

物理と数学の協働授業

一流体中の物体の運動と終端速度の考察

1. はじめに

本校は、SSH(スーパー・サイエンス・ハイスクール)の第1期指定を2005年度・第2期指定を2010年度、引き続き第3期指定を2015年度に受け、2019年度はその5年目を迎えた。3期SSHでは、『共創力を備えた科学技術イノベーターを育成するためのカリキュラム開発』をテーマに、多分野融合研究において、自ら課題やプロジェクトを設定し、多様な他者を組織して、新たな研究領域を切り開いていく能力を持ったリーダーの育成を目指した。カリキュラム開発の主題である「サイエンス・イシューズ」では、理科と数学が教科横断型の共通課題で行う合同授業を積極的に設定し、生徒が協働して課題の解決を図る探究活動を行う。ここでは、科学的知識と数学的知識が融合的に学習でき、それぞれの概念をより一層深く理解できるとともに、現実の諸課題を科学的視点から捉えて考察することが可能になると考えた。この取り組みは、2022年度より新学習指導要領にて設定される「理数探究」に向けて先んじた開発である。

本校数学科と理科の教員は協働して2015年度から「理数研究会」という組織を立ち上げ、公開研究会にて毎年授業公開(理数シンポジウム)を行ったり、日常の授業においてトピックごとに実践をしたりしてきた。その詳細については以下に報告されている。

『フェルマーの原理を扱う有効性についての考察—数学科を通じた科学概念の獲得—』(物理と数学、2016年度公開授業、『奈良女子大学附属中等教育学校研究紀要』第57集、2019年)

『原子の電子構造と立体図形—化学と数学の融合授業の試み—』(化学と数学、2017年度公開授業、『同』第58集、2019年)

『理数融合授業(サイエンス・イシューズ)の実践—新学習指導要領「理数探究」への提案—』(生物と数学・物理と数学、2015年度公開授業ほか、『同』第58集、2019年)

『化学と生物の融合授業の実践—「窒素の循環」をめぐって—』(化学と生物、2018年度公開授業、『同』第58集、2019年)

筆者は上記拙稿『理数融合授業の実践』において、理科教員と一緒に携わったいくつかの授業展開例を紹介したが、本稿ではその後開発した融合授業の一例を取り上げ、実践を行うなかで生徒が課題を探究していった様子を参考にして、このような授業を設定した意義・効果がどのように顕在化できるか、協働授業の有効性とあり方をさらに模索する試みと位置づけて、今後の方向性を探っていくこととする。

2. 物理と数学の協働授業

2-1 研究の背景

■ 研究の動機

本校の学校設定科目として、以前6年生で開講していた科目に「数理科学」がある。その講座では数学の教員が「過去と未来を見通す」というテーマで特に微分方程式を大きく取り上げ、主に数理的側面から自然科学を探究する授業を展開していた。そこでは種々の自然現象・社会事象を理論的・関数的に扱ったが、あくまでそれらは現象のモデル化・シミュレーションの一つとしてコンピュータ上

で計算させるにとどまっていた。

今回一連の融合授業を開発していくに当たっては、従来の展開よりもっと理科の授業に近づくことを考えている。思考実験ではなく実際に実験を行い、モデル化が本当に自然現象を説明できているのかまで検証する作業を加えることで、具体的現象と抽象的概念の往還が可能になり、それが科学的探究の本質的な方法であろうと思われるからである。

＜参考＞ 「数理科学」の授業

この授業は6年生で週2時間開講され、理科系に進学する者が自由に選択していた。講座の内容は、現実の問題や高度な数学的問題を、数式処理システム(*Mathematica*)・グラフ電卓などのテクノロジーを活用しながら探究し解決していく、というものである。

「数理科学」のテキストの構成は、次の通りである。

- (1) ゲームと確率 (確率と漸化式)
- (2) 生態系の数理とカオス (差分方程式)
- (3) 飛行曲線 (微分方程式入門)
- (4) 過去と未来を見通そう (微分方程式)
- (5) 音波を解析する (フーリエ展開)
- (6) モデル化とシミュレーション

最後の単元はテーマを広くとった課題学習であるが、どの単元にも、生徒自らが条件や設定を発展させることのできる課題が盛り込まれている。

教材は、どれも数学・科学の発展と両者の関わりを浮き彫りにし、生徒の知的好奇心を刺激するものを選んでいく。現在の中教育の範囲を逸脱する内容も含まれているため、前述のようなテクノロジーも活用しながら学習を進めた。1つの教材を学習する中で、数学的・科学的な内容はもちろんのこと、テクノロジーの活用方法の一端を学ぶことができるような教材を開発した。

かかる過去の実践も参考にして現在では、理科の教員も授業に取り込み、コラボレーション型の教材開発を種々の学年で展開できるよう、「理数融合授業」に形を変えて発展させたともいえる。

■ 研究の方法

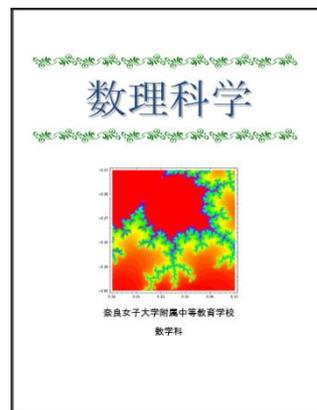
「数理科学」は数学の教員だけで通年授業をしてきたが、今回の授業研究では一連の授業に理科と数学の教員が交互に現れたり、同時に出てTTを行ったりといった方法をとっていきたいと考えた。そのことで、自然現象の解析には本来さまざまな分野からのアプローチ・協働が必要であることが生徒にも実感されるであろう。一つのテーマについて、実験もして数学的解釈も加え掘り下げていくため、単元の通常の授業よりもかなり時間を使って展開していくことになる。

今回の実践では学年を下げ、4年生の「物理基礎」の通常講座の授業をベースとして、理科と数学の教員がTTを行う方法をとった。自然現象を説明するツールとして数学を用いるという立場から、この方法は妥当なように考えられる。中学年(3,4年生)の実践においては、定量的な測定と関数によるモデル化など、主に理科の課題解決における数学的な視点からの解釈の育成を目指したい。

2-2 流体中の物体の運動と終端速度の考察

■ 研究の目的

物理学においては他の理科の分野にもましてモデル化や関数的な解析との親和性があり、微積分とも関わりが大きいので、多くの場面で融合授業へのアプローチの可能性があると考えられる。現実にある物理的な諸課題を考察するにあたり、今回は力学において重要となる、物体が運動するときの時



間・速度・加速度の関係に関する発展的な授業研究を行う。

教科横断型テーマでは広く教科間・生徒間における「共創力」が育成されることを目指し、教材として数学・科学の関わりが実感できるものの一つを取り上げ、テクノロジーの力を活用した探究を進めることを考えている。大学での学びにもつながっていくような内容を考え、探究活動を中心として展開することが特徴である。

■ 学習指導案『空気中の物体の運動の数学的解析』

高等学校「物理基礎」に「空気中・水中の物体の運動」という単元がある。空気中を落下する水滴(液体中を落下する小球も同様)は、重力によって加速するが、速度が増すとともに空気抵抗の影響により加速度が小さくなり、やがて一定の速度になる。

この一連の授業では、斜面上を重力により移動する台車に帆をつけて空気抵抗を受けさせ、一定時間ごとの速度を測定することにより、 $v-t$ グラフ上に曲線を描かせる。一方、速度とその増加率の関係に着目させ、グラフを数式モデルで表現できないか考察する。そして、実際の物体の運動の様子が、数学的解析により予測できるかどうか試みる。

授業者：藤野 智美，河合 士郎

クラス：4年A組 41名(男子20名、女子21名)

単元名：空気中・水中の物体の運動 ～流体中の物体の運動と終端速度～

教材観： 空気中を落下する物体は、重力によって加速するが、速度が増すとともに加速度が小さくなる。このことから、空気からの抵抗力は速いときほど大きくなるのがわかる。また、十分に時間がたった後には落下速度が一定になる。この速度を終端速度といい、このとき重力と抵抗力はつり合っている。生徒がこの単元を学ぶことを通して、物体が空気中を動くときには、速さに依存する抵抗力や乱流・物体の密度・形状・大きさなどによって異なった運動をすることを発見し、一定のモデル化が可能なのか、また数式(関数)として一般的に環境要素の関係性を表現できるのか考えさせたい。

身近な落下現象のモデル化を行い、その変化を視覚化するとどうなるか探究する内容で、数学の大きな分野の一つである微分方程式の一端にもつながる。大学で学ぶ展開とは異なり数学的な解法の操作としてではなく、自然や社会現象を解析する手段・変化を捉える見方としての側面が実感でき、「未来を見通す」ことの興味深さに触れられる内容とした。以前に実践した、生物学における個体増殖のモデル化(「ロジスティック・モデル」)の授業方法と共通しているところがある。

単元『流体中の物体の運動』の指導計画：

第1時	抵抗力を受ける運動の $v-t$ グラフ(物理学的意味)
第2時	$v-t$ グラフの数学的意味
第3時	台車を用いた測定による $v-t$ グラフの作成(記録タイマーを用いた速度の測定実験)
第4時	結果をもとにした数学的解析

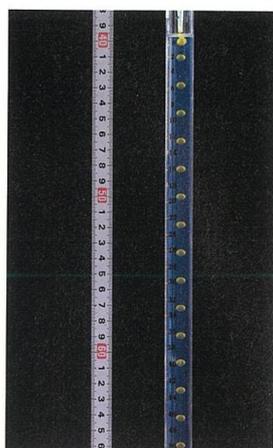
第1時の授業は、物理学の教諭が担当し数学教諭は授業観察をする。演示実験や思考実験により、

また種々のデータも参考に、流体中の物体の運動と終端速度について理解し、モデル化が行われ得ることに気付かせる。

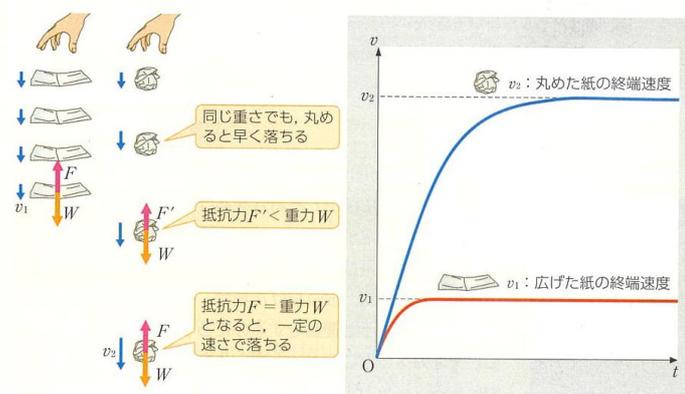
第2時の授業は、終端速度に関する $v-t$ グラフについて、漠然とした形を予想したうえで数学的な考察を行う。この授業は数学教諭が担当し物理学の教諭は授業観察をする。 $v-t$ グラフを定式化できる関数と捉え、パラメーターを配置しモデルとなる関数式(微分方程式になること)を提案させる。この段階ではあくまで仮説として扱い、検証としての実験に繋げていく。

第3時は、記録タイマーを用いた速度の測定実験を行う。斜面上を重力により移動する台車に、帆をつけて空気抵抗を受けさせ、位置の変化量から一定時間ごとの速度を算出することにより、 $v-t$ グラフ上に曲線を描かせる(算出結果をグラフ上にプロットする)。物理学の教諭が担当し数学教諭は授業観察をするが、観察だけではなく実験にも加わり、物理学の手法を体験することで、実際の実験・観察に於いて統計データ処理の手法が使われていることに注意させる。

第4時は、二人の教諭がフラットに立ちTTの方式で授業を行う。こういった授業は本校の公開研究会にて以前「数学と生物の協働授業」において提案・公開した形式である。微分方程式を解けば陽関数の数式を導くことができるが、ここではその過程をたどらずに、表計算ソフト(Excel)を用いた差分計算(漸化式の数値の逐次代入)により、微分方程式がみたす関数のグラフを描かせる。漸化式が未来を予測する手段となり得るか、パラメーターの数値を適切に設定することで関数のグラフの形状を変化させ、実験値と予測値が適合するかどうかを各グループに考えさせる。



▲図42 流体中での落下
ストロボ発光間隔 0.03 秒



▲図43 終端速度の違い

— 高等学校「物理基礎」東京書籍より引用 —

■ 第1時 抵抗力を受ける運動の $v-t$ グラフの予測

第1時の授業では、実験データの解析に必要な物理概念(変位・速度・加速度の関係、運動方程式)の復習とともに、空気中で速度を持つ物体に作用する力と速度変化について議論させた。薄い紙カップ(弁当用に利用されているアルミカップとセットになっている紙カップ部分)を落下させ、等速になる現象を提示する。その後、教員から以下のような問いを展開し、班内で議論させた。

<教員からの問い>

- ①重力が作用しているにも関わらず、紙カップが加速せずに等速になるのは何故か?
- ②空気抵抗が作用する場合、落下時間と速度の関係を示すグラフ($v-t$ グラフ)はどのような形になると予想できるか?理由と共に示すこと。

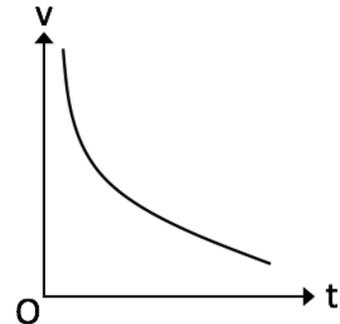
①の問いに対しては、多くの班が「進行方向と逆向きにはたらく空気抵抗」と回答しており、落下

する物体に空気抵抗が作用していることが日常的に体感できていることがわかった。一方、②は主に以下に示す2つの意見に分かれた。

<②に対する2つの意見>

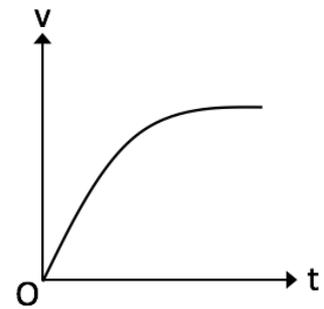
・意見1：反比例のグラフに似た形の $v-t$ グラフ(速度が減少)

最初に指名した班から挙げられた回答であり、その理由として、「今回の実験では、時間の経過と共に空気抵抗の作用で速度が遅くなる。よって、速度の値は徐々に小さくなる」という意見を示していた。この回答は、見た現象をそのまま言葉で表現することによる典型的な間違い方だと考える。「速度が遅くなる」という言葉のイメージが速度変化のイメージと混同されて使われている。議論の前半では、この意見に賛成する班が半数ほどみられ、生徒が混同しやすい事例であることがうかがえた。



・意見2：無理関数のグラフに似た形の $v-t$ グラフ(速度変化が減少)

上記の意見1に対して異論を唱えた班からの回答である。この班は、「意見1が正しければ、空気中でやがて物体の速度は0になって静止することになるが、等速な限り速度は0にならない」という意見を述べていた。加えて、「落下直後は速度が0であるのに対して、重力の作用により経過時間と共に速度が速くなり、いずれ速くならない状態(等速)になる。そう考えると、等速の段階が運動全体の中で最も速い速度になるはずだ。」「空気抵抗は速度と逆向きに作用するので、運動方程式にあてはめると加速度が減少していく。」「時間と共に減少するのは速度ではなく、速度変化。」と説明していた。この回答は、現象を抽象化し、運動方程式に当てはめて論理的に考察できている事例である。また、速度と速度変化という概念の差異を理解した上で、速度と加速度として区別できている。



上記の2つの意見について各班やクラスで議論を行ったところ、最終的には意見2が正しそうだという結論に至り、第2時以降の仮説として設定した。

■ 第2時『 $v-t$ グラフの数学的意味』の展開

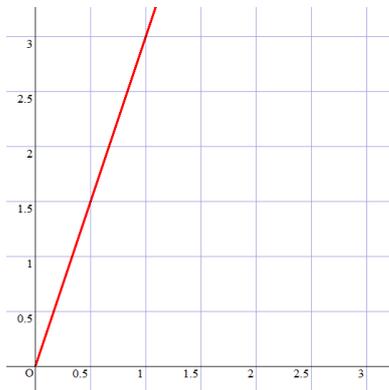
空気中の斜面を落下する台車の運動について考えるにあたり、等加速度運動をもとにしてそこに環境要因による修正を加えてモデル化していく。

まず、等加速度運動の $a-t$ グラフ、 $v-t$ グラフ、 $x-t$ グラフのそれぞれについて、関数式とグラフの形状を数学的に復習する。そして、速度がだんだん鈍っていく場合には、加速度はどう変化すると考えられるか想起させ、伴ってそれぞれのグラフの形状がどうなるか予想する。

これは等加速度運動ではないので、加速度の変化(減少率)を最も単純な変化(一定)と仮定し、速度が増加するほど加速度が減少すると考え、まずはそれを一次関数で表すことを考える。その際

$a = k - cv$ となるが、このモデルの式は $\frac{dv}{dt} = k - cv$ ということ(微分方程式)であり、解く手立ては難しい。

これを $v-t$ グラフに表すために、実験により時間ごとの速度を求めてプロットしたものを作成し、数学的に微分方程式を解いた解のグラフ(実際には差分計算による)と excel 上に重ねることで、考察ができることを知らせる。また、速度以外に、加速度の大小に影響すると思われる要因も考え、式やグラフのどの部分にそれが反映されるのかを考察する。



一次関数($v = 3t$)のグラフ



空気抵抗がある物体の $v-t$ グラフ

■ 第3時『記録タイマーを用いた速度の測定実験』の展開

今回の授業では、空気抵抗による速度変化を実験データから算出するため、定量化に適した実験装置が必要である。物体が空気抵抗を受けて等速度になる現象は、前述した落下する雨粒のように質量が小さいものや、空気中で落下するティッシュペーパーなどのように観測する物体の物理量を測定しにくいものが多い。一方、今回の授業目的に照らし合わせるならば、生徒自身が変位と速度、加速度の間に成り立つ微分の関係を体感する意味では、変位の生データを生徒が手作業で処理できる、記録タイマーを用いることが望ましいと考えた。以下に実験の素案を示す。

①記録タイマーの活用とその利点

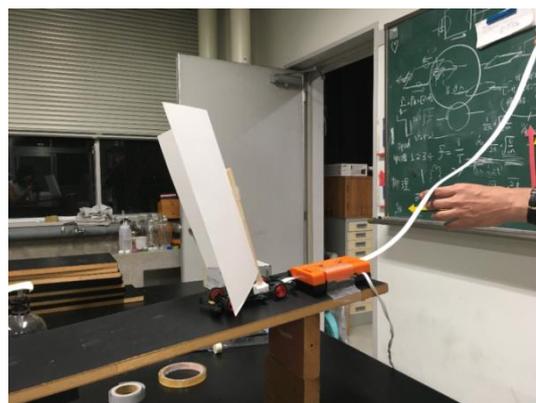
記録タイマーの利点は、変位の生データを目視できること、得られたデータから変位、速度、加速度の相関関係を見出す処理がシンプルに行える点である。一方、データ処理の過程そのものが微分概念を考えることにつながる。物理量のデータ処理が微積分の概念理解に役立つ最も典型的な事例であると同時に、物理基礎の序盤で学習するような、日常生活においても馴染みのある簡単な物理量で議論ができる。直接的に量を測定しにくい運動量と運動エネルギーの関係と比べても、これほど相関関係を定量化しやすい物理量は高校物理においては少ない。このような理由から、今回の授業では記録タイマーの利用を前提とした。

②空気抵抗の影響を定量化するための実験装置

記録タイマーを設置でき、空気抵抗の影響を受けながら速度変化を制御できる実験道具として、帆をつけた力学台車を想定した。予備実験の当初は、力学台車に帆をつけ、長い斜面の上で緩やかに落下させる方法を試行した。しかし、力学台車は重いものだと空気抵抗を受けにくく、抵抗係数である c の値が小さくなり、実験室の机上で行う範囲では十分な速度減速が見られなかった。そこで試行錯誤の結果、軽い台車としてプラスチックのミニ四輪駆動車を用いることにした。さらに様々な試行を経て、以下の仕様の実験装置に決定した。

<実際に用いた実験装置>

- ・プラスチックのミニ四輪駆動車を用いる。
- ・ある程度の重さがないと静止摩擦係数が大きすぎて動かないので、50g と 100g のおもりを載せて調整する。
- ・空気抵抗を受けやすいようにそれぞれの台車に B4 サイズの紙の帆を張る(割り箸を用いて本体に固定する)。
- ・2m ほどの板状の斜面を走行距離とし、傾斜の角度は約 5° とする(角度が大きいと加速度がつきすぎて、小さいと台車が静止してしまう)。
- ・使用する記録テープの長さが長いので、記録テープの自重によって速度が変化することを防がなければならない。試行の結果、記録テープをそのまま床方向に垂らした状態ではミニ四駆はすぐに止まってしまったので、図に示すようにある程度の高さで支え、ミニ四駆の進行に伴って指の上を滑らせる工夫が必要である。



予備実験の結果は速い順に、(100g-帆なし)が加速度約 40cm/s^2 で滑り落ち(1.9 秒)、(100g-帆あり)が加速度約 30cm/s^2 で滑り落ち(2.3 秒)、(50g-帆なし)が加速度約 15cm/s^2 で滑り落ちた(3.3 秒)。これらの実験では時間内(斜面の端まで)に速度は収束せず、加速度はほぼ一定のままであった。もっとも成功したのは、(50g-帆あり)である。加速度が 0 になっている区間が多くみられ、滑り落ちるのには約 4 秒かかった。 $v-t$ グラフも、速度が収束したとまではいえなかったが、形状は理論から導出されたグラフに近いものとなっている。実際に実験をさせる際には、さらに重さや傾斜を調節したり帆を大きくしたりするなど、工夫をさせた。以下に第 3 時の授業の流れを説明する。

<実験方法とデータ解析の手順>

1. 前述した実験装置を各班で準備する。
2. 記録タイマーの打点カウントを 60 打点(1 分間)とし、位置データを取得する。
3. 6 打点で 0.1 秒間の変位に相当するため、6 打点ごとの変位を実測し、右表(実験プリントとして提示)にまとめる。

時間(s)	移動距離(cm)	速度[cm/s]	加速度[cm/s ²]
0-0.1			
0.1-0.2			
0.2-0.3			
0.3-0.4			
0.4-0.5			
0.5-0.6			
0.6-0.7			

4. 3 のデータをもとに、単位時間あたりの変位 $\frac{x_2 - x_1}{\Delta t}$ から速度 v を、単位時間あたりの速度変化 $\frac{v_2 - v_1}{\Delta t}$ から加速度 a を算出し同表にまとめる。
5. 4 で得られた速度及び加速度のデータからグラフを作成し、変化の様子を分析する。



実験室の環境では、斜面の長さが2m くらいまでと限界があり、落下にかかる時間内で速度の伸びが顕著に低下することを観察するためには、おもりの重量は50g 程度、傾斜は5~6°、帆の大きさ・材質も限られたものになってしまった。探究は、これら複数の実験条件を変えることで、運動方程式のどの変数の部分に関与し、グラフの形状のどこが変化するかまで予想し対照・検証するところまでいきたかったが、そもそも実験が成立するための条件が厳しく制約されてしまった。

■ 第4時 結果をもとにした数学的解析

実験結果の解析例（帆のある台車とない台車の実験値の比較）

4年物理基礎 実験：帆をつけた台車が斜面を下る運動
 2019.10.03 提出者4年 組 番 氏名 <<データ見本>>
 実験メンバー メンバー名

【詳取】 放電タイマーの測定は、1秒に10打点
 読み取りは、1m定期で、原点からの距離を2打点ごと(0.2秒ごと)に読む
 テープNo (7)
 台車の設定]帆の有無(有)、追加おもり(50)g、全体の質量(146)g
 斜面の傾き]斜面に沿って(1660)cmの所の高さが(197)cm
 No7

打点	t[s]	x[cm]	Δx[cm]	v[cm/s]	Δv[cm/s]	a[cm/s ²]
0	0.0	0.00				
2	0.2	0.63	0.63	3.15	2.95	14.75
4	0.4	1.85	1.22	6.1	3	15
6	0.6	3.67	1.82	9.1	2.55	12.75
8	0.8	6.00	2.33	11.65	3.1	15.5
10	1.0	8.95	2.95	14.75	2.1	10.5
12	1.2	12.32	3.37	16.85	3.05	15.25
14	1.4	16.30	3.98	19.9	1.6	8
16	1.6	20.60	4.30	21.5	2.65	13.25
18	1.8	25.43	4.83	24.15	1.45	7.25
20	2.0	30.55	5.12	25.6	0.65	3.25
22	2.2	35.80	5.25	26.25	0.9	4.5
24	2.4	41.23	5.43	27.15	1.2	6
26	2.6	46.90	5.67	28.35	0.15	0.75
28	2.8	52.60	5.70	28.5	0.5	2.5
30	3.0	58.40	5.80	29	0.7	3.5
32	3.2	64.34	5.94	29.7	0.7	3.5
34	3.4	70.42	6.08	30.4	-1	-5
36	3.6	76.30	5.88	29.4	-2.6	-13
38	3.8	81.66	5.36	26.8	1.4	7
40	4.0	87.30	5.64	28.2	0.05	0.25
42	4.2	92.95	5.65	28.25	0.1	0.5
44	4.4	98.62	5.67	28.35	-0.45	-2.25
46	4.6	104.20	5.58	27.9	-3.15	-15.75
48	4.8	109.15	4.95	24.75	5.65	28.25
50	5.0	115.23	6.08	30.4	-1.8	-9
52	5.2	120.95	5.72	28.6	1.15	5.75
54	5.4	126.90	5.95	29.75	-7.105E-14	-3.553E-13
56	5.6	132.85	5.95	29.75	0.25	1.25
58	5.8	138.85	6.00	30	0.25	1.25
60	6.0	144.90	6.05	30.25	0.75	3.75
62	6.2	151.10	6.20	31		
64	6.4					
66	6.6					
68	6.8					
70	7.0					

plot t	v ₁ [cm/s]	v ₂ [cm/s]
0.1	3.15	2.1
0.3	6.1	3.7
0.5	9.1	5.5
0.7	11.65	9.2
0.9	14.75	14.25
1.1	16.85	17.35
1.3	19.9	21.5
1.5	21.5	24.6
1.7	24.15	27.85
1.9	25.6	31
2.1	26.25	34.1
2.3	27.15	37.3
2.5	28.35	40.1
2.7	28.5	43.15
2.9	29	45.85
3.1	29.7	48.7
3.3	30.4	51.75
3.5	29.4	55
3.7	26.8	57
3.9	28.2	59
4.1	28.25	61.65
4.3	28.35	
4.5	27.9	
4.7	24.75	
4.9	30.4	
5.1	28.6	
5.3	29.75	
5.5	29.75	
5.7	30	
5.9	30.25	
6.1	31	
6.3		

速度 [cm/s] 帆をつけた台車が斜面を下る運動
 経過時間[s]

帆あり 帆なし

帆あり v[cm/s]

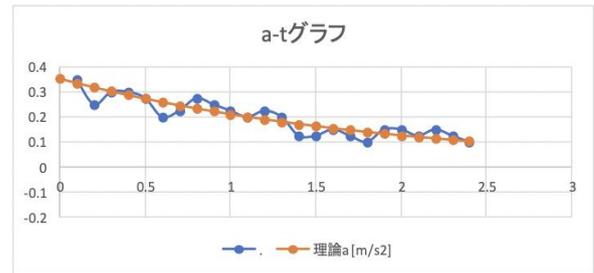
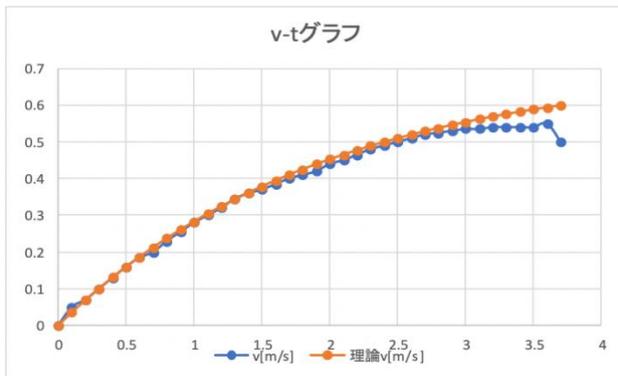
帆なし v[cm/s]

【詳取】 放電タイマーの測定は、1秒に10打点
 読み取りは、1m定期で、原点からの距離を2打点ごと(0.2秒ごと)に読む
 テープNo (8)
 台車の設定]帆の有無(無し)、追加おもり(100)g、全体の質量(146)g
 斜面の傾き]帆があるのと同じ傾きのまま
 No8

打点	t[s]	x[cm]	Δx[cm]	v[cm/s]	Δv[cm/s]	a[cm/s ²]
0	0.0	0.00				
2	0.2	0.42	0.42	2.1	1.6	8
4	0.4	1.16	0.74	3.7	1.8	9
6	0.6	2.26	1.10	5.5	3.7	18.5
8	0.8	4.10	1.84	9.2	5.05	25.25
10	1.0	6.95	2.85	14.25	3.1	15.5
12	1.2	10.42	3.47	17.35	4.15	20.75
14	1.4	14.72	4.30	21.5	3.1	15.5
16	1.6	19.64	4.92	24.6	3.25	16.25
18	1.8	25.21	5.57	27.85	3.15	15.75
20	2.0	31.41	6.20	31	3.1	15.5
22	2.2	38.23	6.82	34.1	3.2	16
24	2.4	45.69	7.46	37.3	2.8	14
26	2.6	53.71	8.02	40.1	3.05	15.25
28	2.8	62.34	8.63	43.15	2.7	13.5
30	3.0	71.51	9.17	45.85	2.85	14.25
32	3.2	81.25	9.74	48.7	3.05	15.25
34	3.4	91.60	10.35	51.75	3.25	16.25
36	3.6	102.60	11.00	55	2	10
38	3.8	114.00	11.40	57	2	10
40	4.0	125.80	11.80	59	2.65	13.25
42	4.2	138.13	12.33	61.65		
44	4.4					

帆なし v[cm/s]

実験結果の解析例（定数を調節した理論値と実験値との比較）



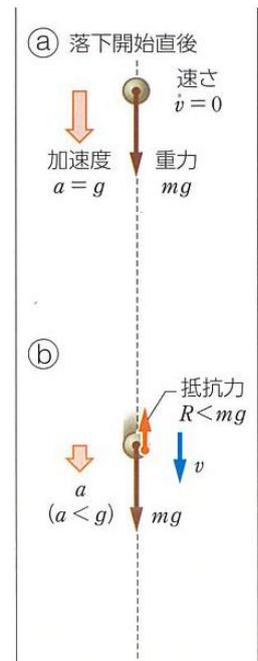
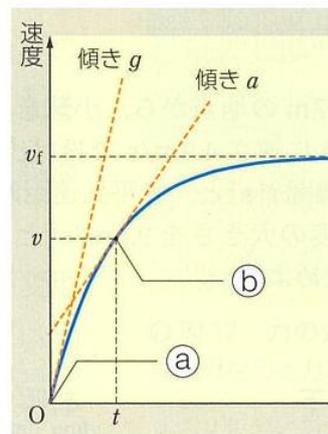
今回扱った運動では、加速度の減少率を一定(c)とし、運動方程式 $ma = mg - f$ (f は抵抗力) から、 f は何に伴って増えていくのか考え、要因を各時刻における速度 v と仮定し、 $ma = mg - cv$ という数式モデルを立てた。各班の実験の結果から、時間ごとの速度が求められ、これをプロットすることで $v-t$ グラフを描くことができるが、これらのカーブには、関数的に実際には複数の任意定数が含まれている(斜面なので g ではなく $g \sin \theta$, また動摩擦係数・帆の大きさなど)。これらの定数が変化すると、カーブの形も変化する。

実験値を理論値によるグラフとフィットさせて考察する際、4年生の段階では、理論上のグラフをどのように求めたかは、ある時刻の $v = at$ の a に1行前の a を代入することでその時刻の v を求め、次の a は $a = g - \frac{cv}{m}$ から算出するという、逐次代入で Excel に計算させたというに留めている。

ここでは何よりも、 $v-t$ グラフの曲線の傾きの値が、加速度 a の値に相当しているところに注目させたい。

$v-t$ グラフの傾きがだんだん緩やかになっていることが、 $a-t$ グラフでは a の値の漸減に対応している。 a の値が 0 になれば等速運動となり、 $v-t$ グラフの v の値は一定値(終端速度)となるわけだが、今回の実験では坂の長さが短く、理論値で計算した場合においても収束するまでには至っていないので、終端速度を観測することは今回の環境では無理である。

数学科の観点からは、曲線の傾きが微分係数(変化の割合)に相当するというところをこの学年の段階で掴めることが大きい。元のグラフ(ここでは $v-t$ グラフ)がもし関数式で表されるとしたら、その傾きの時間的変化を関数式にしたもの(ここでは $a-t$ グラフ)が導関数として導かれるということが一般的に理解されればよい(導出できなくても概念がわかること)。



2-3 授業評価

これらの授業は4年生全員に対して実施し、授業後アンケートを実施した。3項目の自由記述で、集計したものを以下に示す。

Q1. 今回の課題を通して、物理分野におけるどのような概念の理解が深まりましたか？感じたことを記述してください。

運動や空気抵抗の理解が深まった。概念を可視化することができた。	39
空気抵抗の概念が実験とグラフによりイメージしやすくなった。	25
空気抵抗の変化の仕方がよくわかった。	9
公式を理解することにより現象を理解できる。	7
物理を学んでいくうえで数学的な視点も重要だと感じた。	4
数学的な表現をすることで、物理の現象をわかりやすく伝えることができる。	4
曖昧な考えを数値を扱うことで分かりやすく考えられた。	3
シミュレーションにより、実験前でも結果を予想することができることがわかった。	3
空気抵抗が物体の重さ、速度に関連していることが理解できた。	2
原理を用いた理論値と実験値が合ってくる面白さを知った。	1

Q2. 今回の課題を通して、数学分野におけるどのような概念の理解が深まりましたか？感じたことを記述してください。

実際の現象を数学を用いて解明できることがわかった。	24
関数の理解が深まった。	21
グラフの形状から現象を見つけられることを知った。	19
空気抵抗を受けたときの $a-t$ グラフと $v-t$ グラフの関連性があることや差異がわかった。	12
データの整理の重要性を理解した。	8
三角比がどのように使われているかよくわかった。	6
具体を抽象化する、一般化する方法を知った。	4
公式化することによりわかりやすく理解できた。	3
実際のデータを用いることで、学習内容がより理解できた。	1
もともと物理には数学の前提があるから、とりわけ変化はない。	7

Q3. 今回扱った課題や、実施した授業に対する感想を記述してください。

数学と物理が密接に関連していることを知った。	17
両方の教科の理解が深まった。	15
おもしろかった。	12
理科と数学の融合授業は新鮮で面白かった。	7
複合的な視点から考えることができた。	7
狙っている結果を実験で出すことは難しい。	6
物理と数学を組み合わせることにより、より正確な解析が可能になる。	6
現象を数学的に見るということの重要性を理解した。	4
難しかった。	21
授業の時間が短い	5
物理は数学的な分野なので、物理的視点と数学的視点の違いがよくわからなかった。	4
普段の授業との違いがよくわからない。	3
物理というより数学の授業だった。	2
数学と物理の使う内容がずれていたの合わせてほうがより分かりやすい	2
$v-t$ グラフと $a-t$ グラフが対象になる原理がいまいちよくわからない。	1

回答の主な結果から、仮説の有用性が示され、理科・数学の知識を往還させることで双方からの現象理解が一層深まったことが期待される。

融合授業によって、今回は物理学の数学的理解が深まったと感じた者が多いようであるが、逆に数学に具体的な現実の材料が与えられたと捉えることもできる。ベースを数学の通常授業の講座に置いて展開する方法にするとまた概念把握の印象が異なるかもしれない。

今までにない教材の扱い方・授業進行が新鮮だったいっぽう、私たち授業開発者としては種々の課題にも直面した。これまでの協働授業においても多かったことであるが、扱ったテーマは今回も高校の学習範囲外(「物理基礎」の教科書にはあるが深掘りはされていない)であり、しかも対象が4年生で数学の学習進度が追いついていないと深められない段階での実践となったことから、消化不良感が残ったことは否めない。関数というと一次関数・二次関数しか既習でなく、さらに運動方程式に含まれる三角比についても習いたてで、パラメーター(ファクターとなる文字)の多い概念に慣れていない。微分の考え方の導入として扱える教材でもあったが、式に含まれる要素を算出する過程で「難しい」と感じてしまう。要するに、触れたい本質とは異なる部分での数学的な計算でつまずき、「難しい」感覚が先行する。

3. 成果と課題

理科・数学科の教員ともに融合授業を通して新しい教材の開発ができ、今までもすでに扱っていた教材に対する新しい視点が得られたし、目指してきた共創力の育成に一定の効果がある。

アンケートでも生徒の多くは今回の融合授業のねらいを概ね理解し「内容の理解が深まった」と回答している。また、複合的な領域から考察することの重要性を述べている生徒も多数見られ、これらの生徒に対しては目指す共創力が育まれていると考える。

課題として、実験データをモデル化する場合、生徒の実験技術や初期条件により誤差が生じ、モデルから大きく外れてしまうことがある。数学と融合する際、この部分の消化不良感は生徒にとってハードルが高い。一方、従来のどちらかの教科の授業時間で行う場合、この部分を丁寧に考察する余裕はない。可能な限り時間を割いたつもりでも、実験データの取得から数学的な解釈までを行うには、総じて時間不足の印象を生徒・指導者ともに感じている。

また、理科・数学間の単元の進み方の差が、理数融合の授業を開発する上での障壁となる。生徒の理解が進まない理由にも進度の差が影響している(数学的に解釈できない)。より良い実践のためには、現行の理科と数学の学習進度の再考が必要だと考えられる。理解に必要な単元を数学で先に学習した後、理科で扱うという流れをとると、「難しい」という回答が減って、アンケートの回答もより内容が具体化していくのではないかと期待される。

4. 考察・今後の方向性

$v-t$ グラフの関数のもとになる微分方程式は、 $\frac{dv}{dt} = g - \frac{cv}{m}$ であり、陽関数に解くと

$v = \frac{mg}{c} \left(1 - e^{-\frac{ct}{m}} \right)$ となるが、当然4年生段階で解けるわけではない。ただ、今回の理数融合授業では、

t に依存して変化する値 v を含む数式により a が決まるというような、見たことのない複雑な関数を定義することによっても、自然現象の説明(モデル化)が可能であるのを経験してもらうことが主眼に

なっている。4年生においては少々背伸びした内容であったが、「空気中の物体の運動」はもともと4年生で履修する「物理基礎」で扱われるので、この現象をより発展的に考察したいと考えた。

もし5年生で同じ内容を扱うとすると、その際は生徒たちが漸化式を既修であるため「逐次代入」の部分を一歩進めて「数列」としてとらえ、 $m \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} = mg - cv_n$ （隣接2項間一次漸化式）と書き換えると、より数学的な考察を深めることができる。

この題材は高等学校のどの学年でもスパイラル的に扱うことができ、4年では「逐次代入でグラフが描ける関数」、5年では「離散変数の差分方程式」、6年生では「自然現象を微分方程式によりモデル化する」というように見方を進めていければよいと考えている。

今までより多様な視点から自然現象を解析していく発想が育成されることを目指し、理科と数学の融合授業案を今後もさらにいろいろな分野で複数実践していきたいが、一方、高等学校で扱われ習得されるべき学習内容には当然指導要領があり、範囲も限定されている。所定時間の枠内で、従来の授業展開をしていくだけでもかなり窮屈なところに、このような探究授業を計画してカリキュラム化することはなかなか困難である(今回提案した一連の授業は、本来1・2時間で終わる学習内容である)。種々のテーマについてこういった授業の展開方法を開発していくのは、科学的態度の本質であるし望ましいが、全体の授業時間数は明らかに不足してしまう。しかし、こういった授業を「総合的な学習の時間」や「課題学習」として別の時間帯に位置づけてしまうのは意図に反し、融合授業が何か特別なことと考えられるおそれがある。自然に通常授業に取り込むのが理想であるが、どう時間を作っていくかが課題となる。

理数融合授業で共通していえることは、理科の課題をテーマに数学的なアプローチを新たな視点として加えることで考察が深まることが体験できること、そのことを自然現象にフィードバックさせたときに必ずしも数学だけですべてが説明され立証できるわけではなく、さらに探求する可能性がある(完結しない)ことを知ること、である。

なお、授業の内容理解を促進するために、教員の「理数研究会」が中心となって理科と数学のカリキュラムを擦り合わせ、学年ごとの学習内容を再配置する取り組みも始めている。特に数学では、他分野での応用が円滑に進められるように、三角比の単元や種々の関数表現、微積分の考え方などの内容をおよそ1年下の学年に前倒しする案を進めているところである(2021より学年進行で実施する)。純粋に数学としての多くの計算や公式・課題についてはのちにじっくり教科の授業で慣れていけばよいが、根本的・基本的な概念形成は少しでも早くから導入しておくほうが、協働授業をしないまでも日常の理科の授業理解を助けるし、課題に対する発想が豊かになると考えられるからである。

今回紹介した題材についても、三角比・数列・微積分の考え方に早くから触れた後で授業展開する計画を立てると、より実りある結果が得られよう。

理科での実験・観察はもともとグループ活動で行われることが多いが、そこにこういった数学的な考察を加える発想を持たせることで「共創力」もさらに広がるのではないかと考えられる。

5. おわりに

数学科では従来から、3年生で重力による等加速度運動を扱ってきたし(『2次関数の導入—身近な事象からの法則性の発見—』奈良女子大学文学部附属中等教育学校研究紀要 第43集、2002年)、今回扱った空気抵抗を受ける物体の運動方程式についても、6年生で微分方程式の授業において探究したことがある。同じような題材を今後は「理数融合授業」の形で、実験を伴いながら理科の教員と協

働して展開していこうというのが、新しい方向性である。今回の教材を5年生で、数学的には漸化式として捉える融合授業も2019年度に実践しており、次回の本校紀要にて報告される予定である。物理と数学の協働授業を今後もいろいろなテーマについて、どの学年でこういった形で展開するのがふさわしいか、実践研究を進めていきたい。

理科における実験の地位については、よく考えさせる必要がある。科学に対するガリレオの最も偉大な貢献は力学における研究であるが、それは瞬間的に達成できたわけではない。彼はそれを半世紀かけて徐々に発展させ、1638年に集大成として『新科学対話』を出版している。ガリレオは、図表や思考実験によって自分の新しい考え方の意味を明らかにし、次第により精密なものにしていった。彼は、斜面に沿って球をころがす実験など、実際の実験について時おり記述を行っているが、これらの実験の中で実際にどれだけの数の実験を行ったかは、いささか論争のあるところである。ガリレオは「知力の助けを借りること」によって自らが望んだ結果を達成した。ガリレオの事例は、自身が認めているように、観察や実験の結果に訴えることによって成功しているのではない。摩擦のない面を作ることにはガリレオの時代には現代よりもずっと困難なことであったし、坂のさまざまな場所で球の速度を測定することは彼の時代には実行可能ではなかった。実験はガリレオの力学における革新の鍵ではなく、多くは「思考実験」であった。正確な観察言明の形で予測をもたらすことのできる正確な理論をもっているときにのみ、正確な実験法は遂行されうる。むしろ彼の力学は後の段階で詳細な実験法を支持できることが明らかになった。数学によって自然現象は種々のモデル化が可能であるが、実験では多くの要因により誤差が発生する。実験は理論(仮説)の厳密な証明にはなりえないが、有効なアプローチの一方法であり、さらに精密な探究へのきっかけとなるものである。

《 参考文献 》

- ・奈良女子大学附属中等教育学校数学科(2011), 「数理科学テキスト」第3版