2$  の大きなずれが生じたと思われる

[問 31] 実験 12 において、パラメータ  $\gamma$  の値を適当な時間  $t$  のときのデータで決定し、解曲線と現実のデータの一致の様子を調べよ。

#### 5.4 モデルの共通点

- 微分方程式(5.1)の解曲線(5.3)のパラメータを適当に決めると、下図のように結構うまく大阪府のデータを表すことができる



[考察 11] 実験 14 では FindFit ではなく、Solve を用いて解曲線を求めた。それはなぜか。

■もう一度，微分方程式の意味するところを確認しておこう

名称	式	意味するところ
初期条件	$y(0)=P$	最初はこうであった
微分方程式	$\frac{dy}{dt} = \lambda y(K-y)$	現在(の瞬間)はこうである
解(解曲線)	$y(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P} - 1\right) e^{-\lambda K t}}$	このままいけば将来はこうなるだろう

■人口増加に関するヴェルハースト・モデル(4.3)と，インフルエンザ患者数の増加のモデル(5.1)は本質的に同じであり，モデルの微分方程式の解曲線としてロジスティックカーブが現れた

■どちらの場合も，微分方程式の形

$$\frac{dy}{dt} = \gamma \left(1 - \frac{y}{K}\right) y \quad \dots(4.3)$$

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y(K-y) \quad \dots(5.1)$$

からわかるように，

(★) 増加率が「増えるもの」とそれに関して「相対的に減るもの」の積に比例するという形をしている

[Report4] (★)のように仮定してモデル化できる現象を考え，その現象のデータを集めて解析・検証せよ。

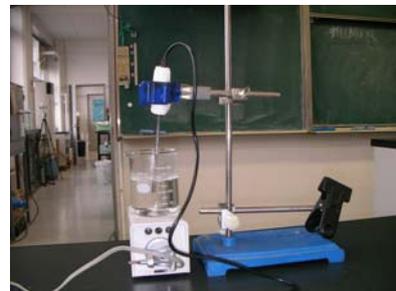
## 6 ものの冷え方

## 6.1 実験

■お湯やコーヒーは、放っておくと冷えていくが、その冷え方を探ってみよう

## 【実験 15】

ビーカーに熱湯を用意し、その中に温度センサーを入れる。始めに現在の気温と熱湯の温度を記録し、その後 10 秒おきに 5 分間温度を測って下の表に記録する。



## 【グラフ電卓で温度を測る方法】

- ① 接続ケーブルを使って、グラフ電卓と CBL2 をつなぐ。
- ② **2nd** [VAR-LINK] , **F3** を押して Receive を選択し、**ENTER** を押す。
- ③ CBL2 の TRANSFER を押すと、自動的にグラフ電卓に Datamate プログラムを転送する。
- ④ ステンレス製温度センサーをチャンネル 1 (CH1) に接続する。
- ⑤ HOME に『main\datamate ()』と入力し、**ENTER** を押すと、Datamate が起動する。
- ⑥ メイン画面で **1**SET UP を選び、**▼** で TIME GRAPH を選択し、**ENTER** を押す。
- ⑦ SELECT MODE 画面で **2**TIME GRAPH を選択すると、TIME GRAPH SETTINGS 画面が表示される。
- ⑧ **2**CHANGE TIME SETTINGS を押し、測定間隔, 測定回数を入力する。
- ⑨ **1**OK を何回か押し、メイン画面に戻る。
- ⑩ メイン画面で **2**START を押すと、データの収集を始める。

[問 32] (1) 表計算ソフトに実験データを入力して、水温の時間の関係をグラフで表してみよう。

気温T0(°C)	27.37
時間t(秒)	温度T(°C)
0	82.667
10	81.875
20	81.375
30	80.412
40	79.688
50	78.941
60	
70	
...	

(2) 水温と時間の関係について、「図的モデル」を作成してみよう。

(3) (2)をもとにモデル化し，微分方程式を作成してみよう。

(4) 実際のデータと(3)の結果を比較し，このモデルの検証をしよう。

(5) (4)で実際のデータと合わない場合，モデルを修正してみよう。

### 6.2 ニュートンの冷却法則

■実験 15 より，お湯が冷えていくときのモデル化について，次の微分方程式が成り立つことが予想される

時刻  $t$  におけるお湯の温度を  $T$ ，室温を  $T_0$  とすると，

$$\dots(6.1)$$

■微分方程式(6.1)で表される法則は，イギリスの偉大な数学者・物理学者であるニュートン(1642～1747)が発見し，**ニュートンの冷却法則**と呼ばれる。



## 7 過去を見る

7.1 考古学と  $^{14}\text{C}$  年代測定法

■2003年5月20日付の朝日新聞の朝刊に、次の内容の記事があった

稲作伝来、500年早まる 国立歴史民俗博物館が発表



調査に使われた土器群



土器に付着した炭化物の試料

(福岡市埋蔵文化財課城南整理室)

- ◆国立歴史民俗博物館は、水田稲作が日本に伝わり弥生時代が幕を開けたのは定説より約500年早い紀元前1000年ころ、と特定する研究を発表した
- ◆北部九州から出土した土器などから採取した試料を、同博物館の春成秀爾教授（考古学）と今村峯雄教授（歴史資料科学）を中心とする研究グループが、最新の放射性炭素（ $^{14}\text{C}$ ）年代測定法で分析し、結論づけた

■新聞記事にある  $^{14}\text{C}$  年代測定法とは、古代の遺跡から出土した木造建築物や木造の容器などがいつ頃作られたものであるか、土器などに付着した炭化物がいつ頃の物であるか、等を調べる方法である

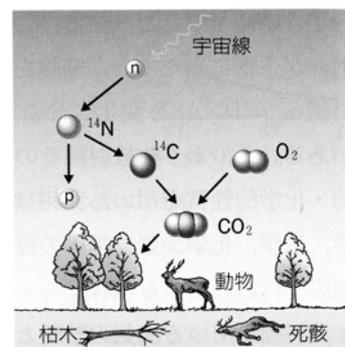
■この測定方法は、以下の原理によっている

- (1) 放射性炭素  $^{14}\text{C}$  は、宇宙線中性子と  $^{14}\text{N}$  との核反応で生成する
- (2)  $^{14}\text{C}$  は、地域的にも経年的にもほぼ一定の濃度で大気中の炭酸ガスに含まれている
- (3)  $^{14}\text{C}$  は、生物体の有機物中にも大気中とほとんど同じ濃度で含まれている
- (4) 生物が死ぬと、生物体への新たな  $^{14}\text{C}$  の供給がなくなるので、 $^{14}\text{C}$  の量は時間と共に、その半減期(5730年)にしたがって減少する
- (5) この減少量から年代を求める

■半減期とは、素粒子・原子・分子・イオンなどの量が時間とともに減少するとき、その量のはじめの半分になるのに要する時間のことであり、特に放射性核種の崩壊の速さや、素粒子の寿命を表すのに用いられる

(例) アクチニウム  $^{217}\text{Ac}$  の半減期は 0.018 秒

ウラン  $^{238}\text{U}$  の半減期は 45 億年(地球の年齢！)



## 7.2 ラザフォードの崩壊モデル

■ $^{14}\text{C}$ 年代測定法を、モデル化して数学的に考えてみよう

■時刻  $t$  における  $^{14}\text{C}$  の個数を  $x=x(t)$  とすると、微小時間  $\Delta t$  の間に  $\Delta x$  だけ  $^{14}\text{C}$  が崩壊したとすると、 $\Delta x$  は  $^{14}\text{C}$  の個数  $x$  と微小時間  $\Delta t$  に比例すると考えるのが自然だろう

[問 33] (1) 上記のアンダーラインの部分を、等式で表せ。

(2) (1)より、 $^{14}\text{C}$  の崩壊率の微分方程式を求めよ。

■ $^{14}\text{C}$  のような放射性物質の崩壊のしかたを記述するモデルを

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x \quad (\lambda \text{ は崩壊定数}) \cdots (7.1)$$

と定式化したのが、イギリスの物理学者でありノーベル化学賞を受賞したラザフォード (1871~1937) である

■ラザフォードは、 $\alpha$ 線と $\beta$ 線の発見、ラザフォード散乱による原子核の発見、原子核の人工変換などの業績により「原子物理学 (核物理学) の父」と呼ばれている

## 7.3 微分方程式で過去を見る

■ $^{14}\text{C}$ 年代測定法を、実際に使ってみよう

[課題]

放射性炭素  $^{14}\text{C}$  の半減期は、5730 年である。現在の空気中の  $^{14}\text{C}$  の濃度が 1% であり、昔も変わらないものと仮定する。ある遺跡から出土した古い建築物の柱を調べたところ、 $^{14}\text{C}$  の濃度が 0.77% であったという。この木造建築物の柱の木材が、今から何年前に山から切り出されたかを推定せよ。

[解答]

時刻  $t$  における  $^{14}\text{C}$  の濃度(個数)を  $x=x(t)$  とおくと、

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x$$

よって、 $\frac{dx}{x} = -\lambda dt$

両辺を積分して、 $\int \frac{dx}{x} = -\int \lambda dt$

よって、 $\log|x| = -\lambda t + C$  ( $C$  は任意定数)

ゆえに、 $A = \pm e^{-C}$  とおくと、

$$x = Ae^{-\lambda t} \quad \cdots (7.2)$$

- [問 34] (1)  $t=0$  のとき,  $x=0.01$  であることから, 定数  $A$  の値を求めよ。  
 (2)  $t=5730$  のとき,  $x$  が半減していることから, 崩壊定数  $\lambda$  の値を求めよ。  
 (3) 木材が切り出された年代を推定せよ。

■微分方程式(7.1)の解を, 初期条件  $x(0)=x_0$  のもとで解くと,  
 (7.2)において  $t=0$  として,  $A=x_0$   
 よって,  $x=x_0e^{-\lambda t}$  …(7.3)

- [問 35] (1) ある放射性核種の半減期を  $\tau$  とするとき, 解(7.3)を利用して崩壊定数  $\lambda$  を半減期  $\tau$  を用いて表せ。  
 (2) 解(7.3)より,  $t$  を半減期  $\tau$  を用いて表せ。

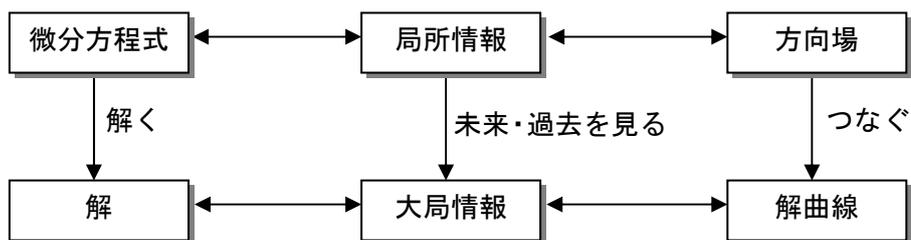
■問 35 の結果を利用して, 以下の問題を考えよう

[問 36] フランスの有名なラスコー洞窟から検出された木炭の, 1950 年における崩壊率は 0.97 であり, 生きている木の崩壊率は 6.68 であった。木炭が形成された年代を計算して, 洞窟の中に描かれた有名な絵の年代を求めよ。

[問 37] イングランド南部にあるウィンチェスター城のホールの壁面には, 右の写真のような直径約 5.5m, 25 個の扇形に区切られた円卓が取り付けられている。何人かの専門家が, これを本物のアーサー王の円卓だと考えていたが, 近年その信憑性について  $^{14}\text{C}$  年代測定法を利用した考察がなされた。1977 年に行われた測定から, 円卓から検出された木の崩壊率は 6.08 であり, 生きている木の崩壊率は 6.68 であった。この円卓が本当にアーサー王のものであるかどうかを考察せよ。ただし, アーサー王は, 5 世紀半ばにイギリス南西端のコーンウォール地方を中心に, アングロサクソンと戦ったブリテン人の伝説的な王である。



■以上のように, 微分方程式を解くことで過去も見るできるのである



## ◆◆Topics◆◆

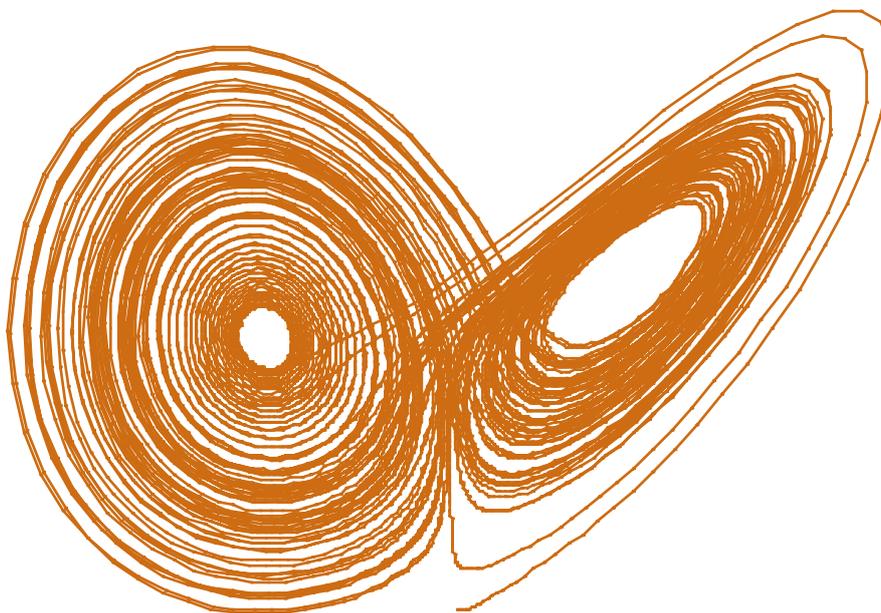
アメリカの気象学者ローレンツ(1917~)は、流体の対流現象の研究のため、次の連立微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -p(x-y) \\ \frac{dy}{dt} = -xz + rx - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases} \quad (p, r, b \text{ は定数})$$

の解の振る舞いを研究した。そのとき、初期値を少し変えるだけで、その後の解の様子が大きく変わることを発見し、これがカオス研究の始まりとなった。

*Mathematica* でローレンツ方程式を数値解として求め、それを空間上にプロットすると下のようになる。

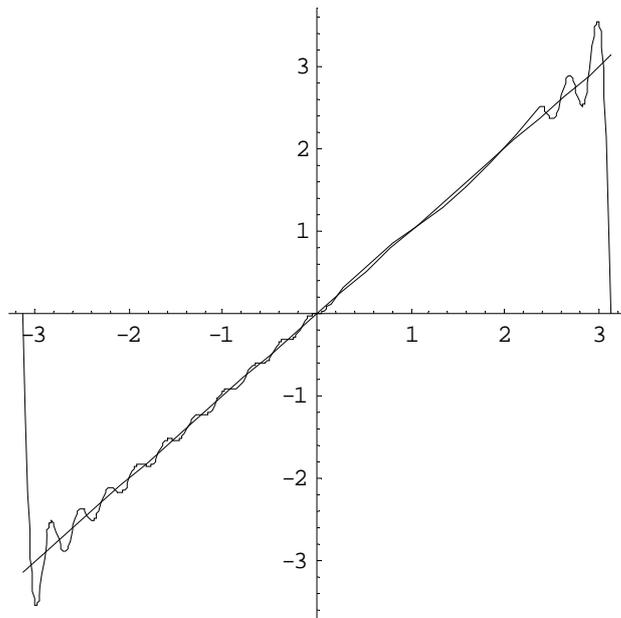
```
In[2]:= sol = NDSolve[
  {x'[t] == -10 (x[t] - y[t]),
   y'[t] == -x[t] z[t] + 28. x[t] - y[t],
   z'[t] == x[t] y[t] - 2.7 z[t],
   x[0] == z[0] == 0, y[0] == 1},
  {x, y, z}, {t, 0, 100}, MaxSteps -> Infinity];
In[3]:= ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. sol], {t, 0, 100},
  PlotPoints -> 10 000, Axes -> False, Boxed -> False]
```



- 上の図は、ローレンツモデルにおいて3変数  $x$ ,  $y$ ,  $z$  のとる値を、3次元空間上で時間とともに変化する様子を軌道として表示したもので、ローレンツ・アトラクタと呼ばれる
- ローレンツ・アトラクタは、美しい蝶の羽のような形をしていて、このアトラクタの軌道は常に羽の範囲内に収まっているが、二度と同じところを通過しない

## 第 5 章

### 音(波)を解析する



1 音

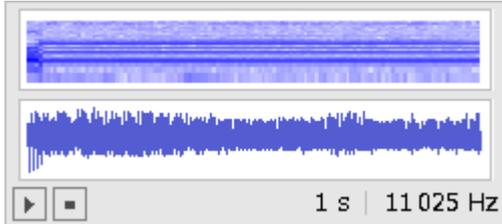
1.1 アイウエオ

[実験 1]

*Mathematica* で、音声を録音し、視覚化してみよう。

1. マイクを使って音声を入力する。まずは、「ア」。

```
onsei = SystemDialogInput["RecordSound"]
```



2. 音のデータをリストにする

```
data = Flatten[onsei[[1, 1]]]
```

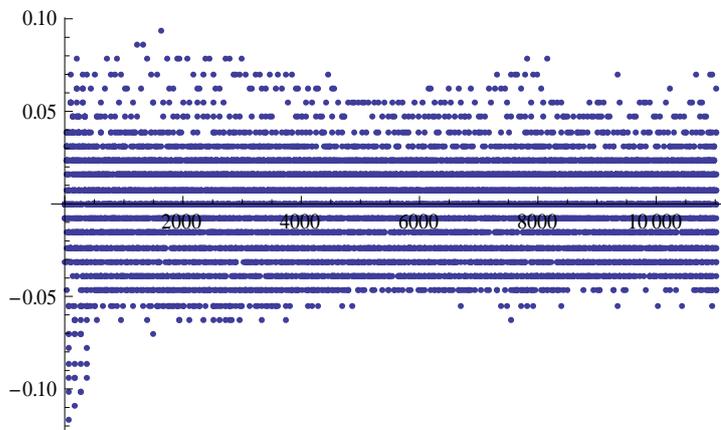
非常大きなリストが生成された以下表のサブです

```
{0., 0., -0.0078125, 0., 0., 0., 0., -0.0078125, 0., 0., 0., 0., 0., 0.,  
-0.0078125, -0.03125, -0.015625, 0., 0., -0.0078125, 0., 0.015625,  
0.0078125, 0.0234375, <<10 973>>, -0.015625, -0.015625, -0.0234375,  
-0.03125, -0.03125, -0.0390625, -0.046875, 0., 0.015625, 0.,  
0.0625, 0.0390625, -0.0078125, 0.0078125, -0.0234375, -0.046875,  
-0.046875, -0.015625, 0., 0.0078125, 0.015625, 0.0390625, 0.0078125}
```

表を狭くも全表を大きく制限

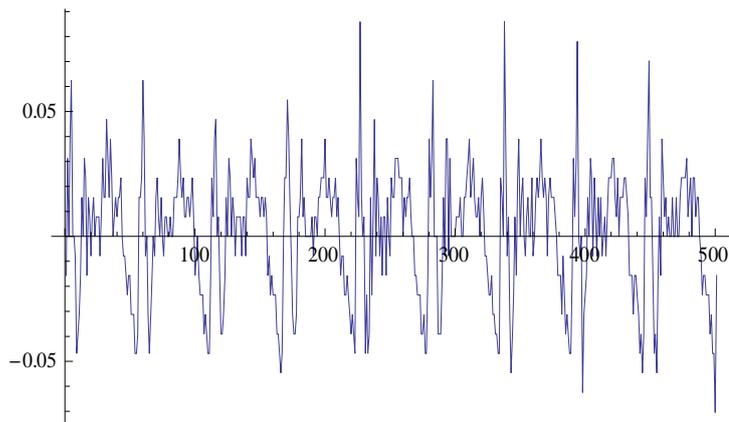
3. 音をグラフ化する

```
ListPlot[data]
```



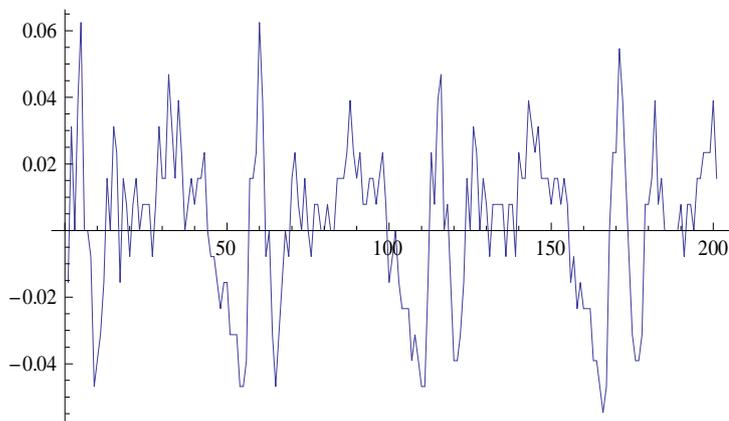
4.目盛を読んで、一部分を拡大する

```
ListLinePlot[Take[data, {1000, 1500}], PlotRange -> All]
```



5.もっと拡大してみる

```
ListLinePlot[Take[data, {1000, 1200}], PlotRange -> All]
```



7. 以下同様にして、「イ」「ウ」「エ」「オ」も実験する

[考察1] 「ア」, 「イ」, 「ウ」, 「エ」, 「オ」の音の視覚化を見て、気づいた点を述べよ。

[考察2] 隣の人の「ア」, 「イ」, 「ウ」, 「エ」, 「オ」の声の視覚化と、自分の声の視覚化を比較して、気づいたことを述べよ。

■これから、音(声)を数学的・理学的に理解していこう

■コンピュータでは、アナログ信号である音をデジタル信号に数値化(サンプリング)して記録する

■音声をデジタルデータに変換する方式の1つを、PCM(Pulse Code Modulation)という

■デジタル化の際の基本的な量として、サンプリング周波数と量子化ビット数がある

- **サンプリング周波数**は、アナログ信号からデジタル信号への変換(AD 変換)を、1 秒間に何回行なうかを表す数値で、単位は Hz(ヘルツ)

ある音を正確に記録して再現するには、その音の周波数の倍程度の周波数でサンプリングする必要があり、CD で採用されているサンプリング周波数は 44.1kHz である(1 秒間に 44100 回のデータを記録するという)

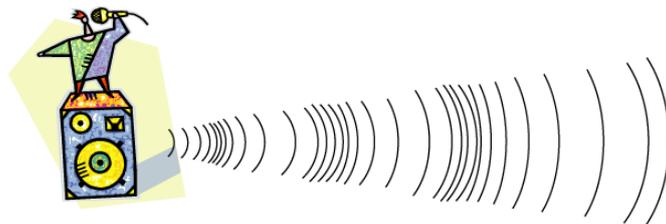
- **量子化ビット数**は、アナログ信号からデジタル信号への変換(AD 変換)の際に、信号を何段階の数値で表現するかを示す値

この値が高いほど、元の信号に忠実なデータが得られるが、データ量はその分増大する  
(例) 量子化ビット数が 8 ビットの場合は、得られた信号を 0~255 の 256 段階の数値で表現する( $2^8=256$ )

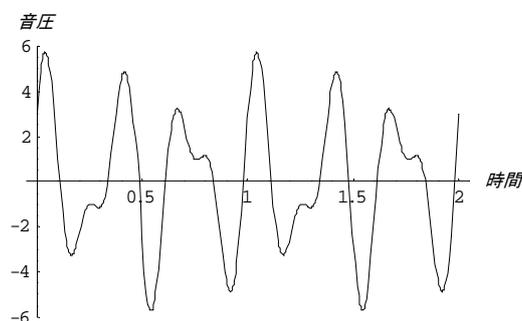
16 ビットになると、0~65535 の 65536 段階で表現するため、8 ビットの場合よりも細かい違いを表現できる( $2^{16}=65536$ )

## 1.2 音波

- 音は空気を伝わる波である
- 音源が振動する→周辺の空気を押ししたり引いたりする→周辺の空気に疎密が生じる  
→疎密は空気中を波として伝わる



- 音の波が空気中を伝わっていくとき、媒質である空気は波の進行方向に平行な方向に振動するが、このような波を縦波という
- 空気が密=圧力が上昇、空気が粗=圧力が下降
- 音とは伝搬する空気圧の波であり、空気の圧力変動は下のようなグラフとなる



- 大気圧を基準として、そこからの圧力変動のことを音圧という
- 大気圧は約 1000 hPa (ヘクトパスカル)= 100,000 Pa
- 普通に会話しているときの音圧は、たったの 0.002 Pa (大気圧の 5000 万分の 1!)
- 音には 3 つの重要な属性がある: 「大きさ」、「高さ」、「音色」

## 1.3 音の大きさ

■音圧が大きいほど音は大きく聞こえる

■音圧の大きさと、音の大きさを感じる感覚の関係：「ウェーバー・フェヒナーの法則」

感覚を知覚される量だけ増加させるのに必要な刺激の増加量は、すでに存在する刺激量に比例する

(例) 音圧 1 の静かな音と、音圧 100 の大きな音の 2 通りの音を考える

静かな音を聴きながら音圧を 0.1 だけ上げて 1.1 にする

→ いくらか音が大きくなったという感覚をもつ

大きな音を聴きながら音圧を 0.1 だけ上げて 100.1 にする

→ 静かな音のときと違い、音が大きくなった感覚は得られない

→ 同じような感覚を得るためには、音圧を 10 上げて 110 にしなければならない

☆ 2 つの刺激に対する感覚強度の違いは、刺激強度の比に比例している： $\frac{0.1}{1} = \frac{10}{100}$

(差に比例するのではない)

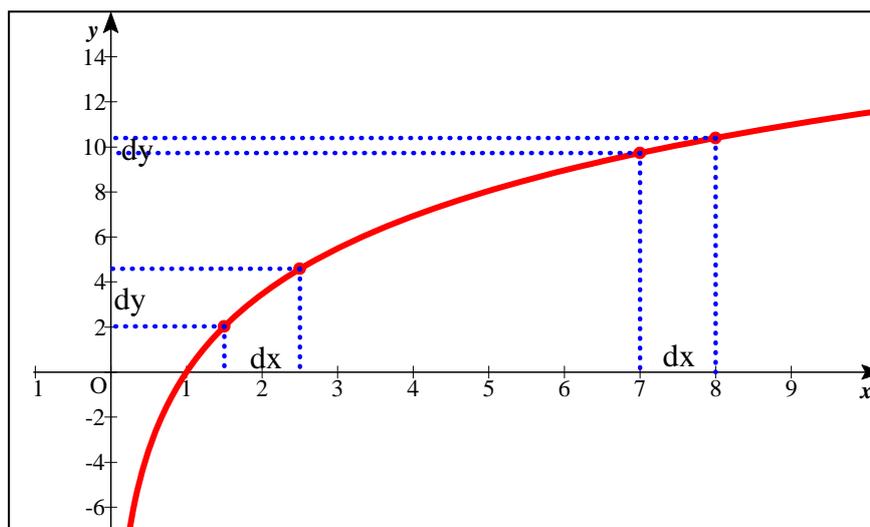
[問 1] 現実生活の中にある、「ウェーバー・フェヒナーの法則」の例を調べよ。

■このような音の関係を表現するには、対数を用いるのが便利

■音圧の単位は dB (デシベル) であり、最小可聴音の音圧  $a = 0.00002 \text{ Pa}$  を 0 dB として、音圧が 10 倍になるときに 20 dB 増えるように決める

(例) 音圧が 100 倍だと 40dB, 1000 倍だと 60dB

[問 2]  $x \text{ Pa}$  の音圧を dB で表す式を、対数を用いて書け。そして、下のグラフを利用して、ウェーバー・フェヒナーの法則を説明せよ。



■最大可聴音圧は 120dB とされている

[問 3] 最大可聴音圧の 120dB は、最小可聴音圧の何倍か調べよ。

- 人間の耳は、非常に広範囲の音圧レベルをカバーしている優秀なセンサー

音	音圧(単位 Pa)	音圧(単位 dB)
最小可聴音	0.00002	0
ささやき声(1m)・深夜の郊外	0.0002	20
会話(1m)・閑静な住宅街	0.002	40
街の雑踏	0.2	80
地下鉄内	0.5	90
ジェットエンジン(50m)	20	120

#### 1.4 音の高さ

- 考察 1, 2 で考えたように、音の高低は空気の振動の速さに関係している
- 振動の速さは、1 秒間に何回振動するかを示す周波数によって表され、Hz(ヘルツ)という単位を用いる

(例) 周波数 20Hz の音 = 1 秒間に 20 回振動する音

- 低い音は周波数が低く、高い音は周波数が高い

- 動物の可聴周波数

人	犬	猫	イルカ	コウモリ
20Hz~20kHz	15Hz~50kHz	60Hz~65kHz	50Hz~150kHz	1kHz~120kHz

- 20Hz より低い音は超低周波音と呼ばれ、逆に 20kHz より高い方は超音波と呼ばれる
- 超低周波音は騒音公害と関係があり、超音波は、医療、魚群探知、自動ドアのセンサー、眼鏡の洗浄などで利用される

- 音の高さの感覚（ピッチと呼ぶ）と周波数の関係は、非常にきれいな対数関係をなし、音の高さがオクターブ上がるごとに、周波数は倍々になる

弦楽器のチューニングに用いる A 音（ラ）の周波数は 440 Hz

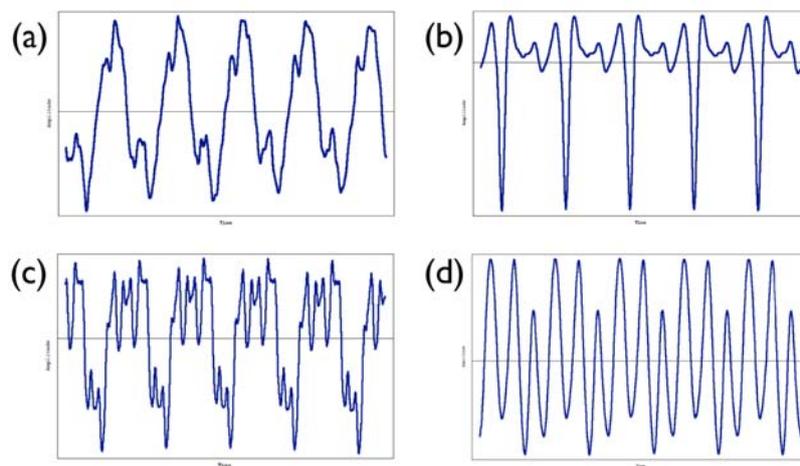
1 オクターブ上の A 音は 880 Hz, 2 オクターブ上の A 音は 1760Hz

1 オクターブ下の A 音は 220Hz

## 1.5 音の音色

■いろいろな楽器の音や人の声を聞き分けることができる→これが音色の違い

■実際のいろいろな音の波形



(a) ピアノ      (b) トランペット      (c) オルガン      (d) クラリネット

[問4] 各楽器の音色の違いは、何に関係しているか。

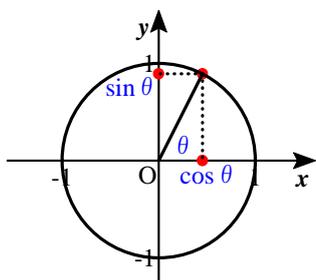
■音の波形はバラエティに富んでいるので、波形を漫然と眺めていただけではその波の性質は分からないので、数学的に考えよう

[問5] 波を調べたり、表現するのに適した数学の関数としては、何が考えられるか。

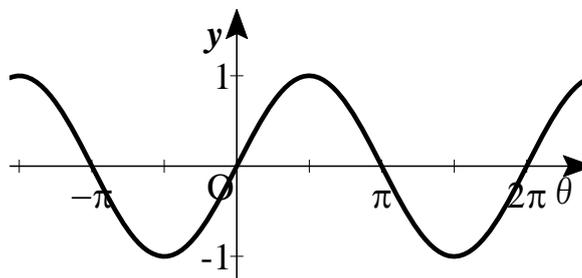
## 2 フーリエ級数

### 2.1 三角関数

#### ■三角関数の復習



$\sin \theta, \cos \theta$  の定義



$y = \sin \theta$  のグラフ

■上図の点 P が、円周上を一定の速度で 1 秒間に  $f$  周する と考えるとき、 $f$  を周波数といい、単位は **Hz** を用いる

■このとき、P は 1 秒間に角度として  $2\pi f$  ラジアン回転する

■また、点 P が 円周上を 1 周するのにかかる時間は  $\frac{1}{f}$  であり、これを 周期  $T = \frac{1}{f}$  という

■点 P が時刻 0 に点 A から出発すると、時刻  $t$  では角度  $2\pi ft$  だけ回っている

■時刻  $t$  に対し、点 P の  $y$  座標を対応させる関数  $y = \sin 2\pi ft$  を考えると、これは周期

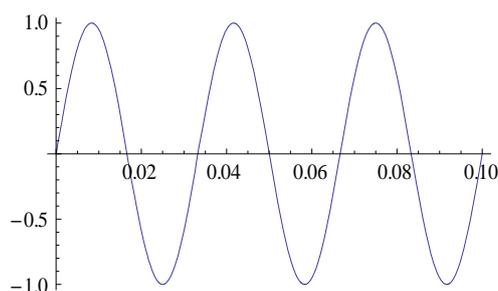
$T = \frac{1}{f}$  を持つ周期関数

#### [実験 2]

*Mathematica* で、サインカーブを描いて、その音も聞いてみよう。

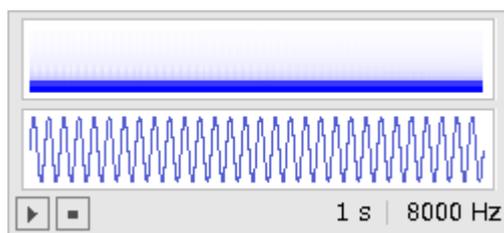
1. 周波数 30Hz のサインカーブを描く

```
Plot[Sin[2 Pi 30 t], {t, 0, 0.1}]
```



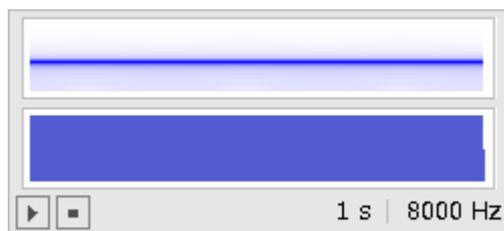
2. 周波数 30Hz のサインの音を聞く

```
Play[Sin[2 Pi 30 t], {t, 0, 1}]
```



3. 周波数 300Hz のサインの音を聞く

```
Play[Sin[2 Pi 300 t], {t, 0, 1}]
```



[問 6] *Mathematica* で、様々な周波数のサインカーブを描いて、その音も聞いてみよ。

■ 点 P の出発点を点 A ではない別の点にとり、波の振れ幅を  $a$  とすると、その音(波)の式は  $y = a \sin(2\pi ft + \phi)$  となり、 $a$  を振幅、 $\phi$  を初期位相という

■  $y = a \sin(2\pi ft + \phi)$

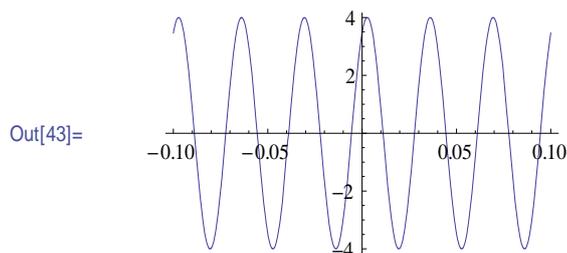
は、振幅  $a$ 、周波数  $f$ 、周期  $T = \frac{1}{f}$ 、初期位相  $\phi$  を持つサインカーブ

[実験 3]

*Mathematica* で、振幅 4、周波数 30Hz、初期位相  $\frac{\pi}{3}$  のサインカーブを描き、その音も聞いてみよう。

1. 振幅 4、周波数 30Hz、初期位相  $\frac{\pi}{3}$  のサインカーブを描く

```
In[43]:= Plot[4 Sin[2 Pi 30 t + Pi/3], {t, -0.1, 0.1}]
```



2. 振幅 4、周波数 30Hz、初期位相  $\frac{\pi}{3}$  のサインカーブの音を聞く

```
In[44]:= Play[4 Sin[2 Pi 30 t + Pi/3], {t, 0, 1}]
```

[問 7] *Mathematica* で、振幅、周波数、初期位相を変えてサインカーブを描き、その音も聞いてみよ。

## 2.2 複雑な波

- 以下, 周期的な音(波)を考える
- 関数(波)が周期  $T$  の周期関数(周期的な波)であるとは,

$$F(t+T)=F(t)$$

が成立することである

(例)  $y=\sin t$  は, 周期  $2\pi$  の周期関数(周期的な波)である

- サインカーブは, 非常にきれいな周期的な波であるが, 「ア」, 「イ」「ウ」「エ」, 「オ」をはじめとして, 現実の音(波)はもっと複雑である

## [実験 4]

*Mathematica* で, サインを利用して複雑な波を描いてみよ。どうすればよいか?

- 周波数が  $f$ , 周期  $T=\frac{1}{f}$  のサインカーブ  $\sin 2\pi ft$  を考える
- ここで, 周波数がもとの周波数の整数倍の  $2f$ ,  $3f$ ,  $4f$ ,  $\dots$ であるサインカーブを考えると, これらのサインカーブは,

$$\sin 2\pi nft \quad (n \text{ は整数}) \cdots (2.1)$$

と表せる

[問 8] サインカーブ(2.1)の, 周波数と周期を求め, そのことを示せ。

- ここで, (2.1)の波の振幅を増幅したサインカーブ  $a_n \sin 2\pi nft$  を考えても, やはりこの波は周期  $\frac{1}{nf}$  の波であるから, 周期  $T = \frac{1}{f}$  を持つことは明らか

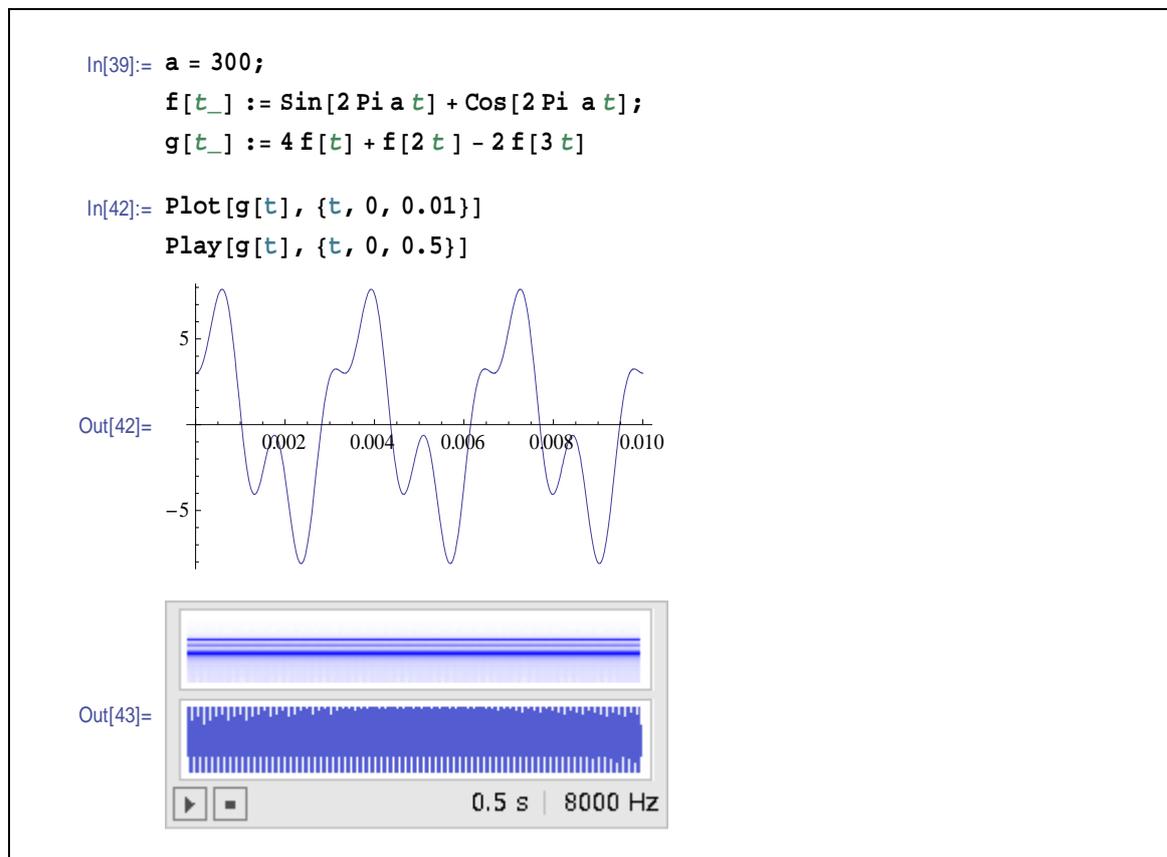
- これらの周期  $T$  を持つサインカーブのコレクションを足し合わせると, 周期をもった複雑な波ができる

$$F(t)=a_1 \sin 2\pi ft + a_2 \sin 2\pi 2ft + a_3 \sin 2\pi 3ft + \cdots + a_n \sin 2\pi nft \cdots (2.2)$$

[問 9] 波(2.2)は原点を通り, 周期  $T$  の波であることを示せ

## [実験 5]

振幅  $a_n$ , 周波数  $f$ , サインカーブの個数  $n$  を適当に決めて, *Mathematica* で関数(2.2) のグラフ(波)を描いてみよ。さらに, その波を聴いてみよう。



[問 10] 振幅  $a_n$ , 周波数  $f$ , サインカーブの個数  $n$  を変えて, *Mathematica* で関数(2.2) のグラフ(波)を描いてみよ。

■ 関数(2.2)のグラフ(波)は, 常に原点を通る複雑な波である

[問 11] 原点以外を通る複雑な波を表すには, どのようにすればよいか。

■ 基本周波数の整数倍の周波数をもつサインとコサインを使って, 究極の複雑な波を表す

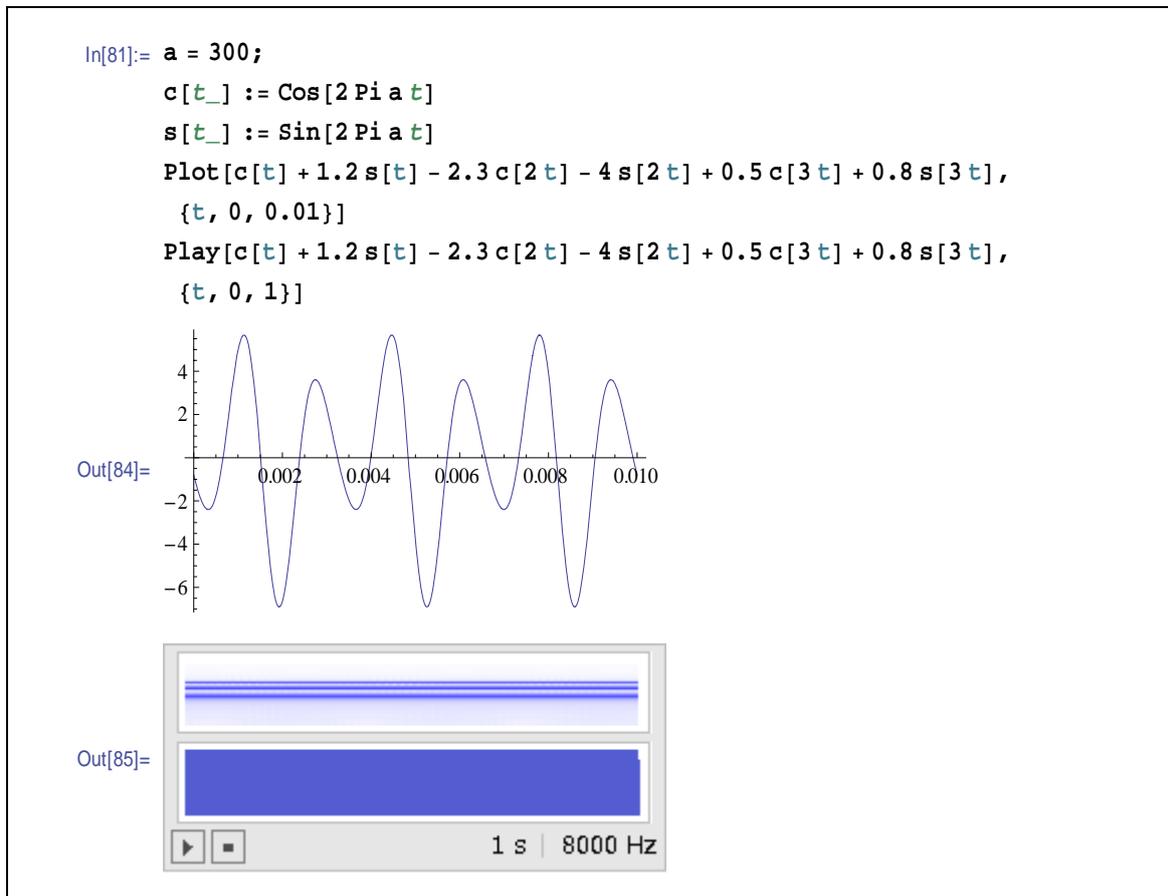
$$\begin{aligned}
 F(t) = & a_0 + a_1 \cos 2\pi ft + b_1 \sin 2\pi ft + a_2 \cos 2\pi 2ft + b_2 \sin 2\pi 2ft \\
 & + a_3 \cos 2\pi 3ft + b_3 \sin 2\pi 3ft + \cdots + a_n \cos 2\pi nft + b_n \sin 2\pi nft + \cdots \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

$\Sigma$  を使って表すと,

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi nft + b_n \sin 2\pi nft) \quad (2.4)$$

[実験 6]

振幅  $a_n$ ,  $b_n$ , 周波数  $f$ , 個数  $n$  を適当に決めて, *Mathematica* で関数(2.4)のグラフ(波)を描いてみよ。



[問 12] 振幅  $a_n$ ,  $b_n$ , 周波数  $f$ , 個数  $n$  を変えて, *Mathematica* で関数(2.4)のグラフ(波)を描いてみよ。

■つまり, 単純な波の和で複雑な波を表せるのであり, (2.4)をフーリエ級数という

■ $f$ : 周波数,  $T$ : 周期とすると,  $T = \frac{1}{f}$  であるから,

$$\begin{aligned}
 F(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n f t + b_n \sin 2\pi n f t) \\
 &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2\pi n}{T} t + b_n \sin \frac{2\pi n}{T} t \right)
 \end{aligned}$$

### 3 フーリエ級数展開

#### 3.1 波の分解

- 周期的な波を組み合わせることで、周期的な複雑な波を作ることができた
- では逆に、複雑な波は単純な波に分解できるのだろうか？
- これ以降、 $\omega = 2\pi f$ を**角速度**という
- ある人の声「ア」の基本周期  $T$  と基本周波数  $f$  を求めると、 $\omega = 2\pi f = 37440$  であった
- したがって、「ア」をあらわす波は、

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 37440nt + b_n \sin 37440nt) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \cdots (3.1) \end{aligned}$$

と表せる

- ア、イ、ウ、エ、オを同じ高さで言うと、基本周波数  $f$  は同じであるから、角速度  $\omega$  は同じである
- したがって、単純な波の足しあわせの式は全部同じで(3.1)となるが、 $a_n, b_n$  の値によって、波の形が違ってくる
- そこで、 $a_n, b_n$  を決定する必要がある！

#### 3.2 係数を取り出すフィルタ

- フーリエ級数

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \cdots (3.1)$$

の係数  $a_n, b_n$  を取り出すフィルタを探す

- $a_0$  を取り出すには、(3.1)の  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$  の部分がなくなればよい

[問 13] 波(3.1)の周期を  $T$  とする。波  $y = a_n \cos n\omega t$ ,  $y = b_n \sin n\omega t$  の概形を描け。

[問 14] 問 13 の概形より、次の等式を証明せよ。

$$\int_0^T a_n \cos n\omega t dt = 0, \quad \int_0^T b_n \sin n\omega t dt = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

[問 15] 定積分の計算を行い、次の等式を証明せよ。

$$\int_0^T a_n \cos n\omega t dt = 0, \quad \int_0^T b_n \sin n\omega t dt = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

[問 16] (3.1)の両辺を積分することにより,  $a_0$ を求めよ。

※ 項別積分が, (3.1)のような無限級数に対して成り立つかどうかは, いまは触れないでおく。

■以上のことより,

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \cdots (3.2)$$

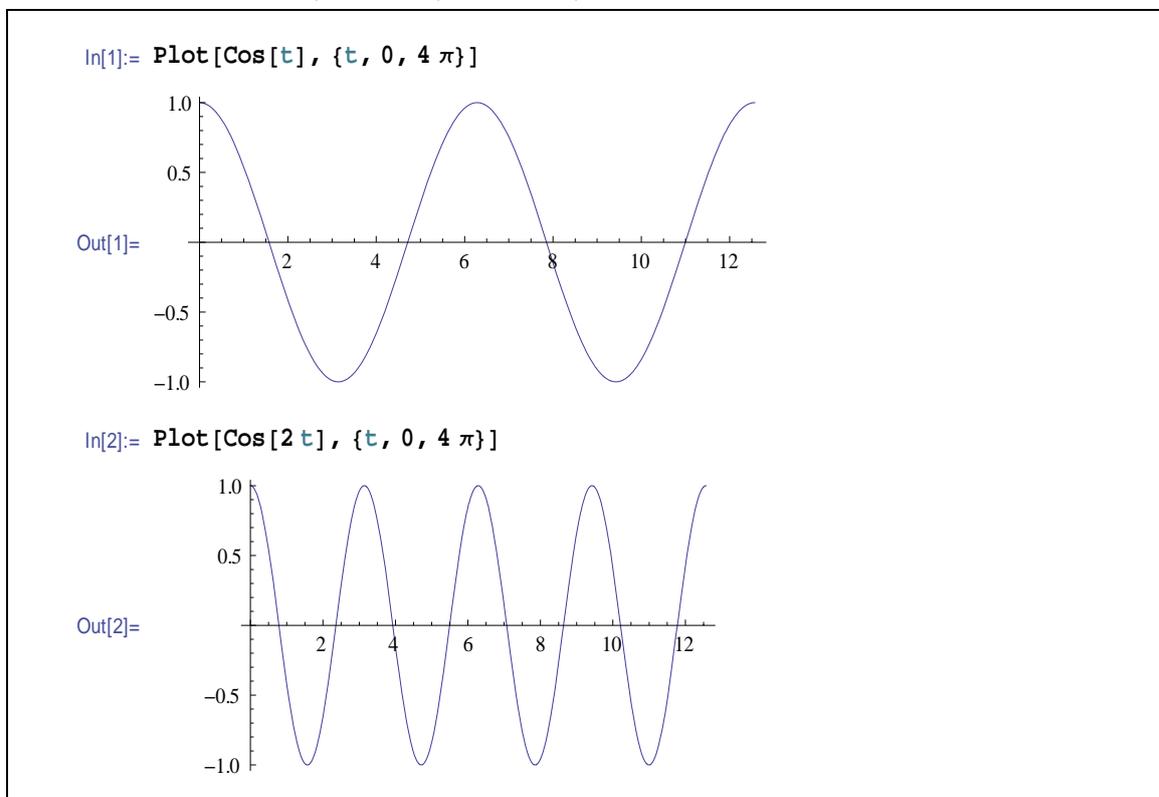
■次に, 係数  $a_1$ を取り出すフィルタを考える

■そのまま積分すると, 対称性により  $a_0$ 以外の部分は積分の値が 0 になるので,  $a_1 \cos \omega t$  だけマイナスの部分をプラスに変えたい

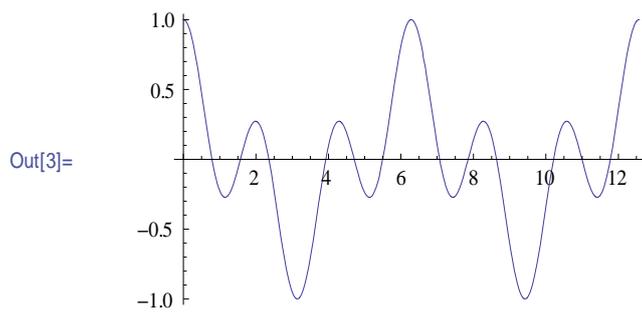
[問 17]  $a_1 \cos \omega t$  だけマイナスの部分をプラスに変えて積分の値を 0 にせず,  $a_n \cos n \omega t$  ( $n=2, 3, \dots$ ),  $b_n \sin n \omega t$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ )の積分の値を 0 にするには, どうすればよいか。

[実験 7]

*Mathematica* で,  $y = \cos t$ ,  $y = \cos 2t$ ,  $y = \cos t \cdot \cos 2t$  のグラフを描け。



```
In[3]:= Plot[Cos[t] Cos[2 t], {t, 0, 4 π}]
```



[問 18] *Mathematica* で、次のそれぞれのグラフを描け。

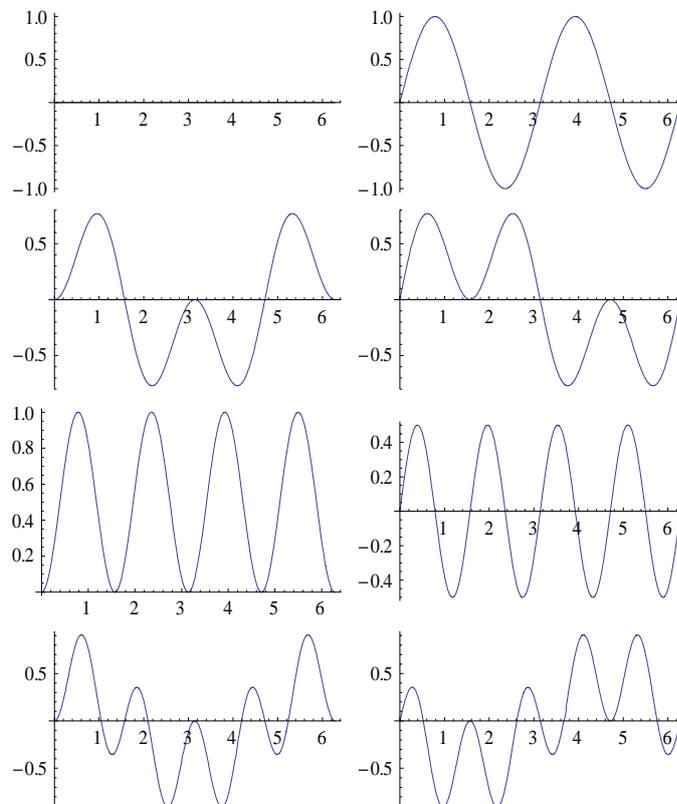
- (1)  $y = \cos t$ ,  $y = \cos t$ ,  $y = \cos t \cdot \cos t$
- (2)  $y = \cos 2t$ ,  $y = \cos 3t$ ,  $y = \cos 2t \cdot \cos 3t$
- (3)  $y = \cos 3t$ ,  $y = \cos 3t$ ,  $y = \cos 3t \cdot \cos 3t$

[問 19] 実験 7, 問 18 の結果から、問 17 の解答を求めよ。

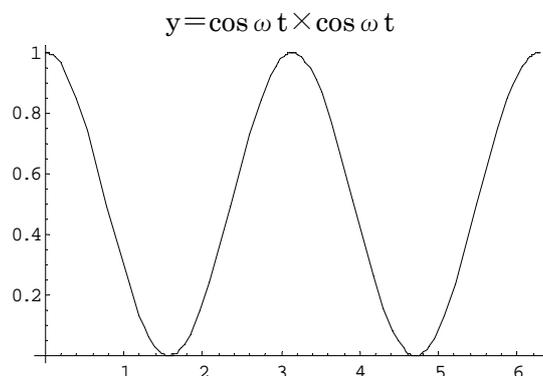
```
In[47]:= h[x_] := Sin[2 x]
```

```
Table[{Plot[Sin[n x] h[x], {x, 0, 2 Pi}], Plot[Cos[n x] h[x], {x, 0, 2 Pi}]},
      {n, 0, 3}] // TableForm
```

Out[48]//TableForm=



- $a_1 \cos \omega t$  のマイナス部分だけをプラスにするには、プラスの部分にプラスをかけ、マイナス部分にマイナスをかければよい  
つまり、同じ角速度で上下する波をかければよいので、 $\cos \omega t$  をかける！



- 周期が違う部分は、面積(定積分の値)は 0 になることを証明する  
 $n, m$  を整数とすると、次の定積分の値を求める。

$$[1] \quad \int_0^T \cos n\omega t \cos m\omega t dt$$

$$\int_0^T \cos n\omega t \cos m\omega t dt = \frac{1}{2} \int_0^T \{ \cos(n+m)\omega t + \cos(n-m)\omega t \} dt$$

より、

- (i)  $n \neq m$  のとき

$$\begin{aligned} \int_0^T \cos n\omega t \cos m\omega t dt &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(n+m)\omega t}{(n+m)\omega} + \frac{\sin(n-m)\omega t}{(n-m)\omega} \right]_0^T \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin(n+m)\omega T}{(n+m)\omega} + \frac{\sin(n-m)\omega T}{(n-m)\omega} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin 2(n+m)\pi}{(n+m)\omega} + \frac{\sin 2(n-m)\pi}{(n-m)\omega} \right\} \quad (\because \omega T = 2\pi) \\ &= 0 \quad (\because n, m \text{ は整数}) \end{aligned}$$

- (ii)  $n = m$  のとき

$$\begin{aligned} \int_0^T \cos n\omega t \cos m\omega t dt &= \int_0^T \cos^2 n\omega t dt = \frac{1}{2} \int_0^T (1 + \cos 2n\omega t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ t + \frac{\sin 2n\omega t}{2n\omega} \right]_0^T = \frac{1}{2} \left( T + \frac{\sin 2n\omega T}{2n\omega} \right) \\ &= \frac{T}{2} \quad (\because \omega T = 2\pi) \end{aligned}$$

[問 20] 次の定積分の値を求めよ。

$$[2] \quad \int_0^T \cos n\omega t \sin m\omega t dt$$

$$[3] \quad \int_0^T \sin n\omega t \sin m\omega t dt$$

※ 定積分[1], [2], [3]は, 数学Ⅲの頻出問題だ。

[問 21] [1], [2], [3]を利用して, 係数  $a_1$  を求めよ。

[問 22] 係数  $a_n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ )を求めよ。

■以上より,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt \cdots (3.3) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

■同様にして,  $b_n$ 用のフィルタを考える

[問 23] 係数  $b_n$  を求めよ。

■問 23 より,

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt \cdots (3.4)$$

■以上①～③をまとめて、フーリエ係数といい、次の定理を得る

[定理 1] フーリエ級数展開

$f(t)$  を周期  $T$  の周期関数とする。すなわち、 $f(t+kT)=f(t)$  ( $k$  は整数) であるとき、 $f(t)$  は次のように表せる。ただし、 $\omega = \frac{2\pi}{T}$  である。

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt$$

※ 上記の定理が成り立つためには、実は周期関数  $f(t)$  に次ような条件が必要となる。

(条件)  $f(t)$  は周期  $T$  の連続かつ微分可能な関数であり、 $f'(t)$  も連続関数である。

または、次の条件でもよい。

(条件)  $f(t)$  は周期  $T$  の連続関数であり、1 周期の区間  $[0, T]$  においては有限個の点で折れ曲がっているとす。それらの折れ曲がっている点を除いて  $f(t)$  は微分可能であり、その導関数  $f'(t)$  も連続である。

※  $f(t)$  が連続関数  $\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow a} f(t) = f(a)$

※  $f(t)$  が微分可能関数

$\Leftrightarrow$  任意の  $a$  に対して、極限值  $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta t) - f(a)}{\Delta t}$  が存在する

■定理 1 を使いやすく書き換えよう。

[定理 2] フーリエ級数展開

$f(t)$  を周期  $2\pi$  の周期関数とする。すなわち、 $f(t+2k\pi)=f(t)$  ( $k$  は整数) であるとき、 $f(t)$  は次のように表せる。

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ntdt$$

(証明)

定理 1 において,  $T=2\pi$  とすると,  $\omega=1$  である。

よって,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

また, 定理 1 より,

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} f(t) dt + \int_{\pi}^{2\pi} f(t) dt \right\}$$

ここで, 定積分の第 2 項において,  $t=x-2\pi$  とおくと,

$$dt = dx$$

$$t: \pi \rightarrow 2\pi \text{ のとき, } x: -\pi \rightarrow 0$$

また,  $f(t)$  の周期は  $2\pi$  より,

$$f(x-2\pi) = f(x)$$

よって,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} f(t) dt + \int_{-\pi}^0 f(x-2\pi) dx \right\} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} f(t) dt + \int_{-\pi}^0 f(x) dx \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \end{aligned}$$

同様にして,

(証明終わり)

[問 24] 定理 2 の証明を完成せよ。

### 3.3 数学者・物理学者フーリエ

- この章で学んだことを言い出したのは、フランスの数学者・物理学者であるジャン・バティスト・ジョゼフ・フーリエ男爵 (Jean Baptiste Joseph Fourier, Baron de 1768 年 ~ 1830 年) である
- 1807 年にフーリエは、熱伝導の数学的研究を通じて、次のようなことを主張した  
すべての周期関数は、単純な波である三角関数の級数で表すことができる  
すなわち、定理 1 がすべての周期関数で成り立つことを主張した
- フーリエは、波を幾つかの周波数の波の重ね合わせとして表示できるということを主張して、フーリエ変換で各周波数の波を取り出すことができることを証明した
- フーリエの主張は多くの数学者たちの注目を浴びたが、フーリエの証明は不十分なものであり、多くの数学者による議論が行われた
- これらの研究は、まだ関数という言葉の意味すら曖昧だった 19 世紀の解析学の厳密化に貢献し、後のリーマンの積分論やカントールの集合論も、フーリエ級数展開に関する研究から生まれた
- フーリエ展開やフーリエ変換を用いて関数を解析すること、特に関数を周波数成分に分解して調べることは、線型微分方程式を解くための強力な武器であるばかりでなく、物理学や工学において光や音、電波、振動、コンピュータグラフィックス、MRI や CT への利用など、幅広い分野で用いられている
- フーリエは、エジプト遠征中に発揮した行政・外交手腕をナポレオンに認められ、1802 年にイゼール県知事に任命されている
- エジプト滞在中に、健康と思索のためには砂漠のような熱気と乾燥が必要だと考えるようになったフーリエは、常に部屋を締め切って蒸し暑い状態にし、全身に真綿と包帯をミイラのようにぐるぐるに巻いて暮らすようになり、このことが原因で心臓に負担をかけ、死期を早めることになったという



## 4 フーリエ級数展開の具体例

フーリエが主張したことを，定理 2 を利用して具体的に調べてみよう。

## 4.1 1 次関数

$$\blacksquare \quad F(x)=x \quad (-\pi < x \leq \pi)$$

とし，この  $F(x)$  を周期  $2\pi$  の周期関数として  $(-\infty, \infty)$  に拡張したものを  $f(x)$  とする

■定理 2 により，フーリエ級数展開を求める

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0 \quad (\because y=x \text{ は奇関数})$$

次に， $n=1, 2, 3, \dots$  のとき，

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \left( \frac{\sin nx}{n} \right)' dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left[ x \cdot \frac{\sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} x' \cdot \frac{\sin nx}{n} dx \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ 0 - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{n} dx \right\} = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\cos nx}{n^2} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\cos n\pi - \cos(-n\pi)}{n^2} \right\} = 0 \quad (\because \cos n\pi = \cos(-n\pi)) \end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \left( -\frac{\cos nx}{n} \right)' dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left[ -x \cdot \frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} x' \cdot \frac{\cos nx}{n} dx \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ -\frac{\pi \cos n\pi}{n} - \frac{\pi \cos(-n\pi)}{n} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx}{n} dx \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ -\frac{\pi(-1)^n}{n} - \frac{\pi(-1)^n}{n} + \left[ \frac{\sin nx}{n^2} \right]_{-\pi}^{\pi} \right\} \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

よって， $f(x)=x$  のフーリエ級数展開は，

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = 2 \left( \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right) \quad (-\pi < x < \pi)$$

## [実験 8]

*Mathematica* で、上記の計算が正しいことを確認しよう。

```
In[10]:= Clear[f]
         f[x_] := x
         a0 = Integrate[f[x], {x, -Pi, Pi}] / (2 Pi)

Out[12]= 0

In[13]:= an = Integrate[f[x] Cos[n x], {x, -Pi, Pi}] / (2 Pi)

Out[13]= 0

In[18]:= bn = Integrate[f[x] Sin[n x], {x, -Pi, Pi}] / (2 Pi)

Out[18]= 
$$\frac{-2 n \pi \cos[n \pi] + 2 \sin[n \pi]}{2 n^2 \pi}$$

```

## [実験 9]

*Mathematica* で、 $f(x)=x$  のフーリエ級数展開  $fn[x,k]$  を定義し、そのグラフを描いてフーリエが正しいことを確認しよう。

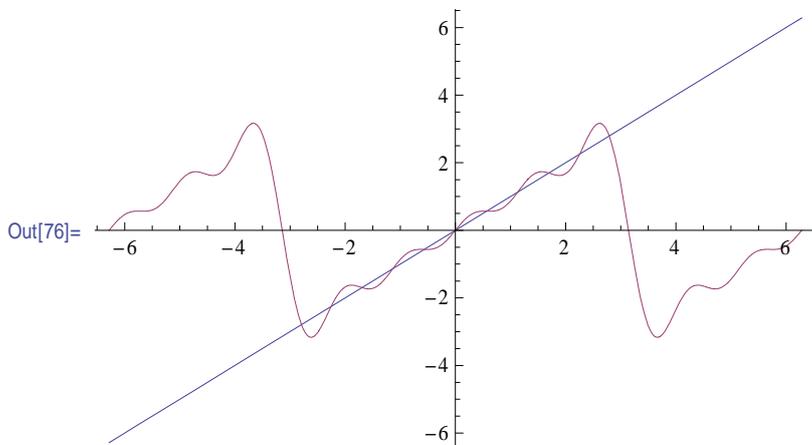
```
In[61]:= Clear[x, t, f, g, a, b]
         f[x_] := x
         a[n_] := Integrate[f[x] * Cos[n x], {x, -Pi, Pi}] / Pi
         b[n_] := Integrate[f[x] * Sin[n x], {x, -Pi, Pi}] / Pi

In[74]:= fn[x_, k_] := Sum[a[n] * Cos[n x] + b[n] * Sin[n x], {n, 1, k}] +
         a[0] / 2 + b[0] / 2

In[75]:= fn[x, 5]
         Plot[{f[x], %}, {x, -2 Pi, 2 Pi}]

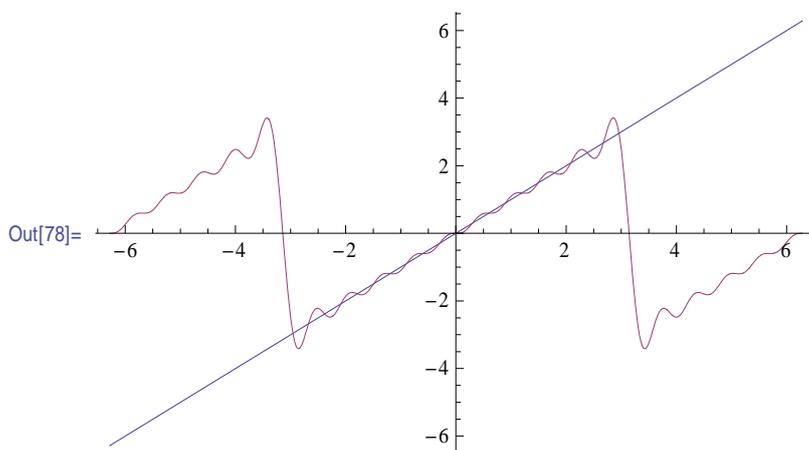
Out[75]= 
$$2 \sin[x] - \sin[2 x] + \frac{2}{3} \sin[3 x] - \frac{1}{2} \sin[4 x] + \frac{2}{5} \sin[5 x]$$

```

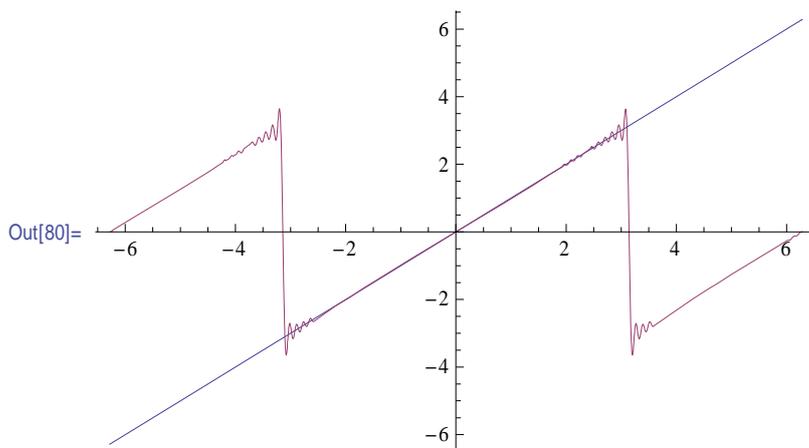


```
In[77]:= fn[x, 10]
Plot[{f[x], %}, {x, -2 Pi, 2 Pi}]

Out[77]= 2 Sin[x] - Sin[2 x] +  $\frac{2}{3}$  Sin[3 x] -  $\frac{1}{2}$  Sin[4 x] +  $\frac{2}{5}$  Sin[5 x] -
 $\frac{1}{3}$  Sin[6 x] +  $\frac{2}{7}$  Sin[7 x] -  $\frac{1}{4}$  Sin[8 x] +  $\frac{2}{9}$  Sin[9 x] -  $\frac{1}{5}$  Sin[10 x]
```



```
In[79]:= fn[x, 50];
Plot[{f[x], %}, {x, -2 Pi, 2 Pi}]
```



[考察 3] 関数  $fn[x,k]$  の  $k$  の値を変えて実験 9 を続け、気づいたことを述べよ。

■  $f(x)=x$  のフーリエ級数展開

$$x = 2 \left( \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} - \frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 7x}{7} - \dots \right)$$

において、 $x = \frac{\pi}{2}$  とおくと、

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots} \quad \dots(4.1)$$

が得られる。これをライプニッツの公式、またはオイラーの公式という。

## 4.2 折れ線関数

$$\blacksquare \quad F(x) = |x| \quad (-\pi < x \leq \pi)$$

とし、この  $F(x)$  を周期  $2\pi$  の周期関数として  $(-\infty, \infty)$  に拡張したものを  $f(x)$  とする

■定理 2 により、フーリエ級数展開を求める

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx$$

次に、 $n=1, 2, 3, \dots$  のとき、

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx dx$$

また、

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin nx dx$$

よって、 $f(x) = |x|$  のフーリエ級数展開は、

$$f(x) =$$

[問 25] 上の計算を完成せよ。

## [実験 10]

*Mathematica* で、上記の計算が正しいことを確認せよ。

## [実験 11]

*Mathematica* で、 $f(x)=|x|$  のフーリエ級数展開  $fn[x,k]$  を定義し、そのグラフを描いてフーリエが正しいことを確認せよ。

[考察 4] 関数  $fn[x,k]$  の  $k$  の値を変えて実験 1 を続け、気づいたことを述べよ。

■  $f(x)=|x|$  のフーリエ級数展開

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \dots \right)$$

において、 $x=0$  とおくと、

$$\boxed{\phantom{0}} \dots (4.2)$$

が得られる。

## 4.3 2 次関数

■  $F(x)=x^2$  ( $-\pi < x \leq \pi$ )

とし、この  $F(x)$  を周期  $2\pi$  の周期関数として  $(-\infty, \infty)$  に拡張したものを  $f(x)$  とする

[問 26] (1) 定理 2 により、 $f(x)$  のフーリエ級数展開を求めよ。

(2) *Mathematica* で、(1) の計算が正しいことを確認せよ。

(3) *Mathematica* で、 $f(x)=x^2$  のフーリエ級数展開  $fn[x,k]$  を定義し、そのグラフを描いてフーリエが正しいことを確認せよ。

[問 27] 問 26 で求めた  $f(x)=x^2$  のフーリエ級数展開を利用して、(4.1), (4.2) のような  $\pi$  を含む美しい等式を 2 つ導け。

## 4.4 不連続関数

- 18 世紀の前半までは、関数といえば解析関数、すなわち、べき級数で表されるものに限られていた
- ところが、フランスの数学者ダランベール (J.d'Alembert) の、楽器の弦の振動を数学的に扱う研究から、この狭い関数概念からの脱却が始まった
- フーリエは、熱方程式の初期-境界値問題を解く手だてとして、初期温度分布を三角級数展開する必要に迫られ、ダランベールらの研究からフーリエ級数展開にたどりついたのである
- そのときフーリエは、当時では衝撃的な結果である、下の例のような不連続関数の三角級数展開に成功した

(例) 
$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x < 0) \\ 1 & (0 \leq x < \pi) \end{cases}$$

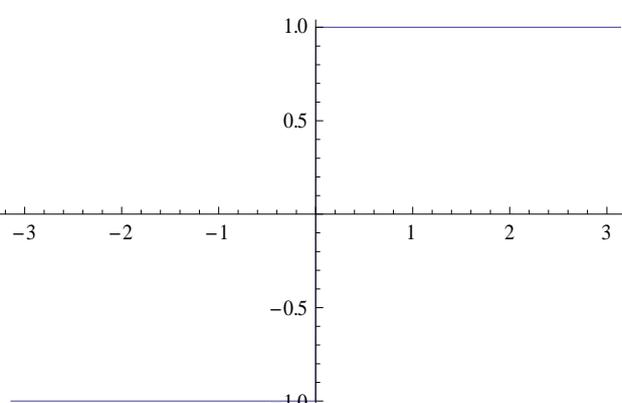
は、 $x=0$  で不連続な関数である。

## [実験 12]

*Mathematica* で、上の例の不連続関数  $f(x)$  のフーリエ級数展開を求め、グラフを描いてみよう

```

In[113]:= Clear[f]
          f[x_] := Which[-Pi < x < 0, -1, 0 <= x < Pi, 1]
          Plot[f[x], {x, -Pi, Pi}]

Out[115]= 

```

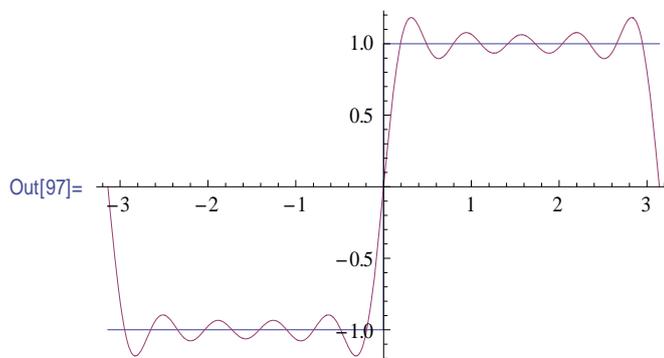
```

In[116]:= a[n]
Out[116]= 0

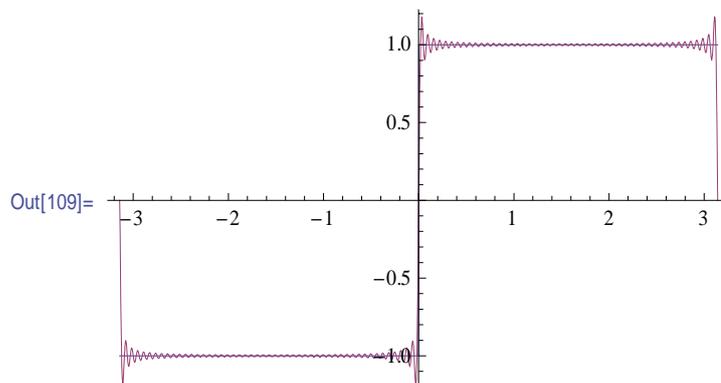
In[117]:= b[n]
Out[117]= 
$$-\frac{2(-1 + \cos[n\pi])}{n\pi}$$


```

```
In[96]:= fn[x, 10]
Plot[{f[x], %}, {x, -Pi, Pi}]
```

$$\text{Out[96]} = \frac{4 \sin[x]}{\pi} + \frac{4 \sin[3x]}{3\pi} + \frac{4 \sin[5x]}{5\pi} + \frac{4 \sin[7x]}{7\pi} + \frac{4 \sin[9x]}{9\pi}$$


```
In[108]:= fn[x, 100];
Plot[{f[x], %}, {x, -Pi, Pi}]
```



[問 28] 上記の例の不連続関数  $f(x)$  のフーリエ級数展開を、自分で積分計算を行って求めよ。

■ 数学的には、積分はグラフをなだらかにする働きがあるので、不連続関数が見事に連続関数の三角関数によって、フーリエ級数で表されるのである

[問 29] 関数  $f(x)$  を、 $f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x < 0) \\ 1 & (0 \leq x < \pi) \end{cases}$  とする。

- (1)  $g(x) = \int_{-\pi}^x f(t) dt$  を求めよ。そして、関数  $g(x)$  の連続性と微分可能性を調べよ。
- (2)  $h(x) = \int_{-\pi}^x g(t) dt$  を求めよ。そして、関数  $h(x)$  の連続性と微分可能性を調べよ。

## [実験 13]

*Mathematica* で、問 24 の結果を確認しよう。

```
In[36]:= Clear[f, g, g1, g2, h, h1, h2]
```

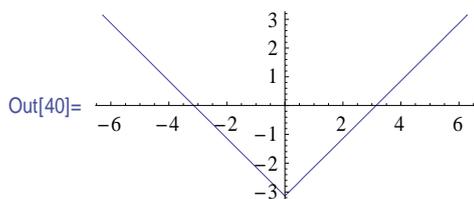
```
In[34]:= f[x_] := Which[-π < x < 0, -1, 0 ≤ x < π, 1]
```

```
In[37]:= g1[x_] := ∫-πx (-1) dt;
```

```
g2[x_] := ∫-π0 (-1) dt + ∫0x 1 dt;
```

```
g[x_] := Which[x < 0, g1[x], 0 ≤ x, g2[x]]
```

```
In[40]:= Plot[g[x], {x, -2 π, 2 π}, AspectRatio → Automatic]
```

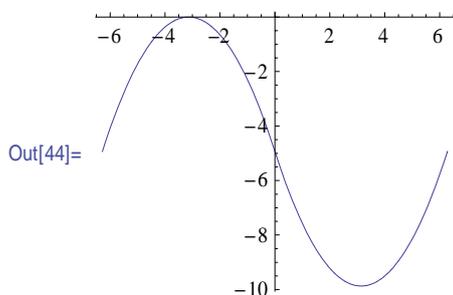


```
In[41]:= h1[x_] := ∫-πx g1[t] dt;
```

```
h2[x_] := ∫-π0 g1[t] dt + ∫0x g2[t] dt;
```

```
h[x_] := Which[x < 0, h1[x], 0 ≤ x, h2[x]]
```

```
In[44]:= Plot[h[x], {x, -2 π, 2 π}, AspectRatio → Automatic]
```



[問 30] 自分で関数  $f(x)$  を決め、その  $f(x)$  のフーリエ級数展開を求めよ。そして、その結果を *Mathematica* を利用して確認せよ。

## (発展) 複素フーリエ級数展開

## ■ マクローリン展開

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \dots + \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} + \dots$$

より、

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

となる。ここで、実数  $x$  を複素数に拡張してみよう。

$e^x$  の  $x$  を  $ix$  に置き換えると、

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) = \cos x + i \sin x \cdots (*) \end{aligned}$$

が成り立つ。これをオイラーの公式という。

- (\*) に  $x = \pi$  を代入すると、 $e^{i\pi} = -1$  が得られる。これは、数学のなかで最も美しい関係式だといわれている。

- (\*) の  $x$  を  $-x$  に置き換えると、 $e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x$  が成り立つ。こ

れらから、 $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ ,  $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$  … (\*\*) が導かれる。

## ■ フーリエ級数展開

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

に (\*\*) を代入すると、

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right) = a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \{ (a_n - ib_n) e^{inx} + (a_n + ib_n) e^{-inx} \}$$

となる。ここで、 $c_0 = a_0$ ,  $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ ,  $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$  とおくと、

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

となる。これを複素フーリエ級数展開という。

[問 31]  $m, n$  が整数のとき、 $\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-inx} dx$  を求めよ。

■係数  $c_n$  を求めるには、

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

で求められる。

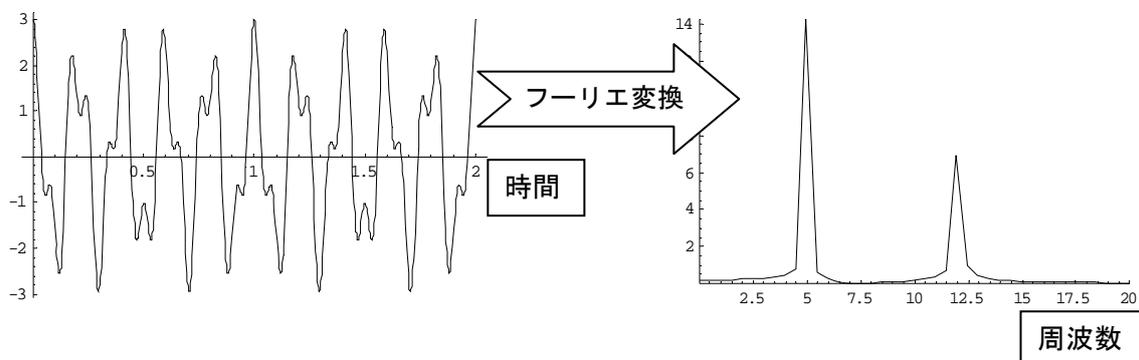
[問 32]  $F(x) = x$  ( $-\pi < x \leq \pi$ ) とし、この  $F(x)$  を周期  $2\pi$  の周期関数として  $(-\infty, \infty)$  に拡張したものを  $f(x)$  とする。 $f(x)$  の複素フーリエ級数展開を求めよ。

## 5 フーリエ変換とその応用

最初に、音の違いを波の形の違いとしてみたが、ここでは違った角度から調べてみる。

### 5.1 フーリエ変換

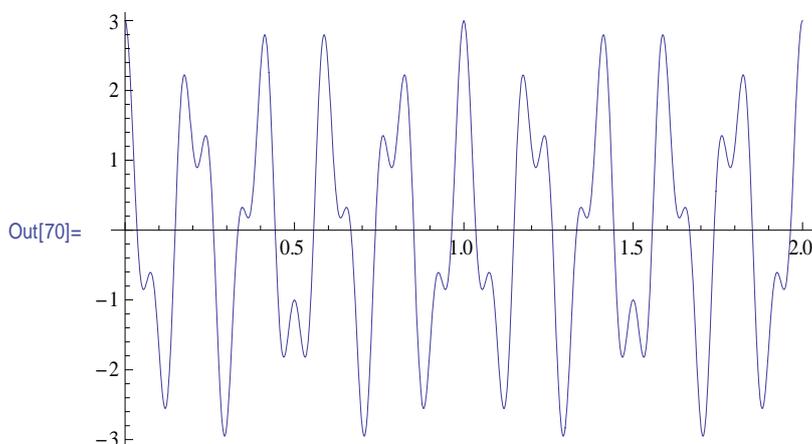
- フーリエ変換は、ある関数を時間領域から周波数領域へ変換する操作
- 複雑な波は、様々な周波数の波が合成されてできていたが、それぞれの周波数の波がどのくらいの割合で含まれているかをフーリエ変換で見ることができる
- フーリエ変換は、音楽でたとえるならば、音楽家がある音（時間領域における信号）を聴きながら、どの音符（周波数）が演奏されているかを定める過程のようである
- オーケストラではいろいろな楽器の音が重なって絶妙なハーモニーをかもし出すが、フーリエ変換を用いると、1つの楽器の音だけを取り出すことができるようなもの



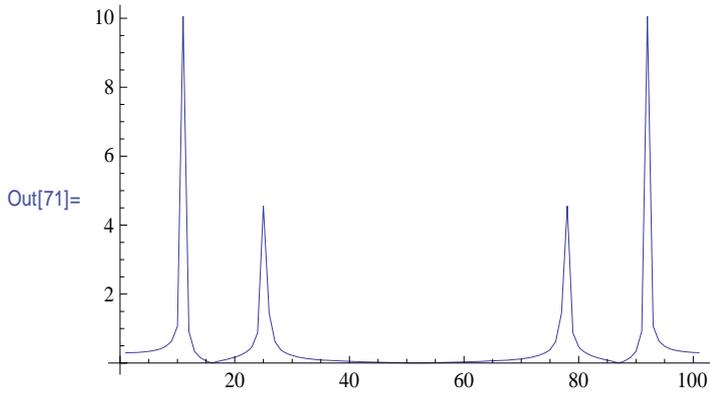
#### [実験 14]

*Mathematica* には、デジタルデータを効率よくフーリエ変換する、高速フーリエ変換 (FFT) の関数「**Fourier**」が用意されている。この関数を利用して、周波数を視覚化しフーリエ変換を感じ取ろう。

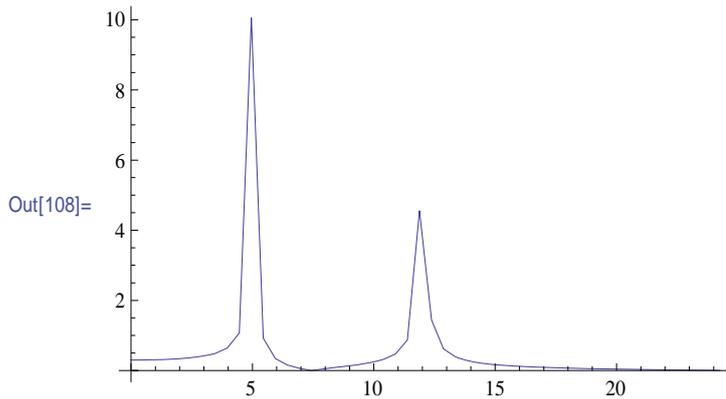
```
In[68]:= f[t_] := 2 Cos[2 Pi 5 t] + Cos[2 Pi 12 t]
data = Table[f[t], {t, 0, 2, 0.02}];
Plot[f[t], {t, 0, 2}]
```



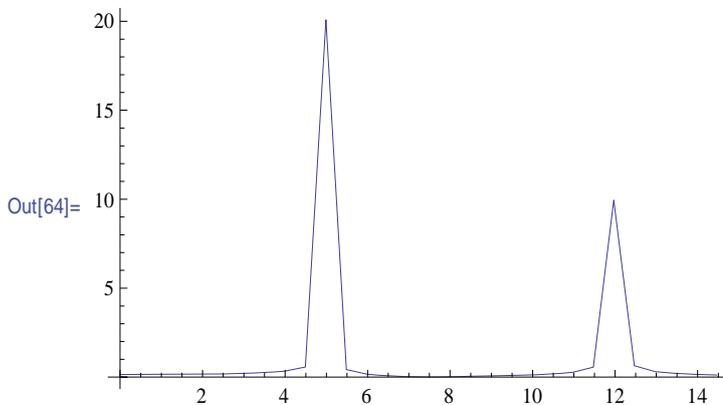
```
In[71]:= ListLinePlot[Abs[Fourier[data]], PlotRange -> All]
```



```
In[106]:= imax = Length[data]; num = Round[imax / 2];
data2 = Transpose[{
  Table[(i - 1) / imax * num, {i, 1, num}],
  Take[Abs[Fourier[data]], {1, num}]
}] // N;
ListLinePlot[data2, PlotRange -> All]
```



```
In[63]:= Take[data2, {1, 30}];
ListLinePlot[%, PlotRange -> All]
```

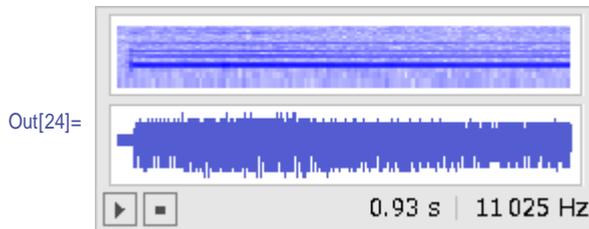


[考察 5] 実験 14 を解読して理解し、実験結果を説明せよ。

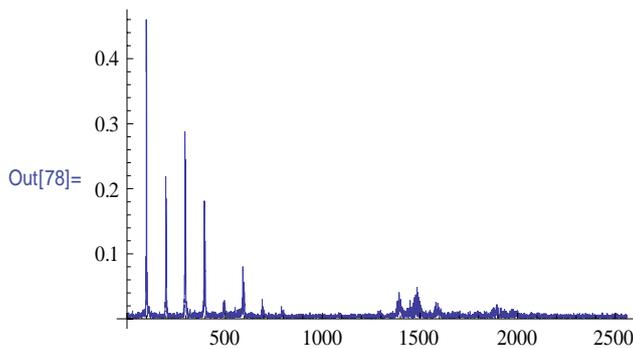
## [実験 15]

高速フーリエ変換(FFT)の関数を利用して、「ア」「イ」「ウ」「エ」「オ」の違いを調べよう。

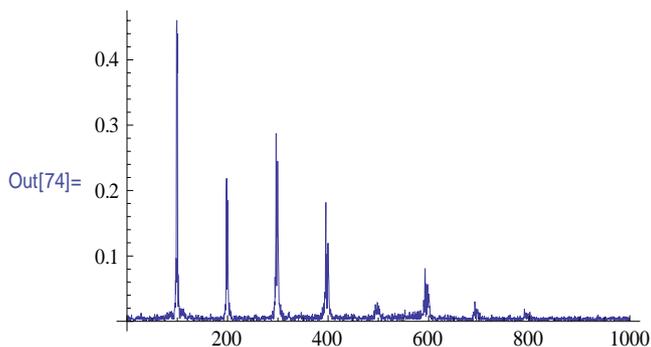
```
In[24]:= a = SystemDialogInput["RecordSound"]
```



```
In[75]:= data = Flatten[a[[1, 1]]];
imax = Length[data]; num = Round[imax / 2];
data2 = Transpose[{Table[(i - 1) / imax * num, {i, 1, num}],
  Take[Abs[Fourier[data]], {1, num}]}] // N;
ListLinePlot[data2, PlotRange -> All]
```



```
In[74]:= ListLinePlot[Take[data2, {1, 2000}], PlotRange -> All]
```

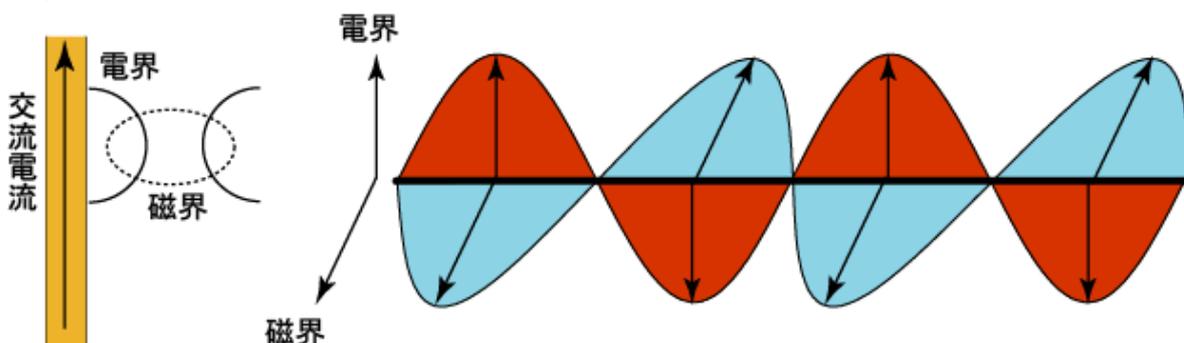


[考察 6] 実験 14 と同様にして、「イ」「ウ」「エ」「オ」の周波数の様子を調べ、音の違いがどこに現れているかを考察せよ。

[考察 7] 実験 14,15 について、自分の実験結果と隣の人の結果を比較して考察せよ。

## 5.2 フーリエ変換の応用

- フーリエ変換は現代工学を支えているが、ここではラジオ放送を考えることにより、その有用性をみていこう
- スコットランドの偉大な理論物理学者マクスウェル(1831～ 1879)は、1864 年に電磁波の存在を理論的に予言し、ドイツの物理学者ヘルツ(1857～1894)は、1888 年に電磁波の存在を実証した(周波数の単位である Hz は、ヘルツの名前に由来している)
- 電磁波を一言で言うと、空間を 30 万 km/s で直進する電氣的・磁氣的な振動である
- 電線に交流電流を流すと電磁波が発生し、逆に電線が電磁波を受けると交流電圧が発生する



- もっと簡単に言うと、電磁波は電氣と磁氣の波であり、波であるから周波数(1 秒間に振動する回数)・周期(1 回の振動の時間)・波長(1 回の振動の長さ)・振幅(振動の強さ)が存在する
- 電磁波のうち、波長が 0.1mm 以上のものを電波とよぶ
- ある波の周波数を  $f(\text{Hz})$  とすると、その波の周期  $T(\text{s})$  と波長  $L(\text{m})$  は、次のようになる

$$T = \frac{1}{f}$$

$$L = \frac{\text{光速}}{f} = \frac{3.0 \times 10^8}{f}$$

- 音声信号を無線で送信する場合、送受信アンテナの長さは波長の  $\frac{1}{2}$  か  $\frac{1}{4}$  の長さがよい

[問 33] 電話音声は、300Hz ～3.4kHz である。アンテナの長さを波長の半分とするととき、これらの電話音声を無線で送信する場合の、アンテナの長さの範囲を求めよ。

- 問 33 と同様に計算すると、100Hz の音声信号をそのまま電波として飛ばすには、1500km のアンテナが必要となり現実的ではない

- 以上より，周波数が高ければ高い(波長が短ければ短い)ほど，アンテナの長さは短くてすむ，逆に言うと，周波数を高くしないと電波は飛ばせないことが分かる
- 人間の聞こえる音は  $20\text{Hz}\sim 20\text{kHz}$  であるが，これをそのまま電波で飛ばそうと思うと，上で計算したようにとんでもなく長いアンテナが必要となる
- しかし，現実には音声は電波に乗って飛んできて，ラジオから声を聴くことができるので，何かうまい方法があるはずだ



[問 34]  $200\text{Hz}$ (波長が長い)の音声を， $666\text{kHz}$ (波長が短い)の近畿地方の NHK 第 1 放送で送信したい。送信塔の高さは約  $100\text{m}$  であるから， $200\text{Hz}$  の音声はこのままでは飛ばせない。どのようにすればよいか考えよ。

[私の意見]

[他の人の意見]

- 以下，音声信号の波を音声波  $b(t)$ ，放送局の周波数の波を搬送波  $c(t)$  とおく

[実験 16]

音声波  $b(t)$  の周波数を  $200\text{Hz}$ ，放送局の搬送波  $c(t)$  の周波数を  $100\text{kHz}$  とする。このとき，*Mathematica* で音声波  $b(t)$ ，電波  $c(t)$  のそれぞれの波を描き，音を聴け。そして，問 27 で考えた方法を検証せよ。

[数学的説明]

[問 35] 問 34 で考えた方法で送信した音声信号&搬送波から，元の音声信号を取り出すには，どのようにすればよいか考えよ。

[私の意見]

[他の人の意見]

[実験 17]

問 30 で考えた方法を，*Mathematica* で検証せよ。

[数学的説明]

■いままでの学習を基にして，次の課題を考えよう

[問 36] 下の表は，電話のトーン信号 1, 2, ..., 9, 0, \*, # の周波数の組み合わせである。この表を見て *Mathematica* でトーン信号のうちの 1 つを  $b(t)$  として作成し，それを周波数 100kHz の搬送波  $c(t)$  で送信したときの電波  $r(t)$  を作成して，自分のフォルダに保存せよ。

(注意) 保存する際には， $b(t)$  を定義したセルを選択し，メニューから，  
「セル」→「セルのプロパティ」→「開く」  
として， $b(t)$  の定義式を見えなくしておくこと。

	1209Hz	1336Hz	1477Hz
697Hz	1	2	3
770Hz	4	5	6
852Hz	7	8	9
941Hz	*	0	#

[問 37] 問 36 で保存された隣の人の *Mathematica* のファイルを読み込み，すべてのセルを評価せよ。そして，問 35，実験 17 を参考に電波  $r(t)$  を解析して，送られたトーン信号  $b(t)$  を突き止めよ。

[作成者の氏名]

[解析したトーン信号]

[問 38] 3G(第 3 世代)の携帯電話の使用周波数帯は, 2.0GHz である。これらの携帯電話においては, アンテナが内蔵できることを示せ。ただし,  $\frac{1}{4}$  波長アンテナとする。

[Report5] フーリエ変換の他の応用例を *Mathematica* で探求し, レポートを作成せよ。

## 第6章

# モデル化とシミュレーション



## 1 モデル化とシミュレーション

### 1.1 太陽光発電について

- 太陽光発電は、発電時に CO<sub>2</sub>をほとんど発生しない地球環境にやさしい発電システムとして、最近注目を集めている。
- 2009 年、太陽光発電を住宅に設置した場合、国や自治体から補助金がもらえる「太陽光補助金制度」が復活し、急速に家庭に広まっている。また、11 月 1 日からは、太陽光発電で余った電力を、電力会社が現行の 2 倍の価格で買い取る制度がスタートする。
- 本校でも、太陽光発電が設置されており、屋上には写真のような太陽電池パネルが置いてある。



### 1.2 太陽光発電の仕組み

#### (1) 太陽のエネルギー

- 太陽から地球に降り注ぐ光のエネルギーは、約 18 万テラワット(テラは 1 兆)におよぶ。このうち、約 30%は大気や雲で反射され、残る 12 万 6000 テラワットが地表や海に到達している。もし、このエネルギーのすべてが電気にかえることができれば、この日照量で、全人類の消費する 1 年間のエネルギーがまかなえることができる。
- また、太陽のエネルギーはほぼ無尽蔵にある(太陽の寿命はあと何億年ほど)。この光のエネルギーを電気にかえるのが、「太陽光発電」である。これは「太陽電池」とよばれるパネルを道具にして、電気を生み出すシステムである。
- 今、世界各国では、この太陽光発電の普及が爆発的に進んでいる。2001 年から 2008 年の 8 年間で太陽電池の生産量は、約 10 倍に成長している。

#### (2) 太陽電池の種類

- 太陽電池には、さまざまな種類がある。

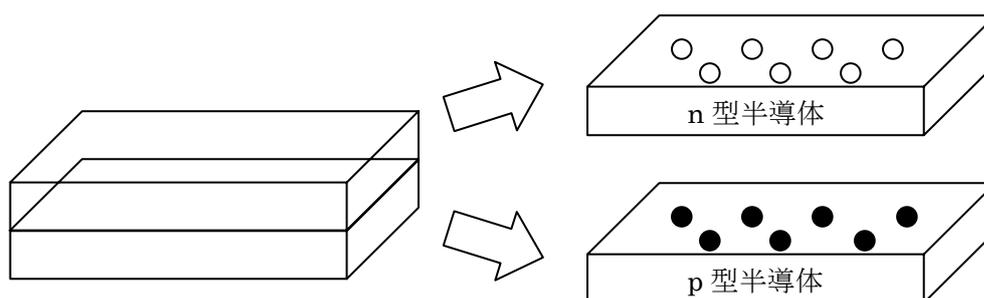
- ① 結晶シリコン太陽電池  
…多結晶シリコン太陽電池・単結晶シリコン太陽電池
- ② 薄膜(アモルファス)シリコン太陽電池
- ③ 化合物系太陽電池
- ④ 色素増感太陽電池
- ⑤ 有機薄膜太陽電池

このうち、日本でもっとも普及しているのが、単結晶シリコン太陽電池である。

## (3) 結晶シリコン太陽電池の仕組み

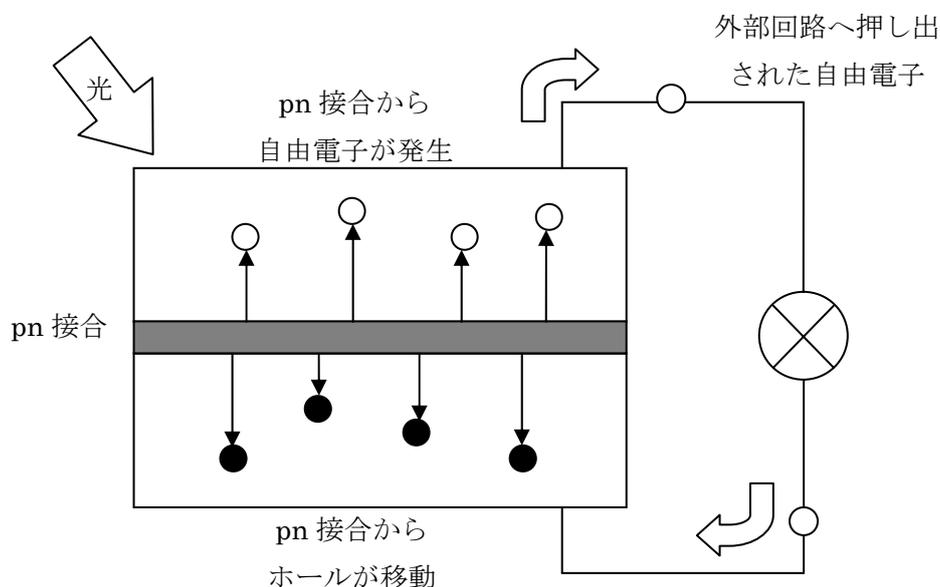
■パネルには、 $10\text{cm}^2$ 、厚さ数  $\text{mm}\sim 1\text{cm}$  の「セル」が何枚も並んでいる。この「セル」が数十枚並んで縦横  $1\text{m}$  前後のパネルを構成する。これを「モジュール」という。この「モジュール」に光が当たることで発電する。

■結晶シリコン太陽電池のセル内部は、上下の2層構造になっている。セルの材料には、「シリコン（ケイ素）」の結晶が使われている。このシリコンのなかに、微量のリンやホウ素といった不純物を混ぜる。この不純物によって、電子の数が余分にある上の層（n型半導体）と、電子が不足している下の層（p型半導体）にわかれている。



■セルの上下の2層の間には「壁」が存在し、上側には自由電子が安定して存在する層、下側にはホールが安定して存在する層にわかれている。この「壁」を「pn接合」という。自由電子はこの「壁」を越えて移動できない。

■そして、セルに光の「粒子」が当たることで、自由電子とホールを分離させ、外部回路に押し出すことで発電することができる。



## (4) 効率よく発電するには

## ①変換効率

■太陽のエネルギーを電気エネルギーに変換するとき、ある程度のロスが生じる。どのくらい変換できるかを表すものとして「変換効率」が挙げられる。この変換効率を上げる

ことができれば、より効率よく発電することができる。

- 現在、日本で最も普及している「結晶シリコン太陽電池」は最大                    %を記録している。新エネルギー・産業技術総合開発機構（NEDO）は、2025年までに現在よりも7%～15%引き上げる目標が設定されている。

### ②太陽電池の設置

- 太陽電池パネルは、日当たりのよい                    向きに設置すると最も効率がよい。北向きに設置すると、                    向きに設置した場合の                    %ほどの出力になる。
- また、最適な傾斜角度は緯度によって異なる。日本では南ほど角度は                    ほうがよい。

### ③太陽電池の種類

- 結晶シリコンタイプは、高温による発電量の低下が大きい。一方でアモルファスシリコンタイプは、温度による低下率は結晶シリコンタイプの半分で済む。

### ④直流主体の家づくり

- 太陽電池が生み出す電流は直流であるが、現在の家庭用のコンセントは、                    に対応している。そのため、太陽光発電では、コンディショナー（変換器）を使って直流から交流に変換している。このときにロスが生じる。
- 電化製品の中にも、パソコンや液晶テレビなどは直流で動く（ACアダプタで交流から直流に変換している）。そこで、太陽光発電でできた直流電流を、直接「直流用コンセント」へつなげば、ロスなく使うことができる。

## 1.3 1日の発電電力量を求める

### [課題]

ある晴れた日の1日の発電電力量を求めてみよう。

- (1) 発電電力量を求めるために、必要な条件を挙げてみよう。

- (2) (1) で挙げた条件を、整理してみよう。

(3) (2) の条件で，1 日の発電電力量を計算してみよう。

(4) 本校の太陽光発電の実際のデータと比較してみよう。

(参考)

$10^n$	接頭辞	記号	漢数字表記	十進数表記
$10^{24}$	ヨタ(yotta)	Y	一秭	1 000 000 000 000 000 000 000 000
$10^{21}$	ゼタ(zetta)	Z	十垓	1 000 000 000 000 000 000 000
$10^{18}$	エクサ(exa)	E	百京	1 000 000 000 000 000 000
$10^{15}$	ペタ(peta)	P	千兆	1 000 000 000 000 000
$10^{12}$	テラ(tera)	T	一兆	1 000 000 000 000
$10^9$	ギガ(giga)	G	十億	1 000 000 000
$10^6$	メガ(mega)	M	百万	1 000 000
$10^3$	キロ(kilo)	k	千	1 000
$10^2$	ヘクト(hecto)	h	百	100
$10^1$	デカ(deca, deka)	da	十	10
$10^0$	なし	なし	一	1
$10^{-1}$	デシ(dec)	d	一分	0.1
$10^{-2}$	センチ(centi)	c	一厘	0.01
$10^{-3}$	ミリ(milli)	m	一毛	0.001
$10^{-6}$	マイクロ(micro)	$\mu$	一微	0.000 001
$10^{-9}$	ナノ(nano)	n	一塵	0.000 000 001
$10^{-12}$	ピコ(pico)	p	一漠	0.000 000 000 001
$10^{-15}$	フェムト(femto)	f	一須臾	0.000 000 000 000 001
$10^{-18}$	アト(atto)	a	一刹那	0.000 000 000 000 000 001
$10^{-21}$	zepto)	z	一清浄	0.000 000 000 000 000 000 001
$10^{-24}$	ヨクト(yocto)	y	一涅槃寂靜	0.000 000 000 000 000 000 000 001

## ◇◆参考文献◆◇

### ■第1章

- [1] 飯高 茂, 『いたかないけど数学者なのだ』, NHK 出版(2006)

### ■第2章

- [1] 高須 夫悟, 『大域情報学テキスト』, 奈良女子大学理学部情報科学科(2006)  
[2] S.ワゴン, 『*Mathematica* で見える現代数学』, ブレーン出版(1992)

### ■第3章

- [1] S.ワゴン/T.パッケル, 『アニメで微積分』, トッパン(1995)

### ■第4章

- [1] デヴィッド・バージェス他, 『微分方程式で数学モデルをつくろう』, 日本評論社(1990)  
[2] 佐藤 總夫, 『自然の数理と社会の数理 微分方程式で解析する I』, 日本評論社(1984)

### ■第5章

- [1] トランスナショナルカレッジ オブ レックス編, 『フーリエの冒険』, ヒッポファミリークラブ(1989)  
[2] 小林 亮, 『音の波と三角関数』,  
<http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/KOUKAI/text-h18/Sound.pdf>  
[3] H. Yanase, 『*Mathematica* の冒険「フーリエ解析入門」』,  
<http://www.wasurena.sakura.ne.jp/%7Emc2lv/Math/FourieA/FourieA.htm>  
[4] 奈良 高明, 『応用数学入門 フーリエ級数の世界』,  
<http://www.komaba-s.tsukuba.ac.jp/ssh2/library/122doc/document.pdf>

### ■第6章

- [1] ニュートン 2009年9月号, ニュートンプレス

## Mathematica の使い方

Mathematica の関数はたくさんあり、ここで示すのは基本的な関数とその操作です。

### (1) 関数がわからないとき

- Mathematica のヘルプ や ? を活用しよう

In[34]:= ? Random

Random のための関数に属する特定の数の値を返す  
 Random[type, range]  
 指定した関数に属する特定の数の値を返す。可能な型としては Integer, Real  
 として Complex がある。デフォルト指定範囲は 0 から max である。  
 指定範囲が max (は 0 から max) と同じ値である。 >>

- 正しいつづりがわからないときは、\* (アスタリスク) が有効。

In[35]:= ? Ran\*

▼ System`

Random	RandomPrime	Range
RandomChoice	RandomReal	RangeSpecification
RandomComplex	RandomSample	
RandomInteger	RandomSeed	

### (2) 関数を入力する

- すべて半角英数文字で入力する。Mathematica の関数は英語からなり、頭文字は大文字である。

In[37]:= Table[n^2, {n, 3, 7}]

Out[37]= {9, 16, 25, 36, 49}

- すべての命令はキーボードから入力できるが、累乗や積分などをパレット(基本数式アシスタント)から入力してもよい。

### (3) 命令を実行する

- キーボードの右端の[enter]キー。または、[shift]+[enter]
- 実行後は、命令には in[番号]:= , その結果は out[番号]:= で表示される。
- 一度保存したファイルを再度開いたとき、in や out の表示は消え、実行しなければその値や式は有効にならない。

### (4) 直前の命令を複製する

- [Ctrl]+[L]。同じ命令を何度も入力する必要はなく、範囲を変えたり、初期値を変えたりするのに便利。



(5) 括弧 { } [ ] ( ) の意味

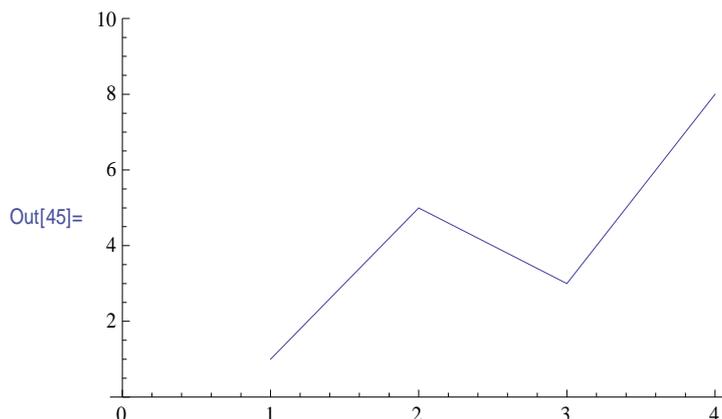
- [ ] 関数に使う
- { } リスト (集合) や関数のオプションに使う
- ( ) 計算式に使う。何重になってもこれのみ。

```
In[48]:= (a + b (c + d)^2 - e) / Pi
```

```
Out[48]= 
$$\frac{a + b (c + d)^2 - e}{\pi}$$

```

```
In[45]:= ListLinePlot[{1, 5, 3, 8}, PlotRange -> {0, 10}]
```



(6) 近似値を求める

- 整数値の計算は、厳密に計算される。しかし、小数点がある場合、近似計算となる。近似値の方が計算速度がはやい。

```
In[39]:= 1 / 2 + 1 / 3
```

```
Out[39]= 
$$\frac{5}{6}$$

```

```
In[41]:= 1 / 2. + 1 / 3
```

```
Out[41]= 0.833333
```

- 表示する桁数を決めたり、概数で表示できる。

```
In[79]:= N[Pi, 100]
```

```
Out[79]= 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078.  
16406286208998628034825342117068
```

```
In[81]:= E // N
```

```
Out[81]= 2.71828
```

(7) 直前の値を利用

- %で直前, %%でさらにもうひとつ前。

```
In[95]:= Table[n, {n, 1, 10}]  
        Sqrt[%]
```

```
Out[95]= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
```

```
Out[96]= {1,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ , 2,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{6}$ ,  $\sqrt{7}$ ,  $2\sqrt{2}$ , 3,  $\sqrt{10}$ }
```

```
In[97]:= %%^(1/3)  
        % // N
```

```
Out[97]= {1,  $2^{1/3}$ ,  $3^{1/3}$ ,  $2^{2/3}$ ,  $5^{1/3}$ ,  $6^{1/3}$ ,  $7^{1/3}$ , 2,  $3^{2/3}$ ,  $10^{1/3}$ }
```

```
Out[98]= {1., 1.25992, 1.44225, 1.5874,  
         1.70998, 1.81712, 1.91293, 2., 2.08008, 2.15443}
```

2つ前の立方根

直前の近似値

(8) 文字と定数

- 変数に定数を代入するまでは、すべて文字と認識される。定義したものを解除したいときは、Clear[]を使う。また、

```
In[49]:= a
```

```
Out[49]= a
```

```
In[50]:= a = 123; b = 10;
```

```
In[51]:= a - b
```

```
Out[51]= 113
```

- 関数を定義するときは、次のように\_ (アンダーバー) と: (コロン) が必須である。変数 (緑) か定数 (青) かは、文字の色で区別できる。

```
In[52]:= f[x_] := a x ^2 + b x + c
```

```
In[54]:= f[x]
```

```
Out[54]= c + 10 x + 123 x2
```

```
In[55]:= f[1]
```

```
Out[55]= 133 + c
```

- さらに、漸化式も定義できる。

```
In[162]:= a[n_] := a[n - 1] + a[n - 2]
```

```
        a[1] = a[2] = 1;
```

```
In[164]:= Table[a[n], {n, 1, 10}]
```

```
Out[164]= {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55}
```

(9) 結果の非表示

- ; (セミコロン) は、出力を表示しない。無駄に出力される場合に有効。前述のものと比較してみよう。

```
In[165]:= a[n_] := a[n - 1] + a[n - 2]
          a[1] = a[2] = 1
```

```
Out[166]= 1
```

```
In[167]:= Table[a[n], {n, 1, 10}];
```

(10) リスト (集合)

- これが使いこなせれば、かなり高度なことができる。

```
In[168]:= {{1, 2, 3}, {4, 5, 6}}
```

```
Out[168]= {{1, 2, 3}, {4, 5, 6}}
```

```
In[171]:= {{1, 2, 3}, {4, 5, 6}} // TableForm
```

```
Out[171]//TableForm=
  1 2 3
  4 5 6
```

- 行列の計算もできる。

```
In[65]:= s = Table[{n, Sqrt[n]}, {n, 1, 5}];
          s // TableForm
```

```
Out[66]//TableForm=
  1 1
  2  $\sqrt{2}$ 
  3  $\sqrt{3}$ 
  4 2
  5  $\sqrt{5}$ 
```

```
In[67]:= Transpose[s] // TableForm
```

```
Out[67]//TableForm=
  1 2 3 4 5
  1  $\sqrt{2}$   $\sqrt{3}$  2  $\sqrt{5}$ 
```

```
In[68]:= s[[3, 2]]
```

```
Out[68]=  $\sqrt{3}$ 
```

```
In[69]:= s*w + 1
```

```
Out[69]= {{1 + w, 1 + w}, {1 + 2 w, 1 +  $\sqrt{2}$  w},
           {1 + 3 w, 1 +  $\sqrt{3}$  w}, {1 + 4 w, 1 + 2 w}, {1 + 5 w, 1 +  $\sqrt{5}$  w}}
```

```
In[70]:= s.{1, 0}, {0, -1}}
```

```
Out[70]= {{1, -1}, {2, - $\sqrt{2}$ }, {3, - $\sqrt{3}$ }, {4, -2}, {5, - $\sqrt{5}$ }}
```

- 要素の追加 (Append), 和集合 (Union)。

```
In[111]:= Append[{1, 2, 3}, 2]
```

```
Out[111]= {1, 2, 3, 2}
```

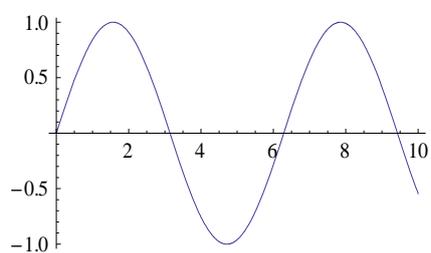
```
In[112]:= Union[%]
```

```
Out[112]= {1, 2, 3}
```

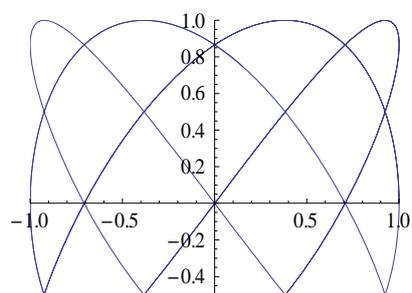
### (11) 様々なグラフ

- 定義域の後に, ◎◎→△△があるのは, オプション。まずは, オプションなしで入力してみると良い。→は- (マイナス) > (大なり) と入力する。

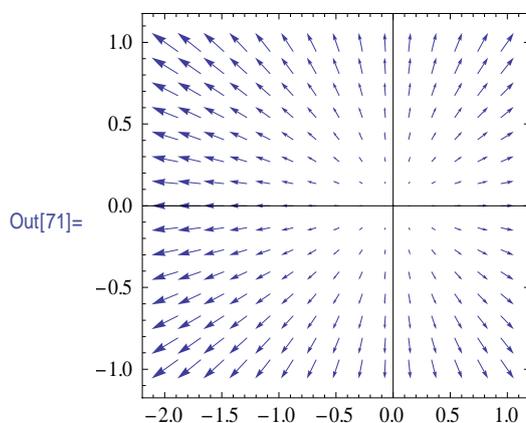
```
Plot[Sin[x], {x, 0, 10}]
```



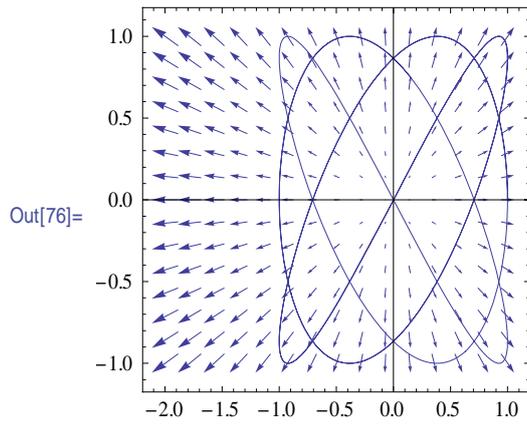
```
ParametricPlot[{Cos[3 x], Sin[4 x]}, {x, 0, 10},  
PlotRange -> {{-1, 1}, {-0.5, 1}}]
```



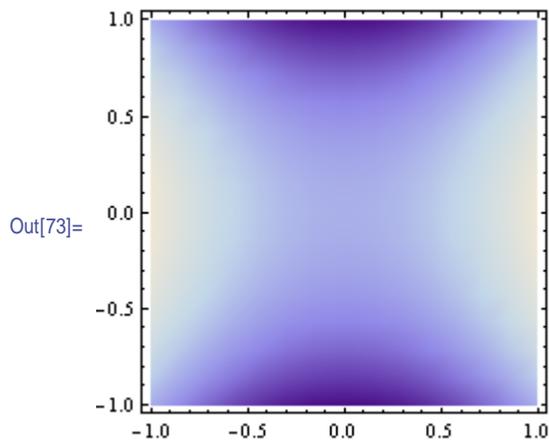
```
In[71]:= VectorPlot[{x, y}, {x, -2, 1}, {y, -1, 1}, Axes -> True]
```



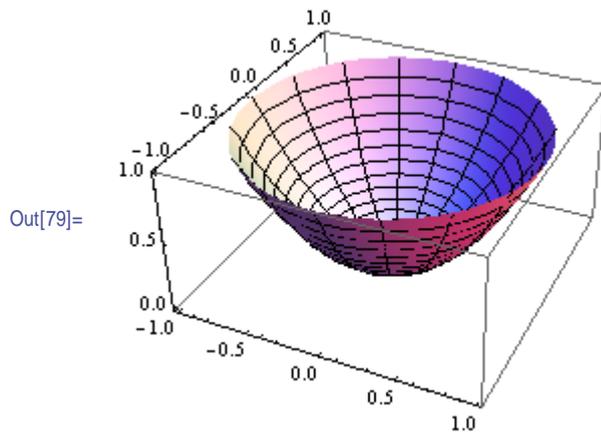
In[76]:= Show[%, %%]



In[73]:= DensityPlot[x^2 - y^2, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]



In[79]:= ParametricPlot3D[{s Cos[t], s Sin[t], s^2}, {t, 0, 2 Pi}, {s, 0, 1}]



(12) いろいろな計算

- 展開 (Expand), 因数分解 (Factor), 式の整理 (Simplify),

```
In[115]:= Expand[(x + 1)^4]
```

```
Out[115]= 1 + 4 x + 6 x^2 + 4 x^3 + x^4
```

```
In[116]:= Factor[%]
```

```
Out[116]= (1 + x)^4
```

```
In[117]:= Simplify[2 a + 3 a]
```

```
Out[117]= 5 a
```

```
In[118]:= data = {{0, 1}, {1, 5}, {2, 12}, {3, 20}};
```

```
FindFit[data, a x^2 + b x + c, {a, b, c}, x]
```

```
Out[119]= {a -> 1., b -> 3.4, c -> 0.9}
```

- 方程式を解く (Solve)。方程式は等号を= (イコール) 2 つでつなぐ。解を文字に代入できる。

```
In[120]:= Solve[x^3 + 1 == 0, x]
```

```
Out[120]= {{x -> -1}, {x -> (-1)^(1/3)}, {x -> -(-1)^(2/3)}}
```

```
In[121]:= para = Solve[{x + y == 0, x + 2 y == 3}, {x, y}]
```

```
Out[121]= {{x -> -3, y -> 3}}
```

```
In[122]:= x + 2 y /. para
```

```
Out[122]= {3}
```

- 微積分も可能。

```
In[278]:= D[a x^2 + b x + c, x]
```

```
Out[278]= b + 2 a x
```

```
In[279]:= Integrate[a x^2 + b x + c, x]
```

```
Out[279]= c x +  $\frac{b x^2}{2}$  +  $\frac{a x^3}{3}$ 
```

```
In[282]:= Integrate[(x - a) (x - b), {x, a, b}]
```

```
Out[282]=  $\frac{a^3}{6}$  -  $\frac{a^2 b}{2}$  +  $\frac{a b^2}{2}$  -  $\frac{b^3}{6}$ 
```

```
In[283]:= Factor[%]
```

```
Out[283]=  $\frac{1}{6} (a - b)^3$ 
```

※他にも Do, While, If もあるが、プログラミング言語でよく使われる命令なので、割愛する。さらに、高度なことをするには、プログラミングの力は必須であろう。

本テキストの内容は、奈良女子大学附属中等教育学校スーパーサイエンスハイスクール(SSH)の2005年～2010年度の研究成果に基づいている。  
2007年～2010年度の実践に基づき、テキストを改訂した。

## 数理科学

---

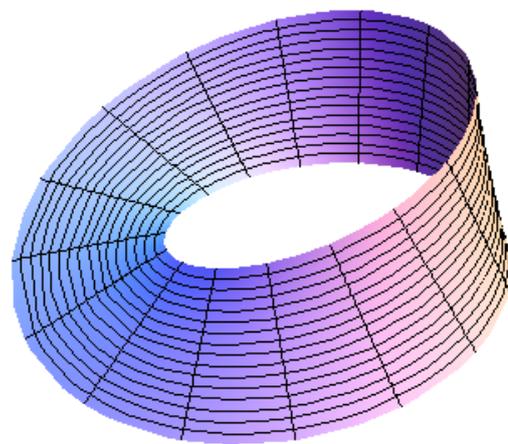
2007年4月20日 第1版 発行

2010年4月1日 第2版 発行

2011年4月1日 第3版 発行

奈良女子大学附属中等教育学校

数学科



2011/4/1