

数学科 学習指導案

1. 日時 令和7年2月15日(土) 13:00~14:05(65分)
2. 学級 奈良女子大学附属中等教育学校 5年C組 生徒数41名
3. 場所 大教室
4. 授業者
5. 教材 東京書籍「数学C Advanced」
6. 単元名 複素数平面

7. 単元の目標

【知識・技能】

- ・複素数を平面上の点として表し、複素数の実数倍や和・差・積・商の図形的意味を理解する。
- ・複素数を極形式で表現することができる。
- ・ド・モアブルの定理とその図形的意味を理解する。
- ・複素数を用いて、図形の性質を考察したり、問題を解決することができる。

【思考・判断・表現】

- ・複素数の代数計算と、複素数平面上での幾何的な操作を関連付けて考察する。
- ・既習事項を組み合わせて、ド・モアブルの定理を証明する。
- ・複素数平面上の図形の性質や問題を、複素数の計算と関連付けながら解決する。
- ・座標幾何、ベクトル、複素数平面の関連性と類似点、相違点を把握し、思考・判断する。

【主体的に学習に取り組む態度】

- ・複素数平面のよさを認識し、問題解決に活用しようとする。
- ・日常の事象や現象を数学的に捉え、複素数平面の考え方を適応して考察しようとする。
- ・自ら問いを立て、さまざまなアイデアや手法を試し、課題を解決しようとする。
- ・問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善したりしようとする。

8. 教材観・指導観

本校の5年(高校2年)は数学Ⅱ、数学B、数学Cの内容を再編し、「解析Ⅱ」、「代数・幾何Ⅱ」の2つの授業を設置している。「解析Ⅱ」では、数学Ⅱの「複素数と高次方程式」、「三角関数」、「積分」(「微分」は4年で学習)、および数学Bの「数列」を扱い、「代数・幾何Ⅱ」では、数学Ⅱの「図形と方程式」、数学Cの「ベクトル」を扱う。今年度の「解析Ⅱ」でも、上記の単元を学習しており、現在は積分を並行して学習中である。

複素数平面は、複素数を「数」という代数の対象としてみるだけではなく、平面上の「点」という幾何の対象とみて、代数計算と図形の移動・拡大縮小、諸性質の間を往還して考察することが可能になる。同時に、複素数の計算を複素数平面上の図形の「変換」という視点から捉えることもできる。これまで学習した座標幾何、ベクトル、複素数平面を総合し、関連付けて理解することにより、それぞれの特徴を生かした問題解決を可能とするだけでなく、代数幾何の世界に通ずる見方や考え方を身につけることができる。

今回の公開授業では、教科書などで従来多く採られてきた授業展開とは異なり、1の n 乗根を題材に、複素数の極形式やド・モアブルの定理などの導入を図る。このような展開にした理由として、次の2点が挙げられる。第一に、学習した高次方程式の解法により、 $x^n = 1$ を解くことで得られた1の n 乗根を複素数平面上に表すことで、1の n 乗根が単位円を n 等分するという事実を見つけ出し証明するという過程の中で、三角関数の加法定理や数学的帰納法などの既習内容を活用することができ、この1年間の学習の流れに沿った展開が可能であることである。既習内容をどこで、どのように活用することができるのかを体感する良い題材である。次に、複素数平面上に表示された1の n 乗根を観察することにより、どのような仮説(予想)が立てられ、それをどのように証明するのかを自分(たち)で思案していくことは、「一般化して何がいえるのか?」と「なぜそれが成り立つのか?」を考える数学への正統な向き合い方であり、数学の授業における探究活動の根幹をなす活動である。その際に、個人による考察とグループによる共有・議論を経ることにより、考えが深化あるいは補強され、個々の学びが深まると期待できる。

9. 生徒観

クラスの雰囲気は比較的静かであり、多くの生徒は全体の場において意見を出したり、発表したりすることに意欲的ではない。しかし、ペアやグループによる活動では、熱心に意見を交わしたり、協働して活動に取り組んだりする姿勢は身につけている。数学を得意とする生徒も一定数存在し、積極的に発言をしたり、発展的な問題に挑戦したりするなど、意欲的に参加している。一方、数学を苦手とする生徒も多く、このような生徒は受動的であり主体性に乏しい。また、既習事項の定着が不十分な生徒が多いため、復習と確認をしながら丁寧に授業を進めている。これまで問いや課題を見出す経験が少なく、一方的に説明を受ける場面が多かったため、今回の授業を通じて、自分で問いを立て、いろいろな検討を経て自分で解決を目指す経験をさせたい。

10. 単元の評価規準

知識・技能	思考・判断・表現	主体的に学習に取り組む態度
<ul style="list-style-type: none"> 複素数を平面上の点として捉えることができる。 複素数の実数倍や和差積商の図形的意味を理解している。 複素数を極形式で表現できる。 ド・モアブルの定理を理解している。 複素数平面上の図形を複素数の式で表現して問題を解決することができる。 	<ul style="list-style-type: none"> 複素数の計算と、複素数平面上での幾何的な操作を関連付けて考察、説明している。 既習事項を組み合わせ、ド・モアブルの定理を証明できる。 複素数平面上の図形の性質や問題を、複素数の計算と関連付ける。 座標幾何、ベクトル、複素数平面の関連性を把握している。 	<ul style="list-style-type: none"> 複素数平面のよさを認識し、問題解決に活用しようとする。 日常の事象や現象に複素数平面の考え方を適用しようとする。 自ら問いを立て、主体的に課題を解決しようとする。 問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善したりしようとする。

11. 単元の指導と評価の計画(全12時間。本時は単元の2時間目)

時	評価規準	重点	記録	備考
1	<ul style="list-style-type: none"> 方程式$x^n = 1$の解を調べ、その特徴や規則性を考察することができる。 方程式$x^n = 1$ ($n=3, 4, 6, 8$)を解くことができる。 複素数を平面上の点として表現する方法を理解する。 	主 知 知		観察
2, 3	<ul style="list-style-type: none"> 調べた結果から、一般の場合を予想し、それを証明しようとする取り組みができる。 既知の学習内容と関連付けて、1の乗根が$z_j = \cos \frac{2j\pi}{n} + i \sin \frac{2j\pi}{n}$ ($0 \leq j \leq n-1$)と得られることを証明できる。 複素数の極形式を理解し、複素数の積を理解する。 ド・モアブルの定理を理解し、証明することができる。 	主 思 知 思	○	観察 記録

4	<ul style="list-style-type: none"> ・複素数の和や差に対応する図形的な意味を理解する。 ・複素数の積や商に対応する図形的な意味を理解する。 ・複素数の絶対値や偏角について理解する。 	知 知 知		観察
5	<ul style="list-style-type: none"> ・極形式やド・モアブルの定理に関する問題に積極的に取り組む。 ・極形式やド・モアブルの定理を利用して問題を解決することができる。 	主 知	○	観察 記録
6	<ul style="list-style-type: none"> ・複素数平面上の2点を結ぶ線分の内分点・外分点を理解する。 ・複素数平面上の対称移動や回転移動、拡大縮小を理解する。 	知 知		観察
7	<ul style="list-style-type: none"> ・複素数を用いて、2直線のなす角をどのように表現できるかを積極的に考察する。 ・複素数平面上の2直線のなす角を、複素数を用いて表現・考察する。 	主 思		観察
8	<ul style="list-style-type: none"> ・複素数を用いて、図形の性質を主体的に調べようとする。 ・複素数平面上の三角形の特徴を、複素数を用いて表現・考察する。 	主 思	○	観察 記録
9	<ul style="list-style-type: none"> ・複素数を用いて、図形の性質を主体的に調べようとする。 ・複素数平面上の直線や円などを、複素数を用いて表現する。 	主 思	○	観察 記録
10	<ul style="list-style-type: none"> ・複素数を用いて、図形の問題を主体的に解説しようとする。 ・複素数平面上の図形の問題を解決することができる。 	主 知		観察
11	<ul style="list-style-type: none"> ・図形の変換を、複素数を用いて表現し捉えようとする。 ・反転やモビウス変換など、複素数平面上の図形の変換について理解する。 	主 思	○	観察 記録
12	<ul style="list-style-type: none"> ・日常の事象や現象において、複素数平面が利用されているものを積極的に調べようとする。 ・ジュコーフスキー変換のような日常の事象における活用や、ジュリア集合などのフラクタル図形に関する発展的内容に関心を持つ。 	主 主	○	観察 記録

12. 本時案

(1) 本時の目標

- ・複素数を極形式で表すことができることやド・モアブルの定理を理解している。(知識・技能)
- ・調べた事実から、一般化した結果を予想し、証明しようとしている。(主体的に学習に取り組む態度)
- ・1の n 乗根が複素数平面上で単位円上を n 等分することを説明することができる。(思考・判断・表現)

(2) 本時の評価規準

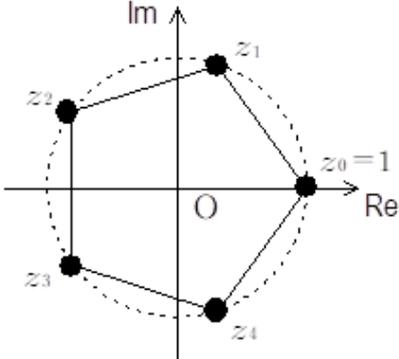
「十分満足できると判断される」状況と評価する具体例

- ・1の n 乗根について、 $n=3, 4, 6, 8$ の場合の結果をもとに、一般の n 乗根について予想を立て、それを証明しようとしている。
- ・1の n 乗根が $z_j = \cos \frac{2j\pi}{n} + i \sin \frac{2j\pi}{n}$ ($0 \leq j \leq n-1$)と表現でき、三角関数の加法定理や数学的帰納法を利用して、 $z_j^n = 1$ となることを証明できる。

「努力を要すると判断される」状況と評価される生徒への手立て

- ・ $n=3, 4, 6, 8$ の場合について、複素数平面上における1の n 乗根の配置に注目させ、 $n=3, 4, 6, 8$ の場合に共通する性質や事実を見つけさせる。
- ・ $n=3, 4$ の場合をもとに、複素数の積(累乗)の計算過程を極形式で表現させる。

(3) 本時の展開

区分 (時間)	学習内容	学習活動 ○指導・発問／●予想される生徒の反応	指導上の留意点 ◇評価
導入 (10分)	1の n 乗根について、 $n=3, 4, 6, 8$ のときを調べた結果を振り返る。	<p>○前回の授業で、1の3乗根、4乗根、6乗根、8乗根を求め、それらを複素数平面上に表してみた。 課題1</p> <p>そして、1の5乗根を考えてみた。 1の5乗根はどうなった？ 課題2</p> <p>●代数的に1の5乗根を求めようとする。 $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ より、$x=1$はすぐに求められるが、後半の $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ で手が止まってしまった。 →複素数解を、方程式を解くことで求めることは、計算が複雑になるようだ。</p>	<p>$n=3, 4, 6, 8$のときの1の乗根について振り返り、1の5乗根から導入する。</p> <p>実際は相反方程式とみて解くことができるが、おそらく手が出ないものと思われるので、1の5乗根を他に理解する方法がないかを考えさせたい。</p>
展開1 (10分)	<p>各自の予想を短時間確認させる。</p> <p>グループでの共有後、全体で共有する。</p>	<p>○前回の結果から、1のn乗根について、どのようなことが予想できたか？ 課題3</p> <p>●分からない。手が止まる。</p> <p>●1のn乗根は複素数平面上の単位円をn等分する点として表されている。</p> <p>●$z_j = \cos \frac{2j\pi}{n} + i \sin \frac{2j\pi}{n}$の形で表すことができる。</p> <p>○では、どのようなことが成り立つと予想できるか全体で共有してみましょう。 →複数の生徒を指名し、発表させる。 →全体と内容を確認しながら、補足・分類・整理する。</p> <p>○複素数平面上の単位円を5等分する点をとって考えればよい。 →1の5乗根のうち、虚数のものはどのように表すことができるか？</p> 	<p>前回各自のプリントに記述するよう指示済み。</p> <p>◇調べたことをもとに、積極的に予想を立て、共有しようとする。(主)</p> <p>文章表現の違いや式による表現などに気付かせる。</p> <p>内容に応じて、予想を類似性や関連性に注目させて整理する。</p> <p>改めて1の5乗根について予想と関連付けて確認しておく。</p>

		<ul style="list-style-type: none"> ●複素数 α は、α に対応する複素数平面上の点Pの原点Oからの距離 $OP=r$ (絶対値 α) と半直線OPを動径とみて、動径OPの表す角(偏角) θ により、$\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ と表す。 ● $\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ のとき、 $\alpha^n = r(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ が成り立つことを示せばよい。 ●複素数平面上の単位円において、n 乗根の1つをとり、その累乗をとると、別の n 乗根(自身も含めて)に移る。 ●数学的帰納法を用いると証明できる。 ●グループでもアイデアが出てこない。 	◇アイデアを積極的に示して議論に参加する。 (主) n が負の整数の場合や、2の n 乗根について、生徒のようすに応じて問う。
展開3 (15分)	全体で共有する。	○代表者に、グループでの検討結果を発表してもらいます。 →1の n 乗根について、気づいたことを挙げさせる。 ● $\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とするとき、 $\alpha^n = r(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ となる(ド・モアブルの定理)。 ● $z_j = z_1^j = \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^j$ である。 ● $z_j^n = 1$ ($j = 0, 1, n-1$) である。 ●1の3乗根の3つを原点周りに $\pm \frac{\pi}{3}$ 回転させると、-1の3乗根になり、1の4乗根の4つを原点周りに $\pm \frac{\pi}{4}$ 回転させると、-1の4乗根になる。	生徒から出た意見を分類・整理しながらまとめていく。 異なる言い回しや表現があるか確認する。 ◇三角関数の加法定理、数学的帰納法などの既知の事実を組み合わせる。(思) ※証明については、生徒の活動の様子に応じて、一部を行う可能性がある。
まとめ (5分)	本時のまとめと次回予告	今回は、1の n 乗根が複素数平面上の単位円上に等間隔に並び、 $z_j = \cos \frac{2j\pi}{n} + i \sin \frac{2j\pi}{n}$ の形で表現できることと、1の n 乗根の1つをかけ合わせていくと、他の n 乗根が順に現れることを確認した。 ・次回は、見つけた事実や規則性をもとに、予想が成り立つことを証明しましょう。	生徒の意見をもとに、1の n 乗根についてわかったことと、証明すべきことを整理する。
<次回> 第3時	前回共有した方針をもとに、証明を行う。	今回は1の n 乗根について、 ①複素数は一般に $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ と表すことができ、 $\{r(\cos \theta + i \sin \theta)\}^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ が成立すること	証明すべき事柄を確認して、前回調べたことから、どのように証明したらよいかを考えさせる。

②1の n 乗根が $z_j = \cos \frac{2j\pi}{n} + i \sin \frac{2j\pi}{n}$ の形で表現できること

③ $z_j = z_1^j = \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^j$ が成立すること

を証明してみよう。

● $\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とするとき、

$\alpha^n = r(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ となること(ド・モアブルの定理)を、数学的帰納法を用いて証明する。

● $z_j = z_1^j = \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^j$ であること

と、 $z_j^n = 1$ ($j = 0, 1, n-1$)であることを示す。

※一般に、

$$\begin{aligned} r(\cos \theta + i \sin \theta) \times R(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ &= rR\{(\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi) \\ &\quad + i(\sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi)\} \\ &= rR\{\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi)\} \end{aligned}$$

今回は1の n 乗根なので、単位円上の点を考えるため、 $r = R = 1$ 。

●1の n 乗根は $x^n = 1$ の解である。

そこで、この解を $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とおくと、 $r = |z| = 1$ 。

ド・モアブルの定理から、 $z^n = 1$ より、 $\cos n\theta + i \sin n\theta = 1$ となる。

よって、 $\cos n\theta = 1$ 、 $\sin n\theta = 0$ となる。

ゆえに、 $n\theta = 2k\pi$ ($k \in \square$)から、 $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ 。

$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ とおくと、異なるのは

z_0, z_1, \dots, z_{n-1} の n 個。

逆に z_0, z_1, \dots, z_{n-1} は $z_j^n = 1$ を満たす。

($j = 0, 1, \dots, n-1$)

→この証明により、1の n 乗根が n 個あることがわかる。

・次回はこれをもとに、一般の複素数の和差積商、累乗について、考えていくことを予告する。

12. 数学の教科授業における「探究的な学び」について

授業者は昨年度まで、本校のサイエンス研究会数学班の顧問を担当し、総合的な探究の時間においても、数学分野の探究活動を指導してきた。数学を対象とする探究活動は、近年全国的にも増加の傾向にあるが、理科や情報の分野に比してはまだ少ないといえる。その中で授業者は、「数学の探究を意欲的に行うことができる生徒を育成するには、どのような働きかけが有効なのか」という問題意識を持ち続けてきた。

数学を対象とする探究活動は、

①数学を現実の課題や問題に適用し、数理モデルを構築したり、データを分析したりして、解決・提案を目指す

②数学の内容や問題を発展・一般化させて、新たな定理を発見・証明したり、数学の問題を解決したりする

の2つの傾向に大きく分類できる。

①については、現実の課題や問題を対象とするため、教科横断的、多分野融合的な知識や技能、視点が求められる。現実の課題や問題を数学の俎上に載せるために、パラメータやモデルの選択し、数学的な知識・技能を活用して数学的解を得て、それを現実の文脈に再翻訳するというサイクル(本校のいう「数学する」活動)を複数回くり返しながら、解決を図ることになる。

これに対して、②では、既存の知識をもとに、数や図形に関する具体的な計算や観察を行い、得られた結果の共通点や相違点に着目することにより、一般的に成り立つ事実を定理や命題の形で整理して証明を行う。あるいは、問題の条件を変えて考察したり、新しい問題を作成してその解を求めたりする。このように見ると、②のような探究活動は数学という教科の特質との親和性が高く、通常の教科授業の枠組みでも十分に取り入れることが可能である。

また、このような「探究的な学び」を教科授業で実践するためには、次の要素が必要であると考えている。

(1) 自然に問いをもつ姿勢を育てる

「どうなるのだろうか?」、「なぜだろう?」、「どうすればよいのだろうか?」という問いを定常的に繰り返し、生徒にとって素朴な疑問をもつことを習慣づける。さらに学習を進めるうえで、「この場合はどうだろう?」や「この条件を外したらどうなるだろうか?」という一段階の上がった問いを考えさせることが重要である。

(2) 学習した知識を活用して考察しようとする姿勢を育てる

数学の探究においては、既存の概念や手法を組み合わせることで新しい課題や問題に向き合うことになる。そのためには、基本的な知識と計算や処理の技能を身につけておいた方がよい。さらに、新しい発想を生み出すためには、数学の概念に対する深い理解が必要なる。できればよし、解ければよしではなく、本質的な理解に到達させることも重要な要素である。

(3) 間違いや失敗を恐れず、粘り強く試みる姿勢を育てる

今回の公開授業の対象学年の生徒たちも、間違いや失敗を「悪」や「恥」とみる傾向が強い。しかし、探究ではすぐに結果が得られるとは限らない。失敗や間違いにめげず、何度も手法やアイデアを修正しながら進めていくことが必要になる。授業においては、解答が1つに定まる問いだけではなく、(うまくいくかどうかは一旦置いておき)自由にアイデアを出し合える課題や問いを設定することが重要である。同時に答えが用意されていない問いや複数のアプローチが可能である課題なども有効であり、1つの問題に十分な時間をかけて取り組む経験をさせることもよい。

(4) 課題に協働して取り組んだり、意見交換を積極的に行ったりする姿勢を育てる

個人による思考も重要であるが、各自が思考した結果を共有し交流し合うことにより、個人では気づかなかったアイデアや視点が獲得できる。また、他者に自分の意見やアイデアを伝えるためには、自分の思考を整理し言語化する必要が生じる。この作業を通じて、自分の意見やアイデアを客観的に評価し、意味付けや価値付け(吟味)をすることができる。

(5) 小さな発見や達成にも十分な充実感を生徒に与える

生徒に「見つけたこと、わかったことを出し合いましょう」と指示したとき、「(明らかなことなので)これは発言しても意味がない」というように勝手に意見に軽重を付けて判断している様子が多々見受けられる。数学の探究においては、このような明らかに思えることを丁寧に確認することにより気づくこと、ひらめくこともある。気づきに対して、軽重や難易のラベル付けをせず、どの意見もどの発見も素晴らしいと受け入れることが、生徒の自己肯定感を高め、さらに追究しようとする姿勢や態度を育てる。

今回の公開授業では、上記の項目を意識して、複素数平面の導入を題材に授業を計画した。